

地下水学の名著を読む (5)
Ogata and Banks (1961) の式：
最も知られた一次元移流分散方程式の解析解

江種伸之*

Classic & contemporary papers of groundwater science (5)
Ogata and Banks equation (1961): The best-known analytical
solution of one dimensional advective-dispersive equation

Nobuyuki EGUSA*

論文タイトル：A solution of the differential equation of longitudinal dispersion in porous media
著者：A. Ogata and R. B. Banks
出典：Geological Survey Professional Paper 411-A, United States government printing office,
Washington, pp.1-7.
発表年：1961年

1. はじめに

帯水層中における移流分散過程の勉強では、多くの方は地下水理学の和書や洋書、もしくは訳書(例えば, Bear, 1972; キンツェルバッハ, 1990; ドミニコ・シュワルツ, 1996; 佐藤・岩佐, 2002; Spitz and Moreno, 2003; 藤縄, 2010)の中から1冊を選んで読んだのではないだろうか。これらの書籍では、まず初めに多孔媒体中で生じる分散(機構的分散)の解説があり、その後、移流分散方程式の導出を経て、吸脱着や減衰といった生成・消滅過程の説明、解析的手法や数値解析法の説明と続く流れが一般的である。分散過程について

は、本シリーズの第3回(中川・神野, 2014)および第4回(杉田, 2014)で取り上げられているとおり、国内外で現在も積極的に研究が進められている。

それでは、帯水層中の移流分散過程を勉強することになったきっかけは? 純粋な学問的好奇心からの場合もあるだろうが、多くは地下水の塩水化対策、土壌・地下水汚染対策といった実務に役立てるためではないだろうか。このような問題に対して移流分散解析を実施する場合、通常は対象となる物質および場に適した移流分散方程式を構築して、解析的もしくは数値的に解くことになる。解析的に解くとは、移流分散方程式を数学的に解

* 和歌山大学 (〒640-8510 和歌山県和歌山市栄谷930)
Department of Environmental Systems, Wakayama University

いて求めた解（理論解、解析解と呼ぶ）を利用して帯水層中における物質濃度の時空間変化を算定することである。これに対して、数値的に解くとは、有限差分法や有限要素法などにより移流分散方程式の近似解（数値解と呼ぶ）を求めることである。

コンピュータの発達した現在では、複雑な3次元帯水層構造を対象とした数値解析が可能であり、実務の現場では3次元数値解析を実施することが一般的になりつつある。ただし、プログラミングといった高度な技術を必要とせず、またエクセルなどの表計算ソフトの進化により様々な関数を容易に扱える現状において、簡便性という観点で解析解の有用性は依然として高いものがある。例えば、代表的な土壌・地下水汚染のリスク評価モデルのRBCAでは、3次元の解析解が利用されている。

移流分散方程式の解析解を求めるためには、通常はいくつかの簡略化が必要になる。それは、帯水層の均質性、一定速度の平行流、一定の分散係数、および対象物質の投入が一様な流れ場に影響を与えないなどである。このような簡略化をとまなう解析的手法では、実現場の複雑な帯水層構造や地下水流動を考慮した解を得ることはできない。しかし、例えば、(1) 野外調査で得られた汚染物質濃度や平均地下水流速を使って、下流に位置する観測井の汚染物質濃度が環境基準値を超えるおおよその時期が知りたい場合、(2) 室内カラム試験や野外トレーサー試験結果を使って分散長を推定したい場合など、問題設定を明確にすれば十分利用可能である。

そして、このような解析解は、次元の違い、初期・境界条件の違いなどによりいくつも提案されている。解析解の種類については“続・土壌・地下水汚染の調査・予測・対策（地盤工学会, 2008）”に詳しいので、そちらを参照いただきたい。数多い解析解の中でも最も知られているのがOgata and Banks (1961)の式である。この式は一次元半無限帯水層において原点濃度を一定値とした解析解で、カラム試験結果の解析などに用いられることが多い。しかし、この式が示された原著論文自体を読まれた方は少ないのではないだろうか？地下水学の名著を読むシリーズ第1回の

“揚水理論の父Theis (1935) (進士, 2013)”でも同様のことが述べられているが、書籍に載っている公式が最初に掲載された（世に出た？）原著論文にまで目を通すことはなかなかないものである。そこで、地下水学の名著を読むシリーズの第5回目では、地下水中の移流分散過程の第3弾としてOgata and Banks (1961)の式を取り上げることにした。

