計測自動制御学会論文集
Vol.45, No.4, 208/214（2009）

2乗和多項式に基づくクレーンのゲインスケジュールド制御

青　木　卓　也*・高　見　　勲*・大　石　泰　章*

Gain-scheduled Control of a Crane Using the Sum-of-squares Technique

Takuya Aoki*, Isao Takami* and Yasuaki Oishi*

This paper discusses nonconservative design of a gain-scheduled controller for a crane, whose dynamics has nonlinear dependence on uncertain parameters. In particular, the design problem is formulated into a robust semidefinite programming problem and is solved through a sum-of-squares approach. Since the sum-of-squares approach is asymptotically exact, a nonconservative design is possible. Although this approach has a theoretical drawback that computational complexity grows up as the conservatism is reduced, it works practically well to the present problem. The efficacy of the designed controller is shown by simulation and also by a laboratory experiment.

Key Words: sum-of-squares polynomials, linear matrix inequalities, gain-scheduled control, H^∞ control, robust semidefinite programming

1. はじめに

クレーンは吊り荷の運搬を行なうための機械であり，工場や建設現場などで広く利用されている．クレーンの型にはいくつかの種類があり，それぞれに対してモデリングや制御に関する研究がなされている[1)~7)]．特に，クレーンは吊り荷の運搬時にワイヤの長さやブーム角といった変動するパラメータを含む非線形システムであるため，ゲインスケジュールド制御 (GS 制御) が有効である[4),5)]．

GS 制御器の設計には，制御対象を線形パラメータ変動モデルで表わす方法が広く使われている[8),9)]．しかし，制御対象のダイナミクスがパラメータに非線形に依存する場合や，パラメータ依存 Lyapunov 関数を使う場合は，パラメータに対して非線形に依存する線形行列不等式を解かねばならないという問題があった．これに対する解決法として，パラメータを変換して依存性をアフィンにする方法[10),11)]やサンプルした有限個のパラメータ値だけを考えて設計する方法[12),13)]などが試みられてきたが，前者は設計結果が保守的になり，後者はサンプルしなかったパラメータ値に対して性能が保障されないという問題がある．

近年，パラメータに非線形に依存する線形行列不等式を解いて，比較的保守的でない設計を行なう方法が相次いで開発された[14)~23)]．特に 2 乗和多項式を使う方法[18)~23)]は，保守的な程度をいくらでも小さくできるという漸近的厳密性をもち，注目を集めている．しかし 2 乗和多項式を使う方法は，保守的な程度を小さくするにつれて計算量が大きくなるという理論的問題があり，具体的な制御問題においてどの程度実用的であるかよくわかっていない．

本論文の目的は，パラメータに非線形に依存する制御対象であるクレーンに対して，2 乗和多項式を使って GS 制御器の設計を行ない，その実用性を評価することである．その結果，今回扱った問題に対しては実用的な計算量の範囲で十分良い設計結果が得られることがわかった．設計した制御器の良さはシミュレーションおよび実験室における実験によって確認した．

本稿の構成は以下のとおりである．まず，2 章では本研究で扱ったクレーンのモデルについての説明を行ない，GS 制御器設計問題をロバスト半正定値計画問題に帰着させる．3 章では 2 乗和多項式によるロバスト半正定値計画問題の近似解法について述べる．4，5 章ではクレーンに対して設計結果を示し，次数の増加による最適解の変化と計算時間のトレードオフについて述べる．6，7 章ではシミュレーションおよび実験の結果を示し，適用方法の有効性を検証する．8 章でまとめと今後の課題について述べる．

本論文で使用される記号は以下のとおりである．$\otimes$ は Kronecker 積を表わす．$\lceil a \rceil$ は a 以上の整数のうち最小のものを表わす．正方行列 M に対して $\mathrm{He}[M] = M + M^T$ とする．対称行列を以下のように記述する．

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ * & M_{22} \end{bmatrix} \left(= \begin{bmatrix} M_{11} & * \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} \right)$$

* 南山大学大学院数理情報研究科　瀬戸市せいれい町 27
* Graduate School of Information Systems and Mathematical Sciences, Nanzan University, Seireicho 27, Seto
（Received December 19, 2008）
（Revised April 6, 2009）

2. クレーンに対する GS 制御器の設計問題

本研究で扱うクレーンはワイヤの巻上げ，滑車による並進運動，タワーアームの旋回の 3 動作によって 3 次元空間内の任意の位置へ吊り荷の運搬ができるものである．クレーンは，吊り荷を運搬する際にワイヤの長さや滑車の位置が変動することにより，制御対象の動特性が変化する非線形系である．本研究ではワイヤの長さと滑車の位置はセンサによって計測し，その情報を利用する GS 制御器を設計する．

2.1 モデリング

本研究ではワイヤの巻き上げ，滑車の運動については他の制御器によって制御するとし，タワーアームの旋回による吊り荷の運動を考える．このような分散制御の妥当性は文献 7) で論じられている．クレーン本体を剛体，吊り荷を質量 m_p の質点として考え，ワイヤ下端のフックおよびワイヤの重量を無視するとし，クレーンのモデル化を行なった．クレーンの形状を **Fig. 1** に示し，上方から見たものを **Fig. 2** に示す．モデル化に用いた記号を以下のように定義する．

