

不完全情報に基づく不確実性下の意思決定手法†

——S-S 優越構造——

竹 口 知 男*・明 石 一*

Decision-Making Method with Incomplete Knowledge under Uncertainty

——S-S Dominance——

Tomoo TAKEGUCHI* and Hajime AKASHI*

In the decision-making by maximizing the expected utility, it is important to identify utility functions and to assess the probability distributions for each alternative. In practice, however, it appears very difficult to do this in many cases. Therefore, it becomes necessary to develop decision-supporting method on the basis of the obtainable partial knowledge of utility functions and probability distributions. One such method is by using the concept of dominance. The notions of dominance that can be applied to the maximum expected utility criterion are: (a) Stochastic Dominance, by which the alternatives are ordered by comparing structure of their probability distributions under partial knowledge of utility functions, and (b) Statistical Dominance, by which the alternatives are ordered by comparing utility function values under partial knowledge of probability distributions. In this paper, stochastic dominance is first surveyed. Then, statistical dominance by Fishburn is extended, and by coupling the extended statistical dominance with stochastic dominance, Stochastic-Statistical (S-S) Dominance is developed. This dominance can be applied to the cases where only partial knowledge is available of both utility functions and probability distributions. Finally, the derived conditions for the S-S dominance are applied to an investment decision problem of stocks in Japan in order to see the feasibility of S-S dominance. By adding a reasonable criterion for incomplete knowledge of probability distributions, we can select the best alternative from among 115 alternatives on the basis of the risk aver-

sion. It seems clear that S-S dominance does work as decision-supporting method under incomplete knowledge.

Keyword: stochastic dominance, statistical dominance, S-S dominance, decision-supporting method, expected utility

1. 緒 言

Von Neumann-Morgenstern の期待効用仮説に基づく不確実性下の意思決定問題において、効用関数の同定ならびに各代替案に対する確率分布の付与が重要な課題となる。しかし、実際の意思決定問題において、意思決定者の選好構造を正確に反映した効用関数を同定することも、決定における考察範囲全体を同時に考慮した大局的な確率分布を完全に付与することも共に困難な問題である。このため、効用関数ならびに確率分布に関する入手可能な部分的情報のみに基づく意思決定支援手法の開発が望まれている。部分的情報に基づく意思決定支援手法の一つの概念として優越構造の概念がある。期待効用最大化の規範に適用可能な優越構造の概念としては、(a) 確率的優越構造 (Stochastic Dominance, SD)^{1)~3)} と (b) 統計的優越構造 (Statistical Dominance)^{4), 5)} とがある。SD は、確率分布に関して完全な情報が得られるが、効用関数に関しては意思決定者のリスクに対する選好態度 (リスク回避など) という部分的情報しか得られないという状況のもとでの意思決定支援手法である。一方、統計的優越構造は、効用関数値に関して完全な情報が得られているが、確率分布に関しては不完全な情報しか得られないという状況のもとでの意思決定支援手法である。

本論文では、一属性意思決定問題を取扱うこととし、まず確率的優越構造を概説する。つぎに、Fishburn らによる統計的優越構造の確率分布に関する情

† 第 21 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 57・7)

* 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

* Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto
(Received November 15, 1982)

(Revised February 26, 1983)

報の不完全性を一般的な情況に拡張し、その拡張された不完全情報のもとでの統計的優越構造に対する条件（統計優位則，Statistical Dominance Rule）を導出する。さらに、効用関数ならびに確率分布に関して共に不完全情報しか得られない、という情況に適用可能な新たな優越構造の概念として、SD と統計的優越構造とを結合させた S-S 優越構造（Stochastic-Statistical Dominance）を定式化する。その定式化のもとでの S-S 優越構造に対する条件（S-S 優位則，S-S Dominance Rule）を考察する。最後に、本論文で提案される S-S 優越構造の意思決定支援手法としての有効性を検証するために、導出された S-S 優位則を株式投資銘柄決定問題に適用する。

2. SD の概要

属性 X の特定の属性レベルを $x \in [a, b]$ (注 1) とし、Von Neumann-Morgenstern の意味での効用関数を $u(x)$ とする。さらに、代替案の集合を $\mathcal{A}$ とし、代替案 $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}$ に対して付与される分布関数をそれぞれ、 $F(x), G(x)$ とすると、期待効用最大化の規範はつぎのように表わせる。