2. 論文の概要

2.1 背景

一次元移流分散方程式の解析解は、この論文が発表されるまでは移動座標系を利用して解いたものが一般的であった。例えば、化学工学ではDanckwerts (1953)、地下水学ではBear and Todd (1960)がこのアプローチにより解析解の導出を行っている。以下は一次元移流分散方程式、移動座標系における初期・境界条件、および得られた解析解である。

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{初期条件} \quad c(x,0) &= c_0; -\infty \leq x < 0, \\ c(x,0) &= 0; 0 \leq x \leq \infty \end{aligned}$$

$$\text{境界条件} \quad c(-\infty,t) = c_0, c(\infty,t) = 0; t \geq 0$$

$$\frac{c(x,t)}{c_0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x-vt}{2\sqrt{Dt}} \right) \quad (2)$$

ここに、 c は濃度、 t は時間、 x は場所、 D は分散係数、 v は実流速、 erfc は補誤差関数、 c_0 は $x = -\infty$ における濃度である。式(2)は地下水流れの主流方向(x 軸方向)に速度 v で移動する移動座標系($x-vt$)における濃度分布を表しており、溶質フロント(比濃度が0.5となる地点。クーラン数が1となる地点)の位置($x = 0$)で左右対称な濃度分布となる(図1)。

この式は上流境界が $x = -\infty$ となっていることからわかるように、時間が経過してある程度流下した地点(ここを原点 $x = 0$ とする)周辺の濃度分布を示す。

これに対して、著者はこの論文の中で異なるアプローチにより非対称な濃度分布を表す解析解の

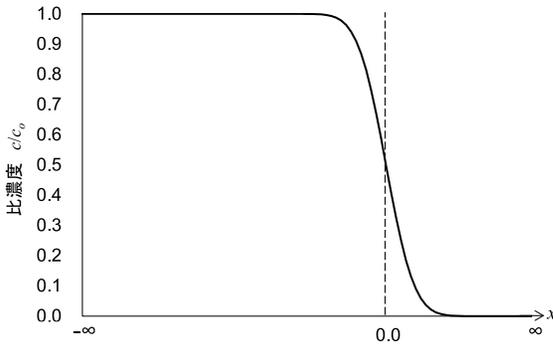


図1 対称形の解析解の模式図

導出を試みている。以下はこの論文で導出された解析解である。

$$\frac{c(x,t)}{c_0} = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{x-vt}{2\sqrt{Dt}} \right) + \exp \left(\frac{vx}{D} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x+vt}{2\sqrt{Dt}} \right) \right\} \quad (3)$$

ここに、 c_0 は原点 ($x = 0$) における濃度である。なお、同様なアプローチは化学工学の分野ですでに Lapidus and Amundson (1952) によってなされている。

この式の上流境界は原点 ($x = 0$) であり、解には境界条件が厳密に反映されている。すなわち、式 (2) と式 (3) は共に上流境界の濃度が一定 (c_0) の場における移流分散過程を表しているが、境界条件の違いにより両者の結果は同じにはならない。また、式 (3) に対して $x = -\infty$ といったあいまいな境界を使用する式 (2) の一般性は高くない。換言すると、本稿で対象とする Ogata and Banks (1961) の式 (式 (3)) は、上流境界条件が濃度一定と厳密でわかりやすく、さらにカラム試験に適した境界条件であることが、一次元移流分散方程式の代表的な解析解として広く知られるようになった理由ではないかと推察される。

論文自体は2部構成となっている。前半は非対称形の解析解 (式 (3)) を導出し、後半は式 (3) と式 (2) で描かれる破過曲線が同一となる条件を検討している。

2.2 解析解の導出

まず式 (3) の導出では、半無限帯水層を考慮して、以下の初期・境界条件を与えている。

初期条件 $c(x,0) = 0 ; x \geq 0$

境界条件 $c(0,t) = c_0, c(\infty,t) = 0 ; t \geq 0$

この条件における解析解を求めるにあたり、まずは移流項がなく解きやすい分散方程式 (熱伝導型の偏微分方程式) に変換するために、以下のような変数変換を行っている。

$$c(x,t) = \Gamma(x,t) \exp(ax+bt) \quad (4)$$

これを式 (1) に代入すると、

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} - (v-2aD) \frac{\partial \Gamma}{\partial x} - (av+b-a^2) \Gamma(x,t) \quad (5)$$