ϕ：タワーアームの旋回角度 (反時計回りを正)[rad]
α：吊り荷の振れ角（鉛直方向から時計回りを正）[rad]
β：$x-y$ 平面に射影したタワーアームと吊り荷の成す角 [rad]
l_p：ワイヤの長さ [m]
l_j：タワーアームの軸から滑車の重心までの距離 [m]
m_p：吊り荷の質量　0.87[kg]
τ_t：タワーモータのトルク定数　0.75[N · m/A]
J_ϕ：タワーモータの慣性モーメント　0.88[kg · m^2]

Fig. 1，2 において α が微小とすると，x 軸からの吊り荷の旋回角度 $\phi-\beta$ は

$$\phi-\beta=\phi-\tan^{-1}\frac{l_p\sin\alpha}{l_j}$$
$$\approx\phi-\frac{l_p}{l_j}\alpha \qquad (1)$$

となる．状態変数を $x_p=\begin{bmatrix}\phi(t) & \alpha(t) & \dot\phi(t) & \dot\alpha(t)\end{bmatrix}^T$，出力 y を x 軸からの吊り荷の旋回角度，入力 u をタワーモータへの入力電流 [A] とする．ワイヤの長さ l_p とタワーアームの軸から滑車の重心までの距離 l_j をそれぞれスケジューリングパラメータ θ_1,θ_2 とし，θ_1 は 0.3m〜0.86m，θ_2 は 0.1m〜0.75m の領域の値をとると仮定すると，有界閉集合 Θ は

$$\Theta=\{\theta\in\mathbb{R}^2 \mid 0.3\le\theta_1\le0.86, 0.1\le\theta_2\le0.75\} \qquad (2)$$

となる．

クレーンシステムの状態空間表現を求めると以下の式になる．

$$\dot{x_p}=A_p(\theta)x_p+B_p(\theta)u \qquad (3)$$
$$y=C_p(\theta)x_p \qquad (4)$$

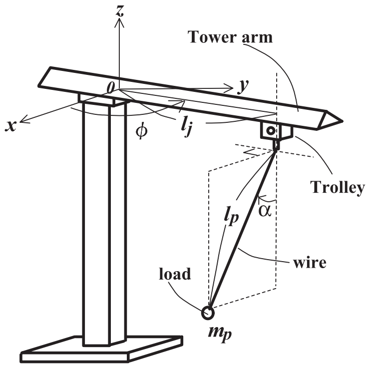

Fig. 1　The crane to be considered

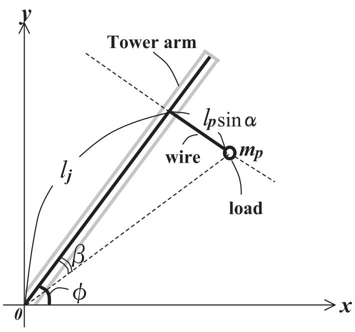

Fig. 2　Top view of the crane

ただし，

$$A_p(\theta)=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&\dfrac{m_pg\theta_2}{J_\phi}&0&0\\0&-\dfrac{g(m_p\theta_2^2+J_\phi)}{J_\phi\theta_1}&0&0\end{bmatrix} B_p(\theta)=\begin{bmatrix}0\\0\\\dfrac{\tau_t}{J_\phi}\\\dfrac{\tau_t\theta_2}{J_\phi\theta_1}\end{bmatrix} \qquad (5)$$

$$C_p(\theta)=\begin{bmatrix}1&-\dfrac{\theta_1}{\theta_2}&0&0\end{bmatrix} \qquad (6)$$

(5)，(6) 式より，$A_p(\theta)$,$B_p(\theta)$,$C_p(\theta)$ にパラメータ θ_1，θ_2 に関する非線形な要素が存在することに注意する．

2.2 一般化制御対象の構成

2.1 節でモデル化した制御対象を $P(\theta)$ として，**Fig. 3** の制御系を考える．ここでは目標値信号 w に追従させるために，積分器を含ませたサーボ問題として考える．一般化制御対象 Σ は次式となる．

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{x}_\Sigma=A_\Sigma(\theta)x_\Sigma+B_{1\Sigma}(\theta)w+B_{2\Sigma}(\theta)u\\ z=C_{1\Sigma}(\theta)x_\Sigma\end{cases} \qquad (7)$$

$$\begin{bmatrix}A_\Sigma(\theta) & B_{1\Sigma}(\theta) & B_{2\Sigma}(\theta)\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c|c}A_p(\theta)&0&0&B_p(\theta)\\-C_p(\theta)&0&1&0\end{array}\right]$$

$$C_{1\Sigma}(\theta)=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix} \qquad x_\Sigma=\begin{bmatrix}x_p & x_s\end{bmatrix}^T$$