〔公理〕

$A \succeq B$ ならば、 $E[u, F] \geq E[u, G]$ である。ここに、 $A \succeq B$ は意思決定者の選好判断として代替案 A が B と同等以上に好ましいことを表わし、 $E[u, (\cdot)]$ は分布 $(\cdot)$ に関する効用関数 $u(x)$ の期待作用素を表わす。

期待効用仮説においては、意思決定者の効用関数が一意的に存在するものと仮定されるため、上記公理のもとでは、代替案間の選好順序づけと各代替案に対する分布関数間の選好順序づけとは同値な関係である。したがって、本節ならびに 4 節においては、代替案間の選好順序づけを考察する代わりに分布関数間の選好順序づけを考察する。

効用関数に対する部分的情報の拠り所とされる効用関数族をつぎのように定義する。

【定義 1】

効用関数 $u(x)$ の 1 次、2 次、3 次導関数をそれぞれ u', u'', u''' とすると、

$$\mathcal{U}_1 = \{u | u \in C^1, u' > 0\},$$

$$\mathcal{U}_2 = \{u | u \in C^2, u \in \mathcal{U}_1, u'' \leq 0\},$$

$$\mathcal{U}_3 = \{u | u \in C^3, u \in \mathcal{U}_2, u''' \geq 0\}.$$

これらの効用関数族は意思決定者の選好態度にとって重要な関数族である。 $\mathcal{U}_1$ は明らかに意思決定者が

属性レベルに対して単調増大な効用を有していることを表わす関数族であり、 $\mathcal{U}_2$ は単調増大な効用を有し、かつリスク回避的であるための必要十分条件となる関数族であることが知られている⁶⁾。また、 $\mathcal{U}_3$ は単調増大な効用を有し、かつ減少型リスク回避的であるための必要十分条件となる関数族であることも知られている²⁾。これらの効用関数族のもとで、SD はつぎのように定式化される。

【定義 2】

ある $i=1, 2, 3$ に対して、

$$E[u, F] \geq E[u, G] \quad \text{for } \forall u \in \mathcal{U}_i$$

であるならば、 i 次確率優位 (i -th degree SD) の意味で分布 F は分布 G より優位であるといい、 $F \succeq_i G$ と表わす。

定義 2 の定式化のもとで、SD に対する条件 (SD 則) がつぎのように得られている。

《定理 1》

(a) $F \succeq_1 G$ が成り立つのは

$$G(x) \geq F(x) \quad \text{for } \forall x \in [a, b]$$

であるとき、かつそのときに限る。

(b) $F \succeq_2 G$ が成り立つのは

$$\int_a^x G(t) dt \geq \int_a^x F(t) dt \quad \text{for } \forall x \in [a, b]$$

であるとき、かつそのときに限る。

(c) $F \succeq_3 G$ が成り立つのは

$$\int_a^x \int_a^y G(t) dt dy \geq \int_a^x \int_a^y F(t) dt dy \quad \text{for } \forall x \in [a, b]$$

であり、 $\mu_F \geq \mu_G$ であるとき、かつそのときに限る。ここに、 $\mu_{(\cdot)}$ は分布 $(\cdot)$ に関する平均値 $E[x, (\cdot)]$ を表わす。

(証明)

(a), (b) に関しては参考文献 1), 3) を、(c) に関しては参考文献 2), 3) を参照。 (証明終)

定理 1 の (a), (b) および (c) の関係をそれぞれ FSD 則 (First-degree SD Rule), SSD 則 (Second-degree SD Rule) および TSD 則 (Third-degree SD Rule) と呼ぶ。

3. 統計的優越構造

本節においては、決定における考察範囲が互いに排反な n 個の自然の状態 $N_k, k \in K = \{1, 2, \dots, n\}$ に分割できるが、各自然の状態 N_k の生起確率 $P_k, k \in K$ は不完全情報しか得られないという情況の決定問題を考察する。

自然の状態 N_k が生起したときに、代替案 $A \in \mathcal{A}$ または $B \in \mathcal{A}$ を選択していた意思決定者が得る効

