Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

М. Я. Кельберт, Вероятностное представление полигармонических функций, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 2, 354–359

DOI: 10.4213/tvp2708

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 3.140.185.123
25 апреля 2024 г., 05:19:31

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гринь А. Г.* О минимальном условии слабой зависимости в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 3, с. 554–558.
2. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
3. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
4. *Ибрагимов И. А.*, *Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
5. *Гринь А. Г.* Нормирующие последовательности в предельных теоремах для слабо зависимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 2, с. 285–300.
6. *Dehling H.*, *Denker M.*, *Philipp W.* Central limit theorems for mixing sequences of random variables under minimal conditions. — Ann. Probab., 1986, v. 14, № 4, p. 1359–1370.
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 751 с.
8. *Гринь А. Г.* Области притяжения для последовательностей с перемешиванием. — Сиб. матем. журн., 1990, т. 31, № 1, с. 53–63.
9. *Гринь А. Г.* Об областях притяжения для сумм зависимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1990, т. 35, в. 2, с. 255–270.
10. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М: Наука, 1977, 351 с.

Поступила в редакцию
26.XII.2003

Исправленный вариант
26.II.2009

© 2009 г.

КЕЛЬБЕРТ М.*

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В настоящей статье приводится формула Фейнмана–Каца высшего порядка для решений уравнения $(\Delta + V)^m u = 0$ в области D. Вероятностное представление влечет априорные оценки на рост решений, когда область D расширяется к $\mathbf{R}^d$. Оценки моментов случайного времени достижения высокого уровня для процессов Бесселя используются для доказательства слабой зависимости полигармонических функций от некоторых граничных значений.

Ключевые слова и фразы: полигармонические функции, принцип максимума, формула Фейнмана–Каца, процессы Бесселя.

1. Введение. В этой заметке мы изучаем решения уравнения

$$(L + V)^m u = 0 \tag{1.1}$$

в открытой предкомпактной области $D \subset \mathbf{R}^d$, $d \geqslant 2$, с регулярной границей ∂D, где $m \geqslant 1$ — целое число. В большей части статьи L обозначает (плоский) лапласиан $\sum_{i=1}^d \partial^2/\partial x_i^2$, $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^d$, который является генератором стандартного броуновского движения. Заметим, что многие результаты непосредственно переносятся на случай любого генератора L марковского процесса.

* Mathematics Department, University of Swansea, Singleton Park, Swansea, SA2 8PP, UK; e-mail: M.Kelbert@swansea.ac.uk

Потенциал V является непрерывной функцией и $V \leqslant 0$ (это предположение может быть ослаблено). В дополнение к уравнению (1.1) наложим граничные условия на ∂D:

$$(L+V)^l u(x) = (-1)^l g_l(x), \qquad x \in \partial D, \quad l = 0, \dots, m-1. \tag{1.2}$$

Здесь $g_0, \dots, g_{m-1}$ — заданные (измеримые) функции на ∂D. Если функции g_l дифференцируемы $2m-2$ раз по x, то граничные условия в (1.2) понимаются в обычном (сильном) смысле, в противном случае их следует понимать в слабом смысле.

Рассматриваемая задача имеет долгую историю. В размерности $d = 2$ уравнение $\Delta^m u = 0$ изучалось в [6, § 32] (полигармонические уравнения). Полигармонические уравнения, особенно при $m = 2$, важны в задачах механики сплошных сред (колебания тонких пластин и оболочек); см., например, [6] и [7] или недавние книги [1] и [2]. Полигармонические уравнения также возникают в комплексном анализе (полианалитичность). В частности, в [6] приведены теоремы существования и единственности для задачи (1.1)–(1.2) с $m = d = 2$ (при более широком классе граничных условий). Однако информация об этих решениях остается чрезвычайно скупой.

В этой заметке мы: (i) доказываем существование и единственность решений задачи (1.1) с граничными условиями (1.2) (при любых $d \geqslant 1$ и $m \geqslant 1$); (ii) приводим вероятностное представление этих решений, (iii) выводим из этого представления некоторые априорные оценки решений и (iv) анализируем зависимость решений от граничных условий.

2. Формула Фейнмана–Каца высшего порядка.