となる。この式において、 $v-2aD = 0, av+b-a^2 = 0$ を満足するように a と b を求めると、

$$a = \frac{v}{2D}, \quad b = -\frac{v^2}{4D}$$

となる。よって、式 (4) と式 (5) は次式で表される。

$$c(x,t) = \Gamma(x,t) \exp \left(\frac{vx}{2D} - \frac{v^2 t}{4D} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} \quad (7)$$

また、初期・境界条件は以下のように変換される。

初期条件 $\Gamma(x,0) = 0 ; x \geq 0$

境界条件 $\Gamma(0,t) = c_0 \exp(v^2 t / 4D), \Gamma(\infty,t) = 0 ; t \geq 0$

すなわち、式 (4) を用いることで、上流境界が一定値で表される移流分散方程式が、上流境界が時間の関数で表される分散方程式に変換されている。なお、ここまでの変換過程は論文には載っていないが、ここから先は詳細に記述されている。具体的には Duhamel の公式とラプラス変換を利用することで式 (3) が得られる。ここで、Duhamel の公式は時間軸上の解の線形結合に関する公式であり、境界条件が時間と共に変化する熱伝導型の偏微分方程式の解を、時間に無関係の解を用いて求めることができる。つまり、変数変換によって得られた熱伝導型の式 (7) を時間の関数で表される境界条件の下で解くのに適した公式というわけである。

論文中では無次元数である $\xi = vt/x$ と $\eta =$

D/vx を用いて式 (3) を次式に置き換えている。

$$\frac{c(\xi, \eta)}{c_0} = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{1-\xi}{2\sqrt{\xi\eta}} \right) + \exp \left(\frac{1}{\eta} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{1+\xi}{2\sqrt{\xi\eta}} \right) \right\} \quad (8)$$

ここに、 ξ はクーラン数、 η はペクレ数の逆数であるが、論文ではクーラン数やペクレ数といった表現はなされていない。1961年当時にはまだこれらの無次元数の概念が地下水学に導入されていなかったのであろうか（これについては調査不足で未確認）。

論文では続いて、式 (8) の右辺第1項が対称濃度分布、右辺第2項が非対称濃度分布を示すことを指摘しており、また原点 ($x = 0$) から遠く離れた地点では右辺第2項が無視できると述べている。ここでは、 η が小さい（ペクレ数が大きい）場合、つまり分散係数 D が小さいもしくは移行距離 x が大きい場合には右辺第2項が無視できるとしている。右辺第2項を無視すると式 (3) は式 (2) と同形になる。すなわち、ここでは、上流境界の濃度が一定の場合における移流分散過程を表す式 (3) と式 (2) は、移行距離が大きくなると同じ結果になると指摘している。

2.3 導出された解析解の特徴

論文の後半では、著者が導出した非対称形の解析解である式 (3)（もしくは式 (8)）で描かれる破過曲線が対称形の解析解（式 (2)）と同じになる条件、両者が同じになるために必要な移行距離を検討している。ここでは、右辺第2項を次式のような ξ と η を変数とする2変数関数 $f(\xi, \eta)$ と考え、この関数 f が $\xi = 1$ （クーラン数 = 1）で極大値を取ることを証明している。そして、右辺第2項が最大値を取る $\xi = 1$ における対称形と非対称形の解析解の誤差を算出している。 $\xi = 1$ では対称形の解析解は必ず0.5を示すので、非対称形の解析解が η の値によって0.5からどの程度外れるかを検討している。

このような検討の結果として、 $\eta < 0.002$ であれば誤差が3%以内に収まるとしている。 η はペクレ数の逆数なので、ペクレ数 $P_e > 500$ が非対称形の解析解の右辺第2項を無視できる条件となる。すなわち、分子拡散係数を無視して分散係数を $D = \alpha_L v$ (α_L は縦分散長) で考えた場合に

は、 $x > 500\alpha_L$ が条件となる。論文では、Orlob and Radhakrishna (1958) の論文に示されている縦分散長の範囲 (0.09 cm ~ 2.79 cm) から、誤差を3%以内にする場合には移行距離 $x > 45$ cm ~ 1395 cm、5%以内にする場合には移行距離 $x > 10$ cm ~ 350 cm が必要になると結論付けている。

3. 非対称形と対称形の破過曲線が同一になる条件

論文では、非対称形の解析解の右辺第2項を無視できる条件、すなわち移動座標系を用いた対称形の解析解で近似できる条件をペクレ数が500より大きいこと ($P_e > 500$) としている。しかし、その後出版された地下水理学の書籍では、これとは異なる条件が記載されている。例えば、“パソコンによる地下水解析（キンツェルバッハ、1990）”では $P_e > 10$ 、“環境地下水学（藤縄、2010）”では $P_e \geq 100$ 、“実務者のための地下水環境モデリング（Spitz and Moreno, 2003）”では $P_e > 300$ が条件として示されている。