(注 1) これらの端点が無限大の開区間、または一方の端点が無限大の半開区間であってもよい。

用(注 2) を U_k^A または U_k^B , $k \in K$, とすると, 代替案 A および B に関する期待効用 $E[A]$ および $E[B]$ は

$$E[A] = \sum_{k=1}^n P_k U_k^A, \quad E[B] = \sum_{k=1}^n P_k U_k^B$$

で与えられる。ここで, 自然の状態の生起確率 P_k に関して完全な情報は得られないが, 部分的情報として

$$H_k \geq \frac{P_k}{P_{k+1}} \geq L_k \quad \text{for } k=1, 2, \dots, n-1 \quad (1)$$

のような最大生起比 H_k および最小生起比 L_k が得られるものとする。ただし, H_k および L_k は非負の定数である。 $H_k = \infty$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) とおいた場合は, 最大生起比に関する情報が得られていないことを意味し, $L_k = 0$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) とおいた場合は, 最小生起比に関する情報が得られていないことを意味する。Fishburn ら^{4), 5)} は $P_k - P_{k+1} \geq 0$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) の状況を考察対象としており, この状況は $H_k = \infty$, $L_k = 1$ とした(1)式の特別な場合である。

(1)式の生起確率の不完全情報のもとで, 統計的優越構造をつぎのように定式化する。

【定義 3】

最大生起比 H_k および最小生起比 L_k ($k=1, 2, \dots, n-1$) の所与のもとで,

$$E[A] \geq E[B]$$

であるならば, $H=(H_1, H_2, \dots, H_{n-1})$, $L=(L_1, L_2, \dots, L_{n-1})$ での統計優位 (Statistical Dominance) の意味で代替案 A は代替案 B より優位であるといい, $A_H^L \geq B$ [$H=(H_1, H_2, \dots, H_{n-1})$, $L=(L_1, L_2, \dots, L_{n-1})$] と表わす。

定義 3 の定式化のもとで, 統計的優越構造に対する条件がつぎのように得られる。

《定理 2》

所与の最小生起比 L_k ($k=1, 2, \dots, n-1$) に対して,

$$\sum_{i=1}^{j-1} \left(\prod_{k=i}^{j-1} L_k \right) (U_i^A - U_i^B) + (U_j^A - U_j^B) \geq 0 \quad \text{for } \forall j \in K \quad (2)$$

が成り立つならば, $A_H^L \geq B$ [$H=(\infty, \infty, \dots, \infty)$, $L=(L_1, L_2, \dots, L_{n-1})$] である。ただし, $\prod_{k=i}^n L_k = 0$ とする。

(証明)

n 次元ベクトル P, D をそれぞれ $P=(P_1, P_2, \dots, P_n)^T$, $D=(U_1^A - U_1^B, U_2^A - U_2^B, \dots, U_n^A - U_n^B)^T$ とし, 正則な n 次正方行列を M とすると,

$$E[A] - E[B] = P^T D = (M^T P)^T M^{-1} D \quad (3)$$

が成り立つ。ただし, $(\cdot)^T$ は $(\cdot)$ の転置を, $(\cdot)^{-1}$ は $(\cdot)$ の逆行列を表わす。ここで, 正方行列 M を

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -L_1 & 1 & & \\ 0 & -L_2 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -L_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

とおくと,

$$(M^T P)^T = (P_1 - L_1 P_2, P_2 - L_2 P_3, \dots, P_{n-1} - L_{n-1} P_n, P_n)$$

となる。最小生起比 L_k の定義, (1)式, および生起確率の条件, $1 \geq P_n \geq 0$, により, ベクトル $M^T P$ の成分はすべて非負である。したがって, ベクトル $M^{-1} D$ の成分がすべて非負, すなわち(2)式が成り立つならば, (3)式より

$$E[A] - E[B] \geq 0$$

が成り立つ。

(証明終)

最小生起比を $L_k = 1$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) とおくと,

(2)式は

$$\sum_{i=1}^j (U_i^A - U_i^B) \geq 0 \quad \text{for } \forall j \in K \quad (5)$$

となる。この(5)式は Fishburn の定式化に対し, 彼が Abel の恒等式を用いて導出した条件^{4), 5)}である。

【系 1】

所与の最大生起比 H_k ($k=1, 2, \dots, n-1$) に対して,

$$(U_j^A - U_j^B) + \sum_{i=j+1}^n \left(\prod_{k=j}^{i-1} \frac{1}{H_k} \right) (U_i^A - U_i^B) \geq 0 \quad \text{for } \forall j \in K \quad (6)$$