Лемма 1. *Для любой функции $g \in \mathrm{C}(\partial D)$ определим функции v_k при всех $k = 1, \dots, m$ следующим образом: при $k = 1$ функция v_1 является решением задачи*

$$(\Delta + V)v_1 = 0, \quad x \in D, \qquad v_1\Big|_{\partial D} = (-1)^{m-1} g; \tag{2.1}$$

затем функции v_k, $k = 2, \dots, m$, определяются рекуррентно как решения следующей задачи в D:

$$(\Delta + V)v_k = -v_{k-1}, \quad x \in D, \qquad v_k\Big|_{\partial D} = 0. \tag{2.2}$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_m(x) \;=\; \mathbf{E}_x\Bigg(&\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}s_0 \exp\left[\int_0^{s_0} V(B_0(u_0))\,\mathrm{d}u_0\right] \\ &\times \mathbf{E}_{B_0(s_0)}\Bigg(\int_0^{\tau_1} \mathrm{d}s_1 \exp\left[\int_0^{s_1} V(B_1(u_1))\,\mathrm{d}u_1\right] \times \cdots \\ &\times \mathbf{E}_{B_{m-3}(s_{m-3})}\Bigg(\int_0^{\tau_{m-2}} \mathrm{d}s_{m-2} \exp\left[\int_0^{s_{m-2}} V(B_{m-2}(u_{m-2}))\,\mathrm{d}u_{m-2}\right] \\ &\times \mathbf{E}_{B_{m-2}(s_{m-2})}\Bigg(g(B_{m-1}(\tau_{m-1})) \\ &\times \exp\left[\int_0^{\tau_{m-1}} V(B_{m-1}(u_{m-1}))\,\mathrm{d}u_{m-1}\right]\Bigg)\Bigg)\dots\Bigg)\Bigg). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь $(B_0(t),\ t > 0)$ — исходное броуновское движение, выходящее из $x \in D$, и τ_0 — время достижения им границы ∂D. Далее, $(B_1(t),\ t > 0)$ — это броуновское движение, выходящее из точки $B_0(s_0)$, $s_0 \in (0, \tau_0)$, приращения $(B_1(\tilde{t}) - B_0(s_0), \tilde{t} > 0)$ которого независимы от процесса $(B_0(t),\ t > 0)$, и τ_1 — время достижения границы ∂D процессом $(B_1(t),\ t > 0)$. И так далее: $(B_{m-1}(t),\ t > 0)$ — это броуновское движение, выходящее из точки $B_{m-2}(s_{m-2})$, $s_{m-2} \in (0, \tau_{m-2})$, приращения $(B_{m-1}(\tilde{t}) - B_{m-2}(s_{m-2}),\ \tilde{t} > 0)$ которого независимы от процессов $(B_j(t),\ t > 0)$, $j = 0, \dots, m-2$, и τ_{m-1} — это время достижения границы ∂D процессом $(B_{m-1}(t),\ t > 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения (2.1) вытекает, что

$$v_1(x) = (-1)^{m-1}\, \mathbf{E}_x\left(g(B(\tau)) \exp\left[\int_0^{\tau} V(B(u))\,\mathrm{d}u\right]\right).$$

Отсюда получаем

$$v_2(x) = (-1)^{m-2}\,\mathbf{E}_x\biggl(\int_0^{\tau_0}\mathrm{d}s_0\exp\biggl[\int_0^{s_0}V(B_0(u_0))\,\mathrm{d}u_0\biggr] \times \mathbf{E}_{B_0(s_0)}\biggl(g(B_1(\tau_1))\exp\biggl[\int_0^{\tau_1}V(B_1(u_1))\,\mathrm{d}u_1\biggr]\biggr)\biggr).$$

Продолжая эту процедуру, получим (2.3). Заметим, что формула (2.3) справедлива и в общем случае, если интеграл определен корректно.

Лемма 2. *Единственное решение задачи*

$$\begin{aligned}&(\Delta+V)^m u = 0, \qquad x\in D, \qquad u|_{\partial D} = g_0,\\ &(\Delta+V)u|_{\partial D} = -g_1, \quad \ldots, \quad (\Delta+V)^{m-1}u|_{\partial D} = (-1)^{m-1}g_{m-1},\end{aligned} \tag{2.4}$$