2.3 GS 制御系設計

本研究では状態フィードバック制御器

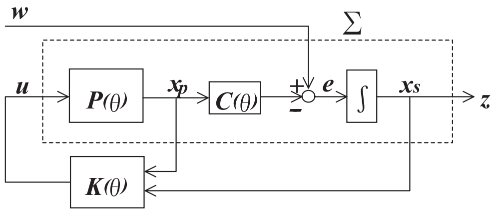

Fig. 3 Control system

$$K : u = -K(\theta)x_\Sigma \tag{8}$$

を設計することを考える．$K(\theta)$ は θ に依存するので GS 制御器となる．本節ではスケジューリングパラメータ θ は時間に対して変化しないものとする．変化する場合は 5 章で扱う．

(7) 式に示した一般化制御対象 Σ に対して任意の $\theta \in \Theta$ に関して

[H$^\infty$ 制御仕様] $\|z\|_{L_2} \leq \nu\|w\|_{L_2} \quad (\forall w \in L_2)$

を満足する制御器を設計する．このような ν の最大値は, (9) 式の半正定値計画問題を解くことで求められる．ただし $X(\theta)$ は正定な対称行列である．

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad \nu\\&\text{subject to}\\&\begin{bmatrix}\mathrm{He}[-A_\Sigma(\theta)X(\theta)+B_{2\Sigma}(\theta)Z(\theta)] & -B_{1\Sigma}(\theta) & *\\ * & \nu I & *\\ -C_{1\Sigma}(\theta)X(\theta) & 0 & \nu I\end{bmatrix} \succeq O\\&\qquad (\forall\theta\in\Theta)\end{aligned} \tag{9}$$

(5)，(6) 式より $A_p(\theta), B_p(\theta), C_p(\theta)$ は θ_1, θ_2 に関して有理関数であり，多項式でない．よって (9) 式の制約条件の両辺に $\theta_1\theta_2$ をかけて分母をはらう．$\theta_1\theta_2 > 0$ であり，分母をはらっても (9) 式を解くことと等価である．

また，$X(\theta)$, $Z(\theta)$ はある適当な次数の多項式行列にする．もし $X(\theta)$, $Z(\theta)$ が次数 2 の多項式行列ならば,

$$X(\theta) = X_{00}+\theta_1X_{10}+\theta_2X_{01}+\theta_1^2X_{20}+\theta_2^2X_{02}+\theta_1\theta_2X_{11} \tag{10}$$

$$Z(\theta) = Z_{00}+\theta_1Z_{10}+\theta_2Z_{01}+\theta_1^2Z_{20}+\theta_2^2Z_{02}+\theta_1\theta_2Z_{11} \tag{11}$$

であり，有限な次数の関数となる．これより，(9) 式の問題において，最適化の変数はスカラー ν と $X(\theta)$, $Z(\theta)$ の係数行列のうち独立な要素となる．そして，$X(\theta)$, $Z(\theta)$ の係数行列によって GS 制御器 $K(\theta) = Z(\theta)X^{-1}(\theta)$ を設計することができる．このような最適化問題をロバスト半正定値計画問題という．

3. ロバスト半正定値計画問題

3.1 ロバスト半正定値計画問題について

ロバスト半正定値計画問題は一般につぎのように表わされる．

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad c^Tx\\&\text{subject to} \quad F(x,\theta)\succeq O \quad (\forall\theta\in\Theta)\end{aligned} \tag{12}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ は最適化の変数，$c \in \mathbb{R}^n$ は与えられたベクトルである．また θ は領域 $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ 中をとる不確かなパラメータである．$F(x,\theta)$ は $m \times m$ の対称行列であり，x については 1 次関数，θ については非線形の関数である．その次数 $\deg F$ は θ に関する要素の多項式のうちの最大の次数を表わす．

ロバスト半正定値計画問題を解くには制約条件がすべての θ に関して満たされる必要があり，無限本の LMI を解かなくてはならない．そこで，有限本の LMI で解けるような十分条件で制約条件を置き換える．その置き換えに 2 乗和多項式を用いる．$F(x,\theta)$ が θ の多項式であり，領域 Θ が θ の多項式不等式で規定される有界閉集合である場合，2 乗和多項式を用いてロバスト半正定値計画問題を解くことができる．

3.2 2 乗和多項式

2 乗和多項式行列について以下の定義が与えられる．

【定義】 $q \times q$ のある多項式行列 $S(\theta)$ が，別の行列 $T(\theta)$ によって

$$S(\theta) = T(\theta)^T T(\theta) \tag{13}$$

と表わすことができるとき，$S(\theta)$ を 2 乗和多項式行列という．2 乗和多項式行列 $S(\theta)$ の θ に関する次数は偶数であり，$S(\theta)$ の次数が $2d$ であるとき，$T(\theta)$ の次数は d となる．

ここで，$T(\theta)$ を (14) 式のように定義する．

$$T(\theta) = R[u(\theta)\otimes I_m] \tag{14}$$

R はある大きさの係数行列であり，$u(\theta)$ は θ を要素とする次数 d 以下の単項式から構成される行列とする．$S(\theta)$ は $S(\theta) = [u(\theta)\otimes I_m]^T(R^TR)[u(\theta)\otimes I_m]$ を満足するある R が存在するなら $u(\theta)$ に関して 2 乗和多項式である．$Q = R^TR$ とすると，$u(\theta)$ に関して多項式行列 $S(\theta)$ が 2 乗和多項式であるための必要十分条件は

$$S(\theta) = [u(\theta)\otimes I_m]^T Q[u(\theta)\otimes I_m] \tag{15}$$

を満たす正定な対称行列 Q が存在することである．ただし，$S(\theta)$ の次数が大きくなると，行列 Q のサイズも大きくなってしまい計算量が増加してしまう．