が成り立つならば, $A_H^L \geq B$ [$H=(H_1, H_2, \dots, H_{n-1})$, $L=(0, 0, \dots, 0)$] である。ただし, $\prod_{k=i}^n (1/H_k) = 0$ とする。

(証明)

(4)式の n 次正方行列 M を

$$M' = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{H_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{H_2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 - \frac{1}{H_{n-1}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

に置換え, 最大生起比 H_k が非負の定数であることを用いることにより, 定理 2 の証明と同様な議論によって系 1 が成り立つ。

(証明終)

(注 2) 本論文では, 期待効用最大化の規範に基づいているため効用としているが, 本節の理論は統計的決定理論での期待利得最大化の規範に対しても同様に成り立つ。

4. S-S 優越構造

本節では、効用関数ならびに確率分布が共に部分的情報のみしか得られないという状況下での意思決定支援手法として、SD と統計的優越構造を結合させた S-S 優越構造を定式化し、考察する。

決定における考察範囲が互いに排反な n 個の自然の状態 N_k , $k \in K$, に分割され、各自然の状態 N_k の生起確率を P_k とする。さらに、代替案 $A \in \mathcal{A}$ および $B \in \mathcal{A}$ により付与される考察範囲全体に対する確率分布をそれぞれ F および G とし、自然の状態 N_k に対する条件つき確率分布をそれぞれ F_k および G_k とすると、

$$F = \sum_{k=1}^n P_k F_k, \quad G = \sum_{k=1}^n P_k G_k \quad (8)$$

となる。したがって、Von Neumann—Morgenstern の意味での効用関数を $u(x)$ とすると、代替案 A の期待効用 $E[A]$ は

$$E[A] = E[u, F] \\ = E[u, \sum_{k=1}^n P_k F_k] \quad (9)$$

で与えられる。代替案 B の期待効用 $E[B]$ も同様な形で与えられる。S-S 優越構造の意思決定状況として、(a) 各自然の状態に対する条件つき確率分布 F_k, G_k は完全情報として得られるが、自然の状態の生起確率 P_k は完全情報としては得られず、(1)式で定義される最大生起比 H_k または最小生起比 L_k という部分的情報のみが得られる、(b) 効用関数に関しても完全情報は得られず、意思決定者のリスクに対する選好態度、すなわち、定義1のどの効用関数族に属しているかという部分的情報のみが得られるものとする。このような意思決定状況は実際多くの不確実性下の意思決定問題に見受けられる状況である。たとえば、将来の経済活動または生産活動に対する意思決定問題において、考察範囲全体が景気動向などによっていくつかの自然の状態に分割され、各自然の状態に対する過去の実績と将来の景気動向などに対する予測に基づいて、将来の確率分布が決定される。したがって、過去の実績に関する情報は完全情報として得られるが、将来の予測に関しては多分に主観的要素が入り、完全情報として得がたい。

上記 (a), (b) の意思決定状況のもとで、S-S 優越構造をつぎのように定式化する。

【定義 4】

最大生起比 H_k および最小生起比 L_k ($k=1, 2, \dots, n-1$) の所与のもとで、ある $i=1, 2, 3$ に対して

$$E[u, F] \geq E[u, G] \quad \text{for } \forall u \in \mathcal{U}; \quad (10)$$

であるならば、 $H=(H_1, H_2, \dots, H_{n-1}), L=(L_1, L_2, \dots, L_{n-1})$ での i 次 S-S 優位 (i -th degree S-S Dominance) の意味で、分布 F は分布 G より優位であるといい、 $F_L^H \geq_i G$ [$H=(H_1, H_2, \dots, H_{n-1}), L=(L_1, L_2, \dots, L_{n-1})$] と表わす。

定義4の定式化のもとで、定理1および定理2を用いることにより、S-S 優越構造に対する条件がつぎのように得られる。

《定理 3》

所与の最小生起比 L_k ($k=1, 2, \dots, n-1$) に対して、

$$(a) \quad \sum_{l=1}^{j-1} \left(\prod_{k=l}^{j-1} L_k \right) \{G_l(x) - F_l(x)\} \\ + \{G_j(x) - F_j(x)\} \geq 0 \\ \text{for } \forall x \in [a, b], \forall j \in K$$