с $g_i\in \mathrm{C}(\partial D)$, $i=0,\ldots,m-1$, *представляется в виде*

$$\begin{aligned}u(x) \;=\; &\mathbf{E}_x\biggl(g_0(B_0(\tau_0))\exp\biggl[\int_0^{\tau_0}V(B_0(u_0))\,\mathrm{d}u_0\biggr]\biggr)\\ &+\mathbf{E}_x\biggl(\int_0^{\tau_0}\mathrm{d}s_0\exp\biggl[\int_0^{s_0}V(B_0(u_0))\,\mathrm{d}u_0\biggr]\\ &\qquad\times\mathbf{E}_{B_0(s_0)}\biggl(g_1(B_1(\tau_1))\exp\biggl[\int_0^{\tau_1}V(B_1(u_1))\,\mathrm{d}u_1\biggr]\biggr)\biggr)+\cdots\\ &+\mathbf{E}_x\biggl(\int_0^{\tau_0}\mathrm{d}s_0\exp\biggl[\int_0^{s_0}V(B_0(u_0))\,\mathrm{d}u_0\biggr]\\ &\qquad\times\mathbf{E}_{B_0(s_0)}\biggl(\int_0^{\tau_1}\mathrm{d}s_1\exp\biggl[\int_0^{s_1}V(B_1(u_1))\,\mathrm{d}u_1\biggr]\times\cdots\\ &\qquad\times\mathbf{E}_{B_{m-3}(s_{m-3})}\biggl(\int_0^{\tau_{m-2}}\mathrm{d}s_{m-2}\exp\biggl[\int_0^{s_{m-2}}V(B_{m-2}(u_{m-2}))\,\mathrm{d}u_{m-2}\biggr]\\ &\qquad\times\mathbf{E}_{B_{m-2}(s_{m-2})}\biggl(g_{m-1}(B_{m-1}(\tau_{m-1}))\\ &\qquad\times\exp\biggl[\int_0^{\tau_{m-1}}V(B_{m-1}(u_{m-1}))\,\mathrm{d}u_{m-1}\biggr]\biggr)\biggr)\ldots\biggr)\biggr).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Доказательство. В силу линейности задачи можно предположить, что только одна из функций $g_0,\ldots,g_{m-1}$ не равна тождественно нулю. В случае, когда $g_0=\cdots=g_{m-2}=0$, результат следует из леммы 1 с $u=v_m$, $g=g_{m-1}$. Далее, при некотором $l=1,\ldots,m$ рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}&(\Delta+V)v_1 = 0, \quad x\in D, \qquad v_1|_{\partial D}=0,\\ &(\Delta+V)v_k = -v_{k-1}, \quad v_k|_{\partial D}=0, \qquad k\in\{2,\ldots,m\}\setminus l,\\ &v_l|_{\partial D} = (-1)^{m-l}g.\end{aligned}$$

Тогда $v_1\equiv 0,\ldots,v_{l-1}\equiv 0$ и результат следует из леммы 1 с $g=g_{m-l}$. Как и ранее, формула (2.5) справедлива и в общем случае, если все интегралы определены корректно. При $V=0$ формула (2.5) принимает вид (2.6), см. лемму 3.

Заметим, что если знаки граничных условий перемежаются, т.е. $g_l\geqslant 0$, $l=0,1,\ldots,m-1$, мы получаем, что решение $u(x)$ задачи (1.1)–(1.2) неотрицательно. Следующий частный случай впервые изучался в работе [5].

Лемма 3. *Предположим, что* $V\equiv 0$. *Тогда единственное решение задачи* (2.4) *допускает представление*

$$\begin{aligned}u(x) \;=\; &\mathbf{E}_x\biggl[\frac{1}{(m-1)!}\,\tau^{m-1}g_{m-1}(B(\tau))+\frac{1}{(m-2)!}\,\tau^{m-2}g_{m-2}(B(\tau))+\cdots\\ &\qquad+g_0(B(\tau))\biggr], \qquad x\in D.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $m = 2$, в силу марковского свойства,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x\Big[\int_0^\tau \mathbf{E}_{B(s)}[g_1(B(\tau_1))]\,\mathrm{d}s\Big] &= \mathbf{E}_x\Big[\int_0^\infty \mathbf{E}_{B(s)}[\mathbf{1}(s<\tau)g_1(B(\tau_1))]\,\mathrm{d}s\Big]\\ &= \int_0^\infty \mathbf{E}_x[\mathbf{1}(s<\tau)g_1(B(\tau))]\,\mathrm{d}s = \mathbf{E}_x\Big[g_1(B(\tau))\int_0^\infty \mathrm{d}s\,\mathbf{1}(s<\tau)\Big]\\ &= \mathbf{E}_x[\tau g_1(B(\tau))].\end{aligned}$$

