Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. Г. Михайлов, О пуассоновской аппроксимации для распределения числа пустых ячеек в неоднородной схеме размещения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 1, 184–189

DOI: 10.4213/tvp1720

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 3.14.141.228
20 апреля 2024 г., 04:50:05

7. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1966, 432 с.
8. *Ивницкий В. А.* О стационарных вероятностях состояний замкнутой звездообразной экспоненциальной сети массового обслуживания при зависимости вероятностей перехода от ее состояния. — Автоматика и вычислительная техника, 1994, № 6, с. 29–37.

Поступила в редакцию
11.V.1994

© 1997 г.

*МИХАЙЛОВ В. Г.**

О ПУАССОНОВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ПУСТЫХ ЯЧЕЕК В НЕОДНОРОДНОЙ СХЕМЕ РАЗМЕЩЕНИЯ[1)]

Исследуется неоднородная (т.е. допускающая различия в законах размещения частиц) полиномиальная схема размещения частиц по ячейкам. Получены явные оценки точности пуассоновской аппроксимации для распределения числа пустых ячеек в произвольно заданном подмножестве ячеек. В доказательстве основной теоремы используется комбинация метода Чена–Стейна с методом одного вероятностного пространства, изложенная в монографии А. Д. Барбура, Л. Холста и С. Янсона «Пуассоновская аппроксимация» [4].

Ключевые слова и фразы: случайные размещения, неоднородная схема, число пустых ячеек, пуассоновская аппроксимация, метод Чена–Стейна.

Рассмотрим неоднородную схему размещения частиц по ячейкам, определяемую следующим образом. Имеются N ячеек, занумерованных числами от 1 до N, в которые независимо бросают n частиц, причем i-й частице ($i = 1, \dots, n$) отвечает свой набор вероятностей $p_{i1}, \dots, p_{iN}$ попадания частицы в ячейки. Разумеется, эти наборы вероятностей могут и совпадать. Если все они одинаковы ($p_{1k} = \dots = p_{nk} = p_k$, $k = 1, \dots, N$), то мы получаем обычную полиномиальную схему размещения частиц по ячейкам. При $p_{ik} = 1/N$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, N$, получаем равновероятную полиномиальную схему. (По поводу терминологии теории случайных размещений отсылаем к монографии [1].) Неоднородная полиномиальная схема (далее называем ее просто неоднородной) является естественным обобщением полиномиальной схемы. Она возникает в задачах о проверке свойств статистической однородности последовательностей случайных и псевдослучайных чисел. Ясно, что при не слишком больших различиях в законах размещения отдельных частиц она должна обладать многими свойствами полиномиальной схемы. В связи с этим возникает задача описания областей допустимых различий законов размещения, в пределах которых сохраняются те или иные свойства однородной полиномиальной схемы. При исследовании неоднородных схем удается использовать некоторые из традиционных для теории случайных размещений методов: метод моментов, метод одного вероятностного пространства, аппроксимацию разделимых статистик суммами случайных величин с малым числом

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Вавилова, 42, 117966 Москва, ГСП-1, Россия.

[1)]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96-01-00531.

зависимостей (последний прием использован, например, в работах [2] и [3]). В настоящей заметке мы исследуем точность пуассоновской аппроксимации для распределения числа пустых ячеек в неоднородной полиномиальной схеме, используя для этого комбинацию метода Чена–Стейна с методом одного вероятностного пространства, изложенную в книге [4].

Пусть $J \subseteq \{1, \dots, N\}$ есть некоторый набор ячеек. Обозначим через μ_r^J число ячеек в J, содержащих после размещения всех частиц ровно по r частиц каждая, а через $d(J, \lambda^J)$ обозначим расстояние по вариации между распределением случайной величины μ_0^J и распределением Пуассона с параметром $\lambda^J = \mathbf{E}\mu_0^J$. Пусть q_k — вероятность события, состоящего в том, что k-я ячейка осталась пустой:

$$q_k = \prod_{i=1}^{n}(1 - p_{ik}). \tag{1}$$

Пусть b_i^J — вероятность события, состоящего в том, что i-я частица распределилась в ячейку из множества J отдельно от остальных частиц:

$$b_i^J = \sum_{k \in J} p_{ik} \prod_{l \neq i}(1 - p_{lk}). \tag{2}$$

Теорема 1. *Выполняется неравенство*

$$d(J, \lambda^J) < \min\left\{1, \frac{1}{\lambda^J}\right\}\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i^J)^2 + \sum_{k \in J} q_k^2\right). \tag{3}$$

Рассмотрим случаи обычных полиномиальной и равновероятной полиномиальной схем. Используя соотношения

$$\sum_{k \in J} q_k = \mathbf{E}\mu_0^J, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i^J = \mathbf{E}\mu_1^r, \tag{4}$$

получаем следующие утверждения.