多項式行列 $S(\theta)$ が 2 乗和多項式行列であるとき，$S(\theta) \succeq O$ $(\forall\theta\in\Theta)$ となる．よって，$F(x,\theta) \succeq O \quad (\forall\theta\in\mathbb{R}^p)$ の十分条件として $F(x,\theta)$ が 2 乗和多項式であることが使え，有限本の LMI で表わすことができる．ただし，$F(x,\theta)$ が 2 乗和多項式であることは $F(x,\theta) \succeq O \quad (\forall\theta\in\mathbb{R}^p)$ の必要条件ではないので厳密な近似解を求めるには不十分である．しかし $\forall\theta\in\mathbb{R}^p$ ではなく，ある有界閉集合 $\forall\theta\in\Theta$ のときは必要十分条件となる．

3.3 有界閉集合上での半正定値性

領域 Θ が有界閉集合で多項式 $g_1(\theta), g_2(\theta), \ldots, g_l(\theta)$ によって

$$\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^p | g_1(\theta) \geq 0, g_2(\theta) \geq 0, \ldots, g_l(\theta) \geq 0\} \tag{16}$$

と表わせるとし，与えられた多項式行列 $F(x,\theta)$ がある固定した x において，2 乗和多項式行列 $S_0(\theta), S_1(\theta), \ldots, S_l(\theta)$ を使って

$$F(x,\theta) = S_0(\theta) + g_1(\theta)S_1(\theta) + \cdots + g_l(\theta)S_l(\theta) \tag{17}$$

と表わせるとする．$S_1(\theta)$ は 2 乗和多項式行列なので $S_1(\theta) \succeq O$ であり，さらに $g_1 \geq 0$ なので $g_1S_1 \succeq O$ となる．同様に $g_2S_2 \succeq O, \ldots, g_lS_l \succeq O$ であり，また $S_0(\theta) \succeq O$ でもあるので $F(x,\theta) \succeq O$ となる．よってロバスト半正定値計画問題を近似的に解くには (17) 式を満たす $S_0(\theta), S_1(\theta), \ldots, S_l(\theta)$ が存在することを条件にすればよい．$S_0(\theta), S_1(\theta), \ldots, S_l(\theta)$ の次数は事前にはわからないが，緩和次数と呼ばれる整数 r によって決定される．緩和次数 r を $\deg F/2, \deg g_1/2, \deg g_2/2, \ldots, \deg g_l/2$ 以上の整数とし，$S_0(\theta)$ の次数を $2r$，$S_1(\theta)$ の次数を $2(r - \lceil \deg g_1/2 \rceil), \ldots$, $S_l(\theta)$ の次数を $2(r - \lceil \deg g_l/2 \rceil)$ と設定する．緩和次数 r を大きくしていけばロバスト半正定値計画問題は精度よく解くことができる．

4. 設 計 結 果

本章では 3 章で示した設計法を実際にクレーンに対して適用した結果を示す．まず，2.1 節で設定した有界閉集合

$$\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^2 \mid 0.3 \leq \theta_1 \leq 0.86, 0.1 \leq \theta_2 \leq 0.75\} \tag{18}$$

を考えるため，$g_1(\theta) \sim g_4(\theta)$ を

$$g_1(\theta) = \theta_1 - 0.3 \geq 0,\ g_2(\theta) = 0.86 - \theta_1 \geq 0$$
$$g_3(\theta) = \theta_2 - 0.1 \geq 0,\ g_4(\theta) = 0.75 - \theta_2 \geq 0$$

と定める．

つぎに $X(\theta), Z(\theta)$ をある次数の多項式行列とすることで緩和次数 r が決まるので，それによって適当な次数の 2 乗和多項式行列となる $S_0(\theta) \sim S_4(\theta)$ を定める．以上に定めた $g_1(\theta) \sim g_4(\theta)$ と $S_0(\theta) \sim S_4(\theta)$ を用いて，(9) 式の問題は以下のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad \nu \\
&\text{subject to} \\
&\theta_1\theta_2 \begin{bmatrix} \mathrm{He}[-A_\Sigma(\theta)X(\theta) + B_{2\Sigma}(\theta)Z(\theta)] & -B_{1\Sigma}(\theta) & * \\ * & \nu I & * \\ -C_{1\Sigma}(\theta)X(\theta) & 0 & \nu I \end{bmatrix} \\
&\quad = S_0(\theta) + g_1(\theta)S_1(\theta) + g_2(\theta)S_2(\theta) \\
&\qquad + g_3(\theta)S_3(\theta) + g_4(\theta)S_4(\theta)
\end{aligned} \tag{19}$$