При общем m, в силу марковского свойства,

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_x\Big[\int_0^{\tau_0}\mathrm{d}s_0\,\mathbf{E}_{B_0(s_0)}\int_0^{\tau_1}\mathrm{d}s_1\cdots\mathbf{E}_{B_{m-3}(s_{m-3})}\Big\{\mathbf{E}_{B_{m-2}(s_{m-2})}\Big[g_{m-1}(B_{m-1}(\tau_{m-1}))\Big]\Big\}\Big]\\ &= \mathbf{E}_x\Big[g_{m-1}(B(\tau))\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty \mathrm{d}s_0\cdots\mathrm{d}s_{m-2}\,\mathbf{1}(s_0\leqslant s_1\leqslant\cdots\leqslant s_{m-2}\leqslant\tau)\Big]\\ &= \mathbf{E}_x\Big[\frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!}g_{m-1}(B(\tau))\Big].\end{aligned}\tag{2.7}$$

Здесь использован тот факт, что $(m-1)$ броуновских движений, склеенных в промежуточных точках $s_0,\ldots,s_{m-2}$ до достижения границы ∂D, распределены так же, как и единственное броуновское движение в D.

Для полноты мы приведем также прямое доказательство соотношения (2.6).

Лемма 4. *Пусть L — генератор марковского процесса X, $f \in \mathrm{D}(L)$ и $f(X(t))$ — п.н. непрерывная справа функция t. Пусть функция $\phi(t)$ абсолютно непрерывна по t. Если τ — такой момент остановки, что $\mathbf{E}_x\int_0^\tau|\phi(s)|\,\mathrm{d}s<\infty$ и $\mathbf{E}_x\int_0^\tau|\phi'(s)|\,\mathrm{d}s<\infty$, то*

$$\mathbf{E}_x\Big[\phi(\tau)f(X(\tau))\Big]-\phi(0)f(x) = \mathbf{E}_x\Big[\int_0^\tau\phi'(s)f(X(s))\,\mathrm{d}s\Big]+\mathbf{E}_x\Big[\int_0^\tau\phi(s)Lf(X)\,\mathrm{d}s\Big].$$

Эта лемма обобщает тождество Дынкина (см. [4]). Применяя лемму 4 к $\phi(t)=t^l$ и $(-L)^lf/l!$ и суммируя по $l\leqslant m-1$, получаем

$$f(x)-\mathbf{E}_xf(X(\tau)) = \sum_{l=1}^{m-1}\frac{1}{l!}\,\mathbf{E}_x\Big[\tau^l(-L)^lf(X(\tau))\Big]+\frac{1}{m!}\,\mathbf{E}_x\Big[\int_0^\tau s^{m-1}(-L)^mf(X(s))\,\mathrm{d}s\Big].\tag{2.8}$$

Пусть функции $v_k(x)$ определены как в лемме 1 с $V\equiv 0$ и граничным значением g. Используя равенства $(-L)^mv_m=0$ и $(-L)^lv_k=v_{k-l}$ при $l\leqslant k$, получаем

$$\begin{aligned}v_m(x) &= \mathbf{E}_xv_m(X(\tau))+\sum_{l=1}^{m-1}\mathbf{E}_x\Big[\frac{1}{l!}\tau^lv_{m-l}(X(\tau))\Big]\\ &= \mathbf{E}_x\Big[\frac{1}{(m-1)!}\,\tau^{m-1}v_1(X(\tau))\Big] = \mathbf{E}_x\Big[\frac{1}{(m-1)!}\tau^{m-1}g(X(\tau))\Big].\end{aligned}\tag{2.9}$$

3. Эллиптические граничные задачи. Рассмотрим класс $\mathscr{G}(C)$ вектор-функций $G=(g_{m-1},g_{m-2},\ldots,g_1,g_0)$ на ∂D таких, что $|g_{m-1}|\leqslant C$, $|g_{m-2}|\leqslant C,\ldots,|g_0|\leqslant C$, $g_i\in\mathrm{C}(\partial D)$, $i=0,\ldots,m-1$. Пусть $\mathscr{G}_0(C)=\{G\in\mathscr{G}(C)\colon g_{m-1}\equiv 1\}$. Будем говорить, что последовательность областей (D_n) регулярно расширяется к $\mathbf{R}^d$, если для любого $K\subset D$ (i) $R_n(K)=\operatorname{dist}(K,\partial D_n)\to\infty$ при $n\to\infty$ и (ii) $\overline{R}_n(K)/R_n(K)=1+o(1)$ при $n\to\infty$, где $\overline{R}_n(K)=\sup_{y\in\partial D_n}\operatorname{dist}(y,K)$. При любом $n=0,1,2,\ldots$ рассмотрим классы граничных значений $\mathscr{G}^{(n)}(C)$ и $\mathscr{G}_0^{(n)}(C)$ в областях D_n, $D_0=D$. Предположим, что константа C не зависит от n, и будем опускать индекс n.