そこで、ペクレ数が10, 100, 300, 500の場合の式 (2) と式 (3) の破過曲線を求めてみた（図2から図5）。図より、 $P_e = 10$ では両者の破過曲線は明らかに異なっている。クーラン数が1の場合（今回の解析条件では経過時間が100日となる）の誤差は14.6%であるが、ペクレ数が100以上になると両者の違いは非常に小さくなっていく。誤差は $P_e = 100$ で5.3%、 $P_e = 300$ で3.2%、 $P_e = 500$ で2.5%となるので、ペクレ数が100以上であれば実用上は非対称形の解析解の右辺第2項を無視してもよいだろう。

すなわち、地下水の流れが比較的大きく分子拡散係数が無視できる場合には、ペクレ数は $P_e = x/\alpha_L$ で表されるので、縦分散長が移行距離の10分の1以下の場においては対称形の解析解を適用しても良いことになる。なお、縦分散長のスケール依存性については地下水理学に関する数多くの書籍で指摘されており、縦分散長は一般的には移行距離の10分の1から100分の1程度の値を取るが、移行距離がある規模以上になると縦分散長は一定値に漸近すると考えられている。つまり、縦分散長を移行距離の100分の1より大きな値に設定した場に対称形の解析解（式 (2)）を適用する

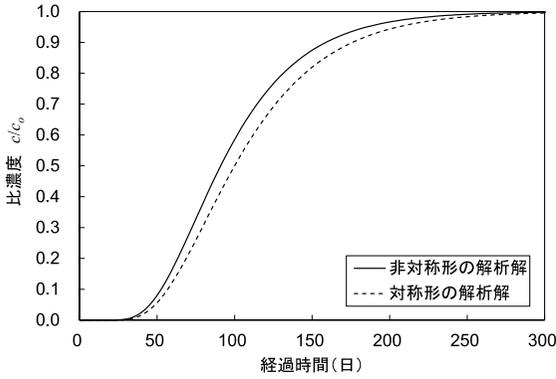


図2 対称形と非対称形の解析解の比較 (ペクレ数 $P_e = 10$, 移行距離 $x = 10$ m, 実流速 $v = 0.1$ m/d, 縦分散長 $\alpha_L = 1.0$ m)

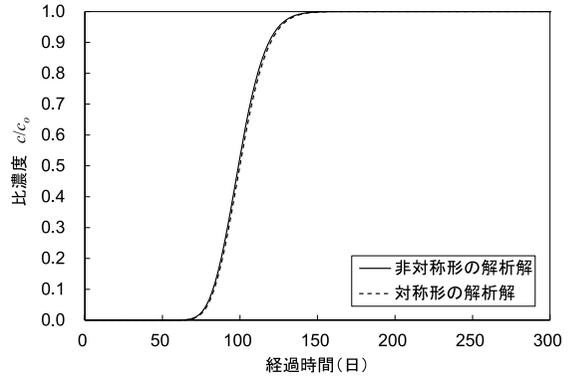


図3 対称形と非対称形の解析解の比較 (ペクレ数 $P_e = 100$, 移行距離 $x = 10$ m, 実流速 $v = 0.1$ m/d, 縦分散長 $\alpha_L = 0.1$ m)

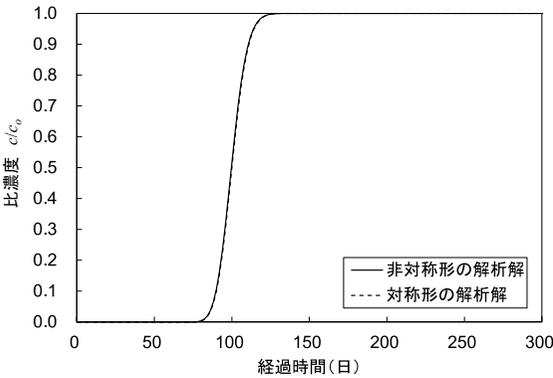


図4 対称形と非対称形の解析解の比較 (ペクレ数 $P_e = 300$, 移行距離 $x = 10$ m, 実流速 $v = 0.1$ m/d, 縦分散長 $\alpha_L = 0.0333$ m)