以上のロバスト半正定値計画問題の制約条件を満足する 2 乗和多項式行列 $S_0(\theta) \sim S_4(\theta)$ が存在すれば，問題を解くことができる．これらの数値計算にはインタフェースとして YALMIP [24)]，半正定値計画問題を解くには SeDuMi [25)] を用いた．**Table 1** に $X(\theta), Z(\theta)$ の次数，緩和次数 r，$S_1(\theta) \sim S_4(\theta)$ の次数，最適値 ν の値，問題を解くために要した計算時間を示す．数値計算には 1.7GHz の Athlon 64 X2 である CPU と 894MByte のメモリをもつ計算機を使用した．

Table 1　The optimal ν and the computational time for various settings

deg$X$	deg$Z$	r	degS_1〜degS_4	ν	computational time (s)
1	1	2	2	2.400	78
1	1	2	4	2.317	871
2	2	3	4	0.419	872
2	2	3	6	0.419	3651
3	3	4	4	0.419	744
3	3	4	6	0.419	3430

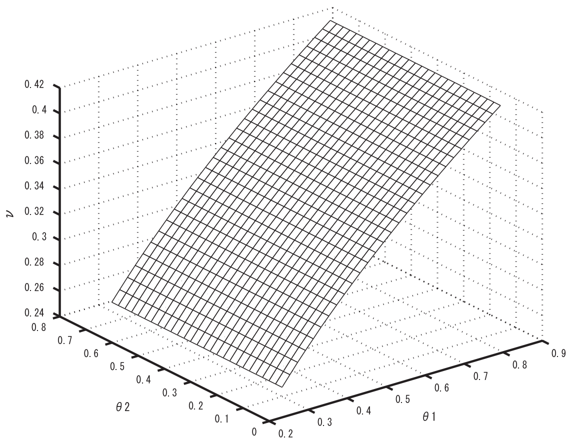

Fig. 4　The minimum H$^\infty$-norm for each values of θ_1 and θ_2

Table 1 より，$X(\theta), Z(\theta)$，$S_1(\theta) \sim S_4(\theta)$ の次数を大きくすることによって最適値 ν の値が小さくなっていく．ただし，それに伴い計算時間も増加する結果となる．$X(\theta), Z(\theta)$ の次数が 2，$S_1(\theta) \sim S_4(\theta)$ の次数が 4 のとき，最適値 ν が 0.419 となっているが，これ以上 $X(\theta), Z(\theta)$，$S_1(\theta) \sim S_4(\theta)$ の次数を大きくしても最適値が小さくならない結果となった．よって，このときの次数で (9) 式のロバスト半正定値計画問題の最適解が得られると考えられる．

ここで，設計結果を評価するためパラメータ集合 Θ を格子に切り，各格子点において H$^\infty$ 設計を行なって最適な H$^\infty$ ノルム ν を求めた．その結果を **Fig. 4** に示す．Fig. 4 より $\theta_1 = 0.86$ のときに，θ_2 の値に関係なく $\nu = 0.419$ となっている．また Table 1 に示されているように，ある次数で求まった最適値 $\nu = 0.419$ と同じであるので，われわれの設計結果が保守的でないことがわかる．

5. パラメータの変化速度を考慮に入れた GS 制御系設計

本章ではパラメータ θ が時間に対して変化するものとし，

その変化速度の上界が得られているものとして GS 制御器を設計する．この場合は (20) 式に示すロバスト半正定値計画問題を解くことに帰着される [12]．

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad \nu\\
&\text{subject to}\\
&\begin{bmatrix}
\mathrm{He}[-A_\Sigma(\theta)X(\theta)+B_{2\Sigma}(\theta)Z(\theta)]-\dot{X}(\theta) & -B_{1\Sigma}(\theta) & * \\
* & \nu I & * \\
-C_{1\Sigma}(\theta)X(\theta) & 0 & \nu I
\end{bmatrix} \succeq O\\
&\qquad (\forall\theta\in\Theta)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

ここで (20) 式の制約条件には $X(\theta)$ の導関数 $\dot{X}(\theta)$ が含まれる．よって (10) 式に示したような次数 2 の場合，$X(\theta)$ を時間微分すると

$$
\begin{aligned}
\dot{X}(\theta) &= \dot{\theta}_1 X_{10} + \dot{\theta}_2 X_{01} + 2\theta_1\dot{\theta}_1 X_{20} + 2\theta_2\dot{\theta}_2 X_{02}\\
&\quad + \dot{\theta}_1\theta_2 X_{11} + \theta_1\dot{\theta}_2 X_{11}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

となり，$\dot{X}(\theta)$ に $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ が含まれる項が存在するようになる．$\dot{\theta}_1$ はワイヤの巻き上げ，巻き下げの速度，$\dot{\theta}_2$ は滑車の移動速度なので，$\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ の変動領域を制限すれば，変化速度を考慮に入れた設計ができることになる．ワイヤの巻き上げ，巻き下げは最大 0.12m/s，滑車は最大 0.15m/s の速さで変動するとし，有界閉集合 Θ に多項式 $g_5(\theta)$～$g_8(\theta)$ を追加する．

$$
\Theta = \{\theta\in\mathbb{R}^4 \mid g_1(\theta)\geq 0,\ldots,g_8(\theta)\geq 0\} \tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_5(\theta) = \dot{\theta}_1 + 0.12 \geq 0,\ \ g_6(\theta) = 0.12 - \dot{\theta}_1 \geq 0\\
&g_7(\theta) = \dot{\theta}_2 + 0.15 \geq 0,\ \ g_8(\theta) = 0.15 - \dot{\theta}_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(19) 式で示した手順と同様に，多項式 $g_1(\theta)$～$g_8(\theta)$ と 2 乗和多項式行列 $S_0(\theta)$～$S_8(\theta)$ を用いて，(20) 式の問題は以下のように書き換えることができる．