Докажем утверждение типа теоремы Лиувилля для полигармонических функций.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{U} = \mathscr{U}(C)$ — множество решений граничной задачи* (1.1)–(1.2) *в областях D_n, $D \subset D_n$, с $V \leqslant 0$ и граничными значениями из множества $\mathscr{G}(C)$. Тогда для любого компакта $K \subset D$ существует константа $\overline{C} = \overline{C}(K, C, d, m)$ такая, что при $u \subset \mathscr{U}$*

$$\sup_{x\in K} |u(x)| \leqslant \overline{C}(1 + \overline{R}_n^{2m-2}), \tag{3.1}$$

где $\overline{R}_n = \overline{R}_n(K) = \sup_{y\in\partial D_n} \operatorname{dist}(y, K)$.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{U}_0 = \mathscr{U}_0(C)$ множество решений граничной задачи* (1.1)–(1.2) *в области D с $V = 0$ и граничными значениями из множества $\mathscr{G}_0(C)$. Тогда существует константа $R_0 = R_0(C, d, m)$ такая, что для любого компакта $K \subset D$ с $R(K) \geqslant R_0$ и любых двух функций $u_1, u_2 \in \mathscr{U}_0$ при некоторой константе $\overline{C} = \overline{C}(K, C, d, m)$ выполнено неравенство*

$$\sup_{x\in K} \left| \frac{u_1(x)}{u_2(x)} - 1 \right| \leqslant \overline{C}. \tag{3.2}$$

Теорема 3. *Рассмотрим последовательность задач* (1.1)–(1.2) *в областях D_n, регулярно расширяющихся к $\mathbf{R}^d$. Тогда для любого компакта $K \subset D_0$ существует константа $\overline{C} = \overline{C}(K, C, d, m)$ такая, что для любых двух решений $u_1^{(n)}, u_2^{(n)} \in \mathscr{U}_0^{(n)}$ граничной задачи* (1.1)–(1.2) *с граничными условиями из класса $\mathscr{G}_0^{(n)}(C)$*

$$\sup_{x\in K} \left| \frac{u_1(x)}{u_2(x)} - 1 \right| \leqslant \frac{\overline{C}}{R_n^2(K)} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{3.3}$$

Доказательство теоремы 1. Радиальная часть броуновского движения $|B(t)|$ является процессом Бесселя порядка $\nu = d/2 - 1$. Пусть $\tau_R = \inf[t\colon |B(t)| = R]$. Согласно [3, § 2.4, формула 2.0.1], преобразование Лапласа $\psi_R(s, x) = \mathbf{E}_x e^{-s\tau_R}$ можно представить в виде

$$\psi_R(s, x) = \frac{x^{-\nu} \mathrm{I}_\nu(x\sqrt{2s})}{R^{-\nu} \mathrm{I}_\nu(R\sqrt{2s})}, \qquad x \leqslant R, \tag{3.4}$$

где I_ν — модифицированная функция Бесселя: $\mathrm{I}_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$, и J_ν — стандартная функция Бесселя. Используя хорошо известное асимптотическое разложение

$$\mathrm{I}_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)}, \qquad x \ll 1,$$

находим моменты $\mathbf{E}_x \tau_R^l$ при $x \leqslant R$, например

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x \tau_R &= \frac{R^2 - x^2}{2(\nu + 1)}, \\
\mathbf{E}_x \tau_R^2 &= \frac{(R^2 - x^2)(R^2\nu + 3R^2 - x^2\nu - x^2)}{8(\nu + 2)(\nu + 1)^2}, \\
\mathbf{E}_x \tau_R^3 &= \frac{(R^2 - x^2)B(R, x)}{48(\nu + 3)(\nu + 2)(\nu + 1)^3},
\end{aligned}$$

где $B(R, x) = R^4\nu^2 + 8R^4\nu + 19R^4 - 10R^2x^2\nu - 2R^2x^2\nu^2 - 8R^2x^2 + x^4\nu^2 + 2x^4\nu + x^4$. Здесь, как и ранее, $\nu = d/2 - 1$. Легко проверить, что $\sup_{x\in K} \mathbf{E}_x \tau_R^l \sim l!\, b(K, l, \nu) R^{2l}$ при $R \to \infty$ и $x \in K$. Теперь результат непосредственно следует из (2.6), поскольку $\mathbf{E}_x \tau^l \leqslant \mathbf{E}_x \tau_{\overline{R}}^l$.