が成り立つならば、 $F_L^H \geq_1 G$ [$H=(\infty, \dots, \infty), L=(L_1, L_2, \dots, L_{n-1})$] である。

$$(b) \quad \sum_{l=1}^{j-1} \left(\prod_{k=l}^{j-1} L_k \right) \int_a^x \{G_l(t) - F_l(t)\} dt \\ + \int_a^x \{G_j(t) - F_j(t)\} dt \geq 0 \\ \text{for } \forall x \in [a, b], \forall j \in K$$

が成り立つならば、 $F_L^H \geq_2 G$ [$H=(\infty, \dots, \infty), L=(L_1, L_2, \dots, L_{n-1})$] である。

$$(c) \quad \sum_{l=1}^{j-1} \left(\prod_{k=l}^{j-1} L_k \right) \int_a^x \int_a^y \{G_l(t) - F_l(t)\} dt dy \\ + \int_a^x \int_a^y \{G_j(t) - F_j(t)\} dt dy \geq 0 \\ \text{for } \forall x \in [a, b], \forall j \in K$$

が成り立ち、かつ

$$\sum_{l=1}^{j-1} \left(\prod_{k=l}^{j-1} L_k \right) \{\mu_{F_l} - \mu_{G_l}\} + \{\mu_{F_j} - \mu_{G_j}\} \geq 0 \\ \text{for } \forall j \in K$$

が成り立つならば、 $F_L^H \geq_3 G$ [$H=(\infty, \dots, \infty), L=(L_1, L_2, \dots, L_{n-1})$] である。ただし、 $\mu_{(\cdot)} = E[x, (\cdot)]$ であり、 $\prod_{k=i}^n L_k = 0$ とする。

(証明)

まず、(a) について証明する。定理1 (a) および (8) 式より、 $F_L^H \geq_1 G$ [$H=(\infty, \dots, \infty), L=(L_1, L_2, \dots, L_{n-1})$] が成り立つための必要十分条件は

$$\sum_{k=1}^n P_k G_k(x) \geq \sum_{k=1}^n P_k F_k(x) \quad \text{for } \forall x \in [a, b] \quad (11)$$

である。ここで、ベクトル P および関数ベクトル $R(x)$ をそれぞれ $P=(P_1, P_2, \dots, P_n)$ および

$$R(x) = [G_1(x) - F_1(x), G_2(x) - F_2(x), \dots, G_n(x) - F_n(x)]^T$$

と置くと、(11)式は

$$P^T R(x) \geq 0 \quad \text{for } \forall x \in [a, b] \quad (12)$$

となる。したがって、(4)式の正則な n 次正方行列 M を用いて、定理 2 と同様に議論することにより、定理 3 (a) の条件が成り立つならば、式 (12) が成り立つ。

定理 3 (b) に対しては、定理 1 (b) および (8) 式より、 $F_H^y \geq_2 G [H=(\infty, \dots, \infty), L=(L_1, L_2, \dots, L_{n-1})]$ が成り立つための必要十分条件は

$$\sum_{k=1}^n P_k \int_a^x \{G_k(t) - F_k(t)\} dt \geq 0 \quad \text{for } \forall x \in [a, b]$$

であるから、関数ベクトル $R(x)$ を

$$R(x) = \left[\int_a^x \{G_1(t) - F_1(t)\} dt, \int_a^x \{G_2(t) - F_2(t)\} dt, \dots, \int_a^x \{G_n(t) - F_n(t)\} dt \right]^T$$

とおくことにより、(a) と同様に証明される。

定理 3 (c) に対しては、定理 1 (c) および (8) 式より、 $F_H^y \geq_3 G [H=(\infty, \dots, \infty), L=(L_1, L_2, \dots, L_{n-1})]$ が成り立つための必要十分条件は

$$\sum_{k=1}^n P_k \int_a^x \int_a^y \{G_k(t) - F_k(t)\} dt dy \geq 0 \quad \text{for } \forall x \in [a, b]$$

かつ

$$\sum_{k=1}^n P_k \{\mu_{Fk} - \mu_{Gk}\} \geq 0$$

であるから、関数ベクトル $R_1(x)$ および平均値ベクトル R_2 をそれぞれ

$$R_1(x) = \left[\int_a^x \int_a^y \{G_1(t) - F_1(t)\} dt dy, \int_a^x \int_a^y \{G_2(t) - F_2(t)\} dt dy, \dots, \int_a^x \int_a^y \{G_n(t) - F_n(t)\} dt dy \right]^T$$