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \qquad \nu\\
&\text{subject to}\\
&\theta_1\theta_2\begin{bmatrix}
\mathrm{He}[-A_\Sigma(\theta)X(\theta)+B_{2\Sigma}(\theta)Z(\theta)]-\dot{X}(\theta) & -B_{1\Sigma}(\theta) & * \\
* & \nu I & * \\
-C_{1\Sigma}(\theta)X(\theta) & 0 & \nu I
\end{bmatrix}\\
&\quad = S_0(\theta) + g_1(\theta)S_1(\theta) + g_2(\theta)S_2(\theta)\\
&\qquad + g_3(\theta)S_3(\theta) + g_4(\theta)S_4(\theta) + g_5(\theta)S_5(\theta)\\
&\qquad + g_6(\theta)S_6(\theta) + g_7(\theta)S_7(\theta) + g_8(\theta)S_8(\theta)
\end{aligned}
\tag{23}
$$

ここで $X(\theta), Z(\theta)$ は (10)，(11) 式に示した次数 2 の多項式行列とした．また，(21) 式より $\dot{X}(\theta)$ には 1 次の $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ が含まれるが，$\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ のクロスタームがなく，$g_5(\theta)$～$g_8(\theta)$ に 1 次の項として含まれる．よって，計算量削減のため $S_1(\theta)$～$S_8(\theta)$ は $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ には依存せず θ_1, θ_2 のみに依存する次数 4 の 2 乗和多項式行列である条件として解いた．4 章と同様に SeDuMi を用いて解いた結果，計算時間 365(s) で $\nu = 0.584$ という近似解を得た．

6. シミュレーション

4，5 章に示した 2 乗和多項式による GS 制御器の有効性を示すためにパラメータに関する条件を以下の 3 つの場合に分け，シミュレーションを行なった．また文献 11) に示されているパラメータを変換して依存性をアフィンにし，導出した polytopic LPV モデルに対して制御器を設計する Apkarian らの方法によるシミュレーションも行なった．なお，この方法による制御器はパラメータ変化速度の上界を仮定しておらず，(9) 式を解いた結果，$\nu = 0.622$ となった．それぞれのシミュレーション結果を **Fig. 5**～**7** に示す．5 章で設計した GS 制御器による結果を実線，4 章で設計した GS 制御器による結果を破線，Apkarian らの方法による制御器の結果を点線

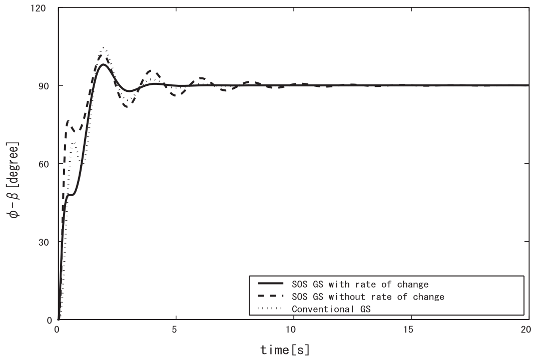

Fig. 5 Simulation results in Case 1

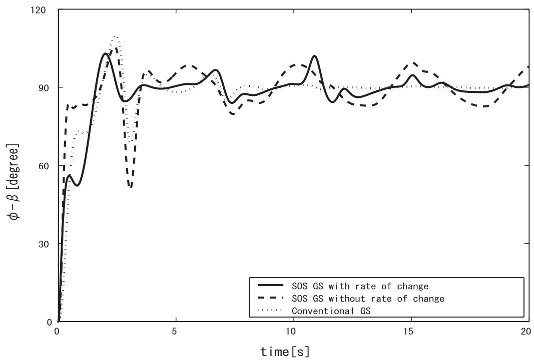

Fig. 6 Simulation results in Case 2

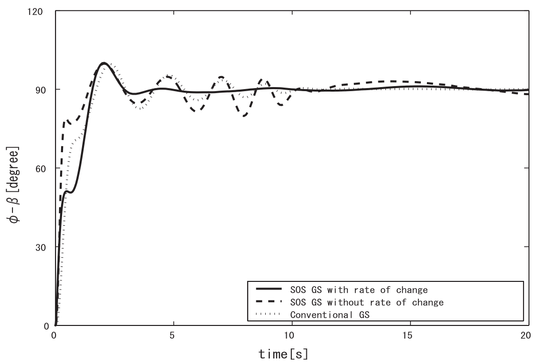

Fig. 7 Simulation results in Case 3

で表わす．なお，目標値信号として吊り荷が 90 度旋回するステップ状の信号を入力した．

Case 1：パラメータをある値に固定 ($\theta_1 = 0.58, \theta_2 = 0.425$)
Case 2：パラメータを変化させる．変化速度は設定した値より大きくなることがある
($\theta_1 = 0.58 + 0.28\sin(0.4\pi t), \theta_2 = 0.425 + 0.325\sin(0.5\pi t)$)
Case 3：パラメータを変化させる．変化速度は設定した値以下である
($\theta_1 = 0.58 + 0.28\sin(0.14\pi t), \theta_2 = 0.425 + 0.325\sin(0.16\pi t)$)