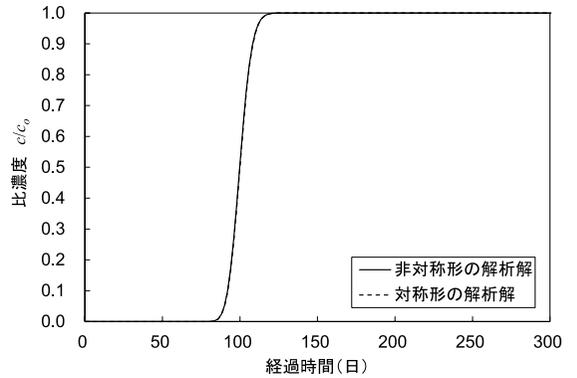


図5 対称形と非対称形の解析解の比較 (ペクレ数 $P_e = 500$, 移行距離 $x = 10$ m, 実流速 $v = 0.1$ m/d, 縦分散長 $\alpha_L = 0.02$ m)

ことは、式の特性和矛盾するが、縦分散長が移行距離の100分の1以下になる場であれば式(2)を用いてもよいことになる。ただし、縦分散長の漸近値を具体的に示すことは現時点では難しい。また、この論文で導出された解析解は一次元帯水層を対象としていることから、それほど大きな移行距離に対して適用できるわけではない。したがって、現実的な視点で考えれば、移行距離に関係なくこの論文で導出された非対称形の解析解である式(3)を適用することが妥当な判断であろう。

5. おわりに

コンピュータの高速・大容量化と解析技術の進歩により、帯水層中の移流分散解析では複雑な地質構造を持つ実現場を正確に表現した3次元モデルによる数値解析が一般的になってきている。しかし、プログラミングといった高度な技術を必要とせず、またエクセルなどの表計算ソフトの進化もあり、簡便性という観点から見て解析解の有用性は依然として高いものがある。本稿を読んで移流分散方程式の解析解に興味を持った方がいれば、地下水理学に関する書籍や解析解に関する論文を読んで、コンピュータが発達していなかった時代の先人の知恵に少しでも触れてほしい。

謝 辞

本稿をまとめるにあたり、九州大学名誉教授の神野健二先生と長崎大学教授の中川啓先生からは分散過程や解析解に関する貴重なアドバイスを、2名の査読者からは論文の構成に関する適切なコメントをいただきました。また、和歌山大学大学院システム工学研究科博士前期課程1年の貴志直稀君には解析を手伝っていただきました。ここに記して、感謝の意を表します。

参考文献

- キンツェルバッハ, W. (1990): パソコンによる地下水解析 (上田年比古監訳). 森北出版, 286p.
- ドミニコ, P. A., シュワルツ, F.W. (1996): 地下水の化学II (地下水の科学研究会 大西有三監訳). 土木工学会, 252p.
- 佐藤邦明・岩佐義朗編著 (2002): 地下水理学. 共立出版, 319p.
- 地盤工学会 (2008): 地盤工学・実務シリーズ25 続・土壌・地下水汚染の調査・予測・対策. 地盤工学会, 141-144.
- 杉田 文 (2014): 地下水学の名著を読む (4) フィールドスケールにおける流れ場の不均質性と分散長. 地下水学会誌, 56 (2), 155-160.
- 進士喜英 (2013): 地下水学の名著を読む (1) 揚水理

- 論の父 Theis (1935). 地下水学会誌, 55 (3), 291-294.
- 中川 啓・神野健二 (2014): 地下水学の名著を読む (3) フィールドにおける適切な分散長の評価法とは. 日本地下水学会誌, 56 (1), 67-71.
- 藤縄克之 (2010): 環境地下水学. 共立出版, 353p.
- Bear, J. and D.K. Todd (1960): The transition zone between fresh and salt waters in coastal aquifers. University of California, Water Resources Center Contribution, 29.
- Bear, J. (1972): Dynamics of Fluids in Porous Media. Dover Publications Inc., 764p.
- Danckwerts, P.V. (1953): Continuous flow system. Chemical Engineering Science, 2, 1-13.
- Lapidus and Amundson (1952): Mathematics of adsorption in beds, VI, The effect of longitudinal diffusion in ion exchange chromatographic columns. The Journal of Physical Chemistry, 56, 984-988.
- Orlob, G.T. and G.N. Radhakrishna (1958): The effects of entrapped phases on the hydraulic characteristics of porous media. American Geophysical Union Transactions, 39, 648-659.
- Spitz, K. and J. Moreno (2003): 実務者のための地下水環境モデリング (岡山地下水研究会 訳). 技報堂出版, 395p.
- (受付: 2013年12月18日, 受理: 2014年5月20日)