および

$$R_2 = [\mu_{F1} - \mu_{G1}, \mu_{F2} - \mu_{G2}, \dots, \mu_{Fn} - \mu_{Gn}]^T$$

とおき、 $R_1(x)$ および R_2 のそれぞれに対して、(a) と同様に議論することにより成り立つ。(証明終)

[系 2]

所与の最大生起比 H_k ($k=1, 2, \dots, n-1$) に対して

$$(a) \quad \{G_j(x) - F_j(x)\} + \sum_{l=j+1}^n \left(\prod_{k=j}^{l-1} \frac{1}{H_k} \right) \{G_l(x) - F_l(x)\} \geq 0 \quad \text{for } \forall x \in [a, b], \forall j \in K$$

が成り立つならば、 $F_H^y \geq_1 G [H=(H_1, H_2, \dots, H_{n-1}), L=(0, \dots, 0)]$ である。

$$(b) \quad \int_a^x \{G_j(t) - F_j(t)\} dt + \sum_{l=j+1}^n \left(\prod_{k=j}^{l-1} \frac{1}{H_k} \right) \int_a^x \{G_l(t) - F_l(t)\} dt \geq 0$$

$$\text{for } \forall x \in [a, b], \forall j \in K$$

が成り立つならば、 $F_H^y \geq_2 G [H=(H_1, H_2, \dots, H_{n-1}), L=(0, \dots, 0)]$ である。

$$(c) \quad \int_a^x \int_a^y \{G_j(t) - F_j(t)\} dt dy + \sum_{l=j+1}^n \left(\prod_{k=j}^{l-1} \frac{1}{H_k} \right) \int_a^x \int_a^y \{G_l(t) - F_l(t)\} dt dy \geq 0 \quad \text{for } \forall x \in [a, b], \forall j \in K$$

が成り立ち、かつ

$$\{\mu_{Fj} - \mu_{Gj}\} + \sum_{l=j+1}^n \left(\prod_{k=j}^{l-1} \frac{1}{H_k} \right) \{\mu_{Fl} - \mu_{Gl}\} \geq 0 \quad \text{for } \forall j \in K$$

が成り立つならば、 $F_H^y \geq_3 G [H=(H_1, H_2, \dots, H_{n-1}), L=(0, \dots, 0)]$ である。

(証明)

定理 3 の証明において、(4)式の n 次正方行列 M を用いる代りに (7) 式の M' を用いると、まったく同様に証明される。(証明終)

SD の場合にならって、定理 3 の (a), (b), (c) または系 2 の (a), (b), (c) の関係をそれぞれ 1 次 S-S 優位則 (First-degree S-S Dominance Rule), 2 次 S-S 優位則 (Second-degree S-S Dominance Rule) および 3 次 S-S 優位則 (Third-degree S-S Dominance Rule) と呼ぶことにする。

5. 適用例

本論文で提案した S-S 優越構造の意思決定支援手法としての有効性を検証するために、定理 3 および系 2 の S-S 優位則を株式投資銘柄決定問題に適用する。また、S-S 優位則と比較するために、定理 1 の SD 則も同一問題に適用する。

一部上場銘柄の中から無作為に抽出した 115 社を株式投資対象とする。各銘柄の T 年における年間収益率 R_T を

$$R_T = \frac{(S_T - S_{T-1}) + D_T}{S_{T-1}} \quad (13)$$

とし、この年間収益率を評価属性とする。ただし、 S_T および D_T はそれぞれ T 年における株価終値および配当金を表す。したがって、この年間収益率 R_T は $(T-1)$ 年の終値で株を購入し、 T 年の終値でその株を売却したときの単位価格当りの総収益を表わしている。

株式投資銘柄決定問題としてつぎのような決定状況を考える。過去 (1969 年～1980 年) の株価データによる年間収益率を基礎データとして、次期 (1981 年) の年間収益率に関する確率分布を予測し、その確率分布