Case 1 では 4 章で設計した GS 制御器，5 章で設計した GS 制御器，Apkarian らの方法による制御器ともに安定化できている．ただし，Fig. 3 に示した一般化制御対象を構成した際に評価出力 z を制御誤差の積分としているため，4 章で設計した GS 制御器の応答は振動的に見えるが，シミュレーション区間内での誤差の積分の値は最も小さくなっている．Case 2 においては，Apkarian らの方法による制御器はパラメータ変化速度の上界を仮定してないので，速い速度で変動していても十分な制御性能を維持できている．一方，5 章の制御器では安定化できているが，設定した値より速くパラメータが変化することがあるため応答が振動的になってしまっている．しかし，Case 3 において 5 章の制御器は不必要な変化速度に対する保守性がないので，最もよい制御性能を示している．

7. 実　　験

本章では 5 章で得た GS 制御器と Apkarian らの方法による制御器を用いて実験を行なった結果を述べる．**Fig. 8** に本研究で用いた 3 自由度クレーン実験機を示す．クレーンはアームの根元と滑車の下方にある光学式エンコーダによってアームの旋回角度，吊り荷の振れ角を計測できるものである．アクチュエータとしては，アームの根元にある動力化ギアボックスを用い，100W リニア電流制御アンプによりモータを駆動するものである．GS 制御器 $K(\theta)$ は 0.001 秒ごとにセンサによって計測されたワイヤの長さと滑車の位置をそれぞれ θ_1, θ_2 に代入し構成した．目標値信号には急激な旋回による吊り荷の振れを防ぐために，毎秒 18 度で変化するランプ状の目標値信号を入力し，吊り荷の旋回角度を 0 度から 90 度まで運搬した．また，旋回と同時にワイヤを毎秒 0.08m の速さで 0.8m から 0.4m まで巻き上げ，滑車を毎秒 0.1m の速さで 0.15m から 0.65m まで移動させた．なお，滑車の移動やアームの旋回による遠心力から生じるアーム長手方向の吊り荷の振動についてはワイヤ長変動を考慮した滑車の移動制御によって振動を抑えている．その実験結果を **Fig. 9** に示す．

実験の結果より，ランプ状の目標値信号を入力しているため，Apkarian らの方法と顕著な差は見られないが，オーバーシュートがなく目標値に追従していることがわかる．

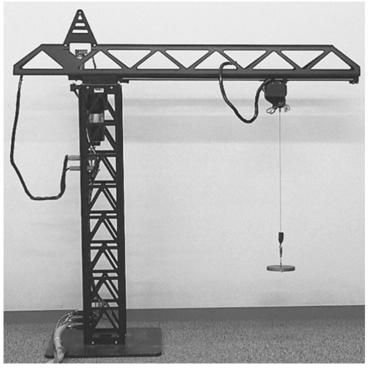

Fig. 8　The Crane used for the laboratory experiment

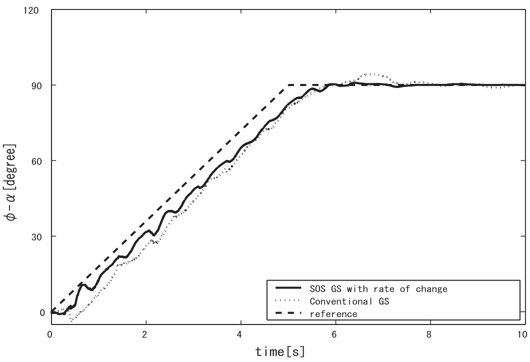

Fig. 9　Experimental results

8. ま と め

本研究では，非線形で不確かなパラメータを含むクレーンに対しての GS 制御器を 2 乗和多項式を用いて設計した．そして，非線形構造を考慮に入れた設計によって，従来の設計法よりも保守的でない制御器を求めることができた．また，次数と計算時間のトレードオフについて考察し，本論文での適用方法の有効性をシミュレーションおよび実験によって示した．

より現実的な設計を行なうには吊り荷の固有振動数やモデル化誤差を考慮に入れた重み関数を含んだ一般化制御対象を扱うことが望ましい．また，H^∞ 制御仕様のみであると制御入力が大きすぎてしまうという問題が生じることがあるため，たとえば極配置条件も加えて設計する方法が考えられる．しかし，それらを考慮に入れるとパラメータ依存 LMI のサイズが大きくなってしまい，計算量が増加し解くことが不可能になってしまうことが起こりうる．今後の課題として，2 乗和多項式行列の構造を工夫し計算量を減少させることで以上の問題点を解決していくことが挙げられる．