Доказательство теоремы 2. Снова используя представление (2.6), получаем:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in K} \left| \frac{u_1(x)}{u_2(x)} - 1 \right| \leqslant \sup_{x\in K} &\left(\frac{\mathbf{E}_x \tau^{m-1}}{(m-1)!} + C\left(\frac{\mathbf{E}_x \tau^{m-2}}{(m-2)!} + \dots + 1 \right) \right) \\
&\times \left(\frac{\mathbf{E}_x \tau^{m-1}}{(m-1)!} - C\left(\frac{\mathbf{E}_x \tau^{m-2}}{(m-2)!} + \dots + 1 \right) \right)^{-1} - 1.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Поскольку $\mathbf{E}_x\tau^{m-1}$ доминирует в (3.5) при $R = R(K) \geqslant R_0$, например, $\mathbf{E}_x\tau^{m-1} \geqslant \mathbf{E}_x\tau^{m-2}(\mathbf{E}_x\tau_R^{m-2})^{1/(m-2)}$, то правая часть соотношения (3.5) дает равномерную оценку.

Доказательство теоремы 3. Левая часть соотношения (3.3) не превосходит

$$\frac{b(m-1)R^{2m-2} + Cb(m-2)R^{2m-4} + \dots + Cb(1)R^2 + o(R)}{b(m-1)R^{2m-2} - Cb(m-2)R^{2m-4} - \dots - Cb(1)R^2 + o(R)} - 1, \tag{3.6}$$

где $b(j) = b(K, j, \nu)$. Разлагая (3.6) при $R \to \infty$, получаем оценку сверху вида $\overline{C}(K, C, d, m)/R^2$. Константу $\overline{C}(K, C, d, m)$ можно вычислить явно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aronszajn N.*, *Creese T. M.*, *Lipkin L. J.* Polyharmonic Functions. New York: Clarendon Press, 1983, 265 p.
2. *Balk M. B.* Polyanalytic Functions. Berlin: Academie-Verlag, 1991, 197 p.
3. *Бородин А. Н.*, *Салминен П.* Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы. СПб.: Лань, 2000, 639 с.
4. *Doléans-Dade C.*, *Meyer P.-A.* Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. — Lecture Notes in Math., 1970, v. 124, p. 77–107.
5. *Helms L. L.* Biharmonic functions and Brownian motion. — J. Appl. Probab., 1967, v. 4, p. 130–136.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977, 640 с.
7. *Vekua I. N.* New Methods for Solving Elliptic Equations. Amsterdam/New York: North-Holland/Wiley, 1967, 358 p.

Поступила в редакцию
10.X.2008

© 2009 г. ***НАДАРАЯ Э. А.***[*], ***СОХАДЗЕ Г. А.***[**], ***БАБИЛУА П. К.***[*]

О НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЯХ СОГЛАСИЯ, ОСНОВАННЫХ НА ОЦЕНКАХ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА ЯДРА

Построен критерий согласия, основанный на оценках плотности вероятностей Вольвертона–Вагнера. Изучен вопрос состоятельности, и для некоторых сближающихся альтернатив изучена асимптотика поведения мощности.

Ключевые слова и фразы: плотность распределения, критерий согласия, мощность критерия, состоятельность, предельное распределение.

1. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих плотность распределения $f(x)$. Требуется, основываясь на выборке $X_1, \dots, X_n$, проверить гипотезу

$$H_0\colon f(x) = f_0(x).$$

[*] Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, факультет точных и естественных наук, ул. Университетская, 2, 0143 Тбилиси, Грузия; e-mail: p_babilua@yahoo.com, elizbar.nadaraya@tsu.ge

[**] Кутаисский государственный университет им. А. Церетели, факультет точных и естественных наук, ул. Царицы Тамары, 59, 4600 Кутаиси, Грузия; e-mail: giasokhi1@i.ua