Table 1 States of nature for each year

Year	1969	1970	1971	1972	1973	1974
State of Nature	N_1	N_2	N_1	N_1	N_2	N_2
Year	1975	1976	1977	1978	1979	1980
State of Nature	N_1	N_1	N_2	N_1	N_2	N_1

による期待効用が最大となる銘柄を選定する。ここで、SD 則に対しては、ポートフォリオ選択論⁷⁾にしたがって、次期の確率分布は過去の年間収益率の一樣分布で近似できるものと仮定する。一方、S-S 優位則に対しては、考察範囲を東証株価指数の増加および非増加の二つの自然の状態に分割し、各自然の状態における次期の条件つき確率分布は過去のそれらの状態における年間収益率の一樣分布で近似できるが、各自然の状態に対する次期の生起確率は未知であるとする。自然の状態 N_j ($j=1, 2$) に属する年数を Y_j とすると、SD 則に対する決定状況は、S-S 優位則に対する決定状況において、各自然の状態の生起確率をそれぞれ $P_1=Y_1/(Y_1+Y_2)$, $P_2=Y_2/(Y_1+Y_2)$, すなわち生起比を $H_1=L_1=Y_1/Y_2$ とおいた特別な決定状況であり、次期の動向に対する考慮はまったくなされていない状況となる。

東証株価指数の増加を自然の状態 N_1 とし、非増加を N_2 とすると、1969 年～1980 年の各年における自然の状態は **Table 1** のようになっている。 $Y_1=7$, $Y_2=5$ である。自然の状態 N_i ($i=1, 2$) に属する年の年間収益率を小さい値順に並べかえた年間収益率を x_i^j ($i=1, 2, j=1, 2, \dots, Y_i$) とすると、各自然の状態に対する分布関数 $F_i(x_i^j)$ は

$$F_i(x_i^j) = \sum_{l=1}^j f_i(x_l) \quad \text{for } i=1, 2, j=1, 2, \dots, Y_i \quad (14a)$$

ここに、

$$f_i(x_l) = \begin{cases} \frac{1}{Y_i} & \text{for } x_l = x_i^j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (14b)$$

で与えられる。投資対象 115 銘柄に対して、(14)式で

Table 3 Efficient alternatives (company numbers)

Company Number	Ratios of Occurrence						
	H_1	0.01	0.1	1	∞	∞	∞
	L_1	0	0	0	1	10	100
3	—	—	S	S, T	S	S	
15	S, T	S, T	S, T	—	—	—	
16	S, T	S, T	S, T	S	—	—	
17	—	—	—	S, T	S, T	S, T	
23	—	—	—	S, T	S, T	S	
26	S	S	S, T	S, T	—	—	
27*	—	—	S	S, T	S, T	S, T	
29	—	—	—	S, T	S, T	S, T	
38	S, T	S, T	S, T	S	—	—	
39	S	S	S, T	S, T	—	—	
47	—	—	—	S, T	S, T	S, T	
48*	S	S	S, T	S, T	—	—	
50	—	—	—	S, T	S, T	S, T	
52*	—	—	S, T	S, T	S, T	S, T	
55*	—	—	S, T	S	S	S	
61*	—	—	S, T	S, T	S, T	S, T	
62	—	—	—	S, T	S, T	S, T	
69	—	—	—	S, T	S, T	S, T	
77	—	—	—	S, T	S, T	S, T	
79*	S, T	S, T	S, T	S, T	S, T	S, T	S, T

S: Efficient alternative in the sense of Second-degree S-S Dominance

T: Efficient alternative in the sense of Third-degree S-S Dominance

*: Efficient alternative in the sense of TSD

—: Alternative dominated by others

付与される各分布関数を定理 3 または系 2 の S-S 優位則を適用すると、種々の最大生起比 H_1 および最小生起比 L_1 において、他の銘柄によって優越されない効率的代替案の数は **Table 2** のようになった。ただし、括弧内は 115 銘柄からの縮小率を表わす。SD 則による効率的代替案の数も **Table 2** の最後の列に示されている。また、2 次 S-S 優位則、3 次 S-S 優位則および TSD 則による効率的な銘柄番号の一部が **Table 3** に示されている。ここで、自然の状態の生起確率は次期に対する予測にすぎず、不確定なものであるから、「すべての最大または最小生起比に対して効

Table 2 Efficient sets by first, second, third-degree S-S dominance rules and SD rules