参 考 文 献

1）富武，有富：旋回ジブクレーンつり荷の運動，日本機械学会論文集 (C 編)，**48**-425, 11/21(1982)
2）宋，坂本，橋本，青木：4 ファジィ適応則をもつモデル規範形適応制御系に基づく天井クレーン制御，日本ファジィ学会誌，**3**-4, 177/185 (1991)

3) G. Corriga, A. Giua and G. Usai: An Implicit Gain-Scheduling Controller for Cranes, *IEEE Trans.* on Control System Technology, **6**-1, 15/20 (1998)
4) 西村，種村，野波：走行クレーンのロープ長変動に対するゲインスケジュール位置決め制御，日本機械学会論文集 (C 編)，**62**-599, 176/182 (1996)
5) 高木，西村：タワークレーンの吊り荷ロープ長変動を考慮したゲインスケジュールド制御，日本機械学会論文集 (C 編)，**64**-626, 113/120 (1998)
6) 高木，西村：タワークレーンの吊り荷ロープ長変動に対する起伏・旋回方向のゲインスケジュールド分散制御（操縦者の任意指令に対応する制御系設計），日本機械学会論文集 (C 編)，**69**-680, 914/922 (2003)
7) 高木，西村：タワークレーンの起伏・旋回の分散制御，日本機械学会論文集 (C 編)，**65**-640, 104/111 (1999)
8) D.J. Leith and W.E. Leithead: Survey of gain-scheduling analysis and design, International Journal of Control, **73**-11, 1001/1025 (2000)
9) W.J. Rugh and J.S. Shamma: Research on gain scheduling, Automatica, **36**-10, 1401/1425 (2000)
10) J. Yu and A. Sideris: H_∞ control with parametric Lyapunov functions, Systems and Control Letters, **30**, 57/69 (1997)
11) P. Apkarian, P. Gahinet and G. Becker: Self-scheduled H^∞ control of linear parameter-varying systems: A design example, *Automatica*, **31**, 1251/1261 (1995)
12) P. Apkarian and R.J. Adams: Advanced Gain-Scheduling Techniques for Uncertain Systems, IEEE transactions on control systems technology, **6**-1, 21/32 (1998)
13) F. Wu, X.H. Yang, A. Packard and G. Becker: Induced L_2-norm control for LPV systems with bounded parameter variation rates International Journal of Robust and Nonlinear Control, **6**, 983/998 (1996)
14) L. El. Ghaoui, F. Oustry and H. Lebret: Robust solutions to uncertain semidefinite programs, *SIAM Journal on Optimization*, **9**-1, 33/52 (1998)
15) 増淵，示村：ゲインスケジューリング系の設計におけるディスクリプタ形式の利用について，システム制御情報学会論文誌，**12**-7, 390/394 (1999)
16) A.T. Neto: Parameter dependent Lyapunov functions for a class of uncertain linear systems: an LMI approach, in *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, USA, 2341/2346 (1999)
17) Y. Ebihara and T. Hagiwara: A dilated LMI approach to continuous-time gain scheduled controller synthesis with parameter-dependent Lyapunov variables, 計測自動制御学会論文集，**39**-8, 734/740 (2003)
18) C.W. Scherer: LMI Relaxations in Robust Control, *European Journal of Control*, **12**, 3/29 (2006)
19) C.W. Scherer and C.W.J. Hol: Matrix sum-of-squares relaxations for robust semi-definite programs, *Mathematical Programming*, **107**, 189/211 (2006)
20) 大石泰章：2 乗和多項式に基づくロバスト制御系設計，SICE セミナー「実践的な制御系設計—(ポスト) ロバスト制御の最前線—」テキスト (2007)
21) P.A. Parrilo: Semidefinite Programming Relaxations for Semialgebraic Problems, *Mathematical Programming Series B*, **96**, 293/320 (2003)
22) J.B. Lasserre: Global optimization with polynomials and the problem of moments, *SIAM Journal on Optimization*, **11**, 796/817 (2001)
23) S. Prajna, A. Papachristodoulou and F. Wu: Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: a Lyapunov-based approach, *Proceeding of the 2004 Control Conference*, **1**, 157/165 (2004)
24) J. Löfberg: YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proceeding of the 2004 IEEE International Symposium Computer Aided Control System Design*, 284/289 (2004)
25) J.F. Sturm: Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software*, **11**-12, 625/653 (1999)

［著 者 紹 介］

青 木 卓 也（学生会員）

2007 年南山大学数理情報学部数理科学科卒業．2009 年南山大学数理情報研究科数理情報専攻修士課程修了．同年 (株) アドヴィックス入社，現在に至る．

高 見 勲（正会員）

1974 年京都大学大学院工学研究科修士課程修了．同年三菱重工業 (株) 入社．2002 年南山大学教授を経て，2009 年より同大学情報理工学部教授，現在に至る．工学博士．大規模システムの解析，設計の研究に従事．システム制御情報学会，IEEE などの会員．

大 石 泰 章（正会員）

1993 年東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻修士課程修了．95 年東京大学助手，2001 年同講師，2007 年南山大学准教授を経て，2009 年より南山大学情報理工学部教授，現在に至る．博士（工学）．ロバスト制御，サンプル値制御，数理計画法アプローチに興味をもつ．システム制御情報学会，IEEE などの会員．