Ratios of Occurrence	H_1	0.01	0.1	1	∞	∞	∞	SD
	L_1	0	0	0	1	10	100	
First Degree	Size (%)	57 (49.6)	57 (49.6)	92 (80.0)	109 (94.8)	93 (80.9)	93 (80.9)	86 (74.8)
Second Degree	Size (%)	7 (6.1)	7 (6.1)	15 (13.0)	49 (42.6)	39 (33.9)	37 (32.2)	12 (10.4)
Third Degree	Size (%)	4 (3.5)	4 (3.5)	12 (10.4)	22 (19.1)	16 (13.9)	15 (13.0)	6 (5.2)

率的な銘柄であることが望ましい」という規範を付加することは、妥当であると思われる。この規範を付加すると、Table 3 より、2 次および 3 次 S-S 優位則、すなわち、リスク回避の意思決定者の選択すべき銘柄は、銘柄番号 79 の唯一つの銘柄に絞ることができる。このように、効用関数ならびに確率分布の不完全情報に基づく意思決定支援手法として、S-S 優越構造の接近法が有効であることがわかった。

6. 結 言

期待効用最大化の規範に基づく現実の意思決定問題において、効用関数の同定ならびに各代替案の確率分布の付与は共に困難な課題である。したがって、決定における考察範囲を互いに排反な自然の状態に分割することによって、各代替案の確率分布を主観確率の部分と客観確率の部分とに分け、主観確率に対する閾値と意思決定者の選好態度（効用関数の部分的情報）に基づき、客観確率の構造比較によって代替案の選好順序づけを行う S-S 優越構造の接近法は、実際の意思決定問題に適用可能な意思決定支援手法である。しかし、あくまで部分的情報に基づいている限り、最良の一つの代替案を選定できるとは限らず、構造上、他の代替案によって優越されない効率的な複数の代替案が選定される。このことは、他の不完全情報に基づく優越構造の場合も同様であるが、意思決定者が直接選好判断をくださなければならない代替案の数を減少させ、後の意思決定をより容易にするという意味での第 1 段階の意思決定支援手法として特に有効となる。S-S 優越構造では、確率的優越構造と異なり、確率分布を主観もしくは予測の確率と客観確率とに分離して考察するため、構造比較に用いる（自然の状態における）条件つき確率分布は容易に付与される。同時に、

株式投資銘柄決定問題の適用例に見られるように、主観確率に対する妥当な副次的規範を付加することができ、そのような規範を付加することにより、リスク回避の選好態度に基づき、115 銘柄の中から最良の 1 銘柄を選定することが可能となる。したがって、S-S 優越構造は少なくとも確率的優越構造より実用的で有効な意思決定支援手法であることがわかる。S-S 優越構造を幅広い意思決定問題に適用可能な意思決定支援手法とするためには、意思決定者の他の選好態度（リスク志向、増加型リスク回避など）および多属性問題などに対する S-S 優位則を今後開発する必要がある。

最後に、有益なご討議、ご助言をいただいた甲南大学 中山弘隆助教授に、また有益なご指摘をいただきました校閲者の方々に深く謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) J. Hadar and W. R. Russel: Stochastic Dominance and Diversification, *J. Economic Theory*, **3**-3, 288/305 (1971)
- 2) G. A. Whitmore: Third-Degree Stochastic Dominance, *The American Economic Review*, **60**-3, 457/459 (1970)
- 3) P. C. Fishburn and R. G. Vickson: Theoretical Foundations of Stochastic Dominance, in *Stochastic Dominance: An Approach to Decision Making under Risk*, Edited by G. A. Whitmore and M. C. Findlay, 37/113, Heath (1978)
- 4) P. C. Fishburn: *Decision and Value Theory*, 44/47, John Wiley (1964)
- 5) Z. W. Kmietowicz and A. D. Pearman: Decision Theory and Weak Statistical Dominance, *J. Operational Research Society*, **30**-11, 1019/1022 (1979)
- 6) 中山: 多属性効用理論, 多目的決定の理論と方法 (市川編) 56/60 計測自動制御学会 (1980)
- 7) R. B. Porter: Portfolio Applications: Empirical Studies, in *Stochastic Dominance: An Approach to Decision Making under Risk*, Edited by G. A. Whitmore and M. C. Findlay, 115/161, Heath (1978)