Следствие 1.1. *Для однородной полиномиальной схемы справедливо неравенство*

$$d(J, \lambda^J) < \min\left\{1, \frac{1}{\lambda^J}\right\}\left(\frac{1}{n}\left(\mathbf{E}\mu_1^J\right)^2 + \sum_{k \in J} q_k^2\right).$$

Следствие 1.2. *Для равновероятной полиномиальной схемы справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} d(J, \lambda^J) &< \min\left\{1, \frac{1}{\lambda^J}\right\}\left(\frac{1}{n}\left(\mathbf{E}\mu_1^J\right)^2 + \frac{1}{|J|}\left(\mathbf{E}\mu_0^J\right)^2\right) \\ &= \min\left\{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n, \frac{1}{|J|}\right\}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\left(\frac{n|J|^2}{(N-1)^2} + |J|\right). \end{aligned}$$

Последнее равенство проверяется непосредственно, исходя из равенств (1), (2) и (4).

Теорема 1 позволяет также доказать ряд предельных теорем для случайной величины μ_0^J при $|J| \to \infty$ и согласованном изменении остальных параметров схемы. Их формулировки выглядят наиболее просто в случае, когда изменение вероятностей p_{ik} при переходе к пределу подчиняется условиям

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n,\, k \in J} p_{ik} \leqslant p = \text{const} < 1, \tag{5}$$

$$\exists C < \infty\colon \max_{k\in J}\sum_{i=1}^{n} p_{ik} \leqslant C \min_{k\in J}\sum_{i=1}^{n} p_{ik}. \tag{6}$$

Условия (5) и (6) представляются достаточно естественными, они мало связаны с неодинаковостью законов размещения частиц и призваны отсечь разного рода патологические случаи, затрудняющие доказательство. Условие (5) исключает варианты, когда частицы имеют вырожденные или сближающиеся с ними при переходе к пределу распределения. Условие (6) означает, что среднее число частиц в разных ячейках имеет при переходе к пределу одинаковый порядок роста. Пусть

$$\alpha(J) = \min_{k\in J}\sum_{i=1}^{n} p_{ik}. \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть* $|J| \to \infty$ *и выполнены условия* (5) *и* (6). *Тогда*

$$d(J, \lambda^J) = O\Big((\alpha(J)+1)\,e^{-\alpha(J)}\Big). \tag{8}$$

Заметим, что предельное поведение числа пустых ячеек μ_0 в равновероятной и в полиномиальной схемах принято описывать в терминах областей изменения параметров (см. [1, с. 13–14, 111–112]). А именно, считается, что изменение параметров равновероятной схемы отвечает *правой промежуточной области*, если выполняется условие $\lambda = \mathbf{E}\mu_0 \to \infty$, $\alpha \to \infty$, и отвечает *правой крайней области*, если $\lambda \to \mathrm{const} < \infty$, $\alpha \to \infty$. Здесь $\alpha = n/N$, т.е. имеет тот же смысл, что величина $\alpha(J)$ в нашем случае. Аналогичными соотношениями описываются эти области и в полиномиальной схеме размещения, где $\alpha = \min np_k$. Такое деление объясняется разницей в предельных законах для числа пустых ячеек: в правой промежуточной области выполняется центральная предельная теорема, тогда как в правой крайней области имеет место предельная теорема Пуассона. Сформулированная выше теорема 2 показывает, что аналогичное деление возможно и в рассматриваемом нами случае неоднородных схем, причем не только для общего числа пустых ячеек, но и для случайной величины μ_0^J при произвольном множестве J. Определим для случайной величины μ_0^J в неоднородной полиномиальной схеме, подчиняющейся условиям (5) и (6), *правую промежуточную и правую крайнюю области* условиями $\lambda^J \to \infty$, $\alpha(J) \to \infty$ и $\lambda^J \to \lambda_0 < \infty$, $\alpha(J) \to \infty$, соответственно. Напомним, что величина $\alpha(J)$ определяется формулой (7).

Следствие 2.1. *В правой промежуточной области изменения параметров функция распределения случайной величины* $(\mu_0^J - \lambda^J)(\lambda^J)^{-1/2}$ *сходится к стандартной нормальной функции распределения.*

Следствие 2.2. *В правой крайней области изменения параметров функция распределения случайной величины* μ_0^J *сходится к функции распределения закона Пуассона с параметром* λ_0.

Перейдем к доказательствам.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через I_k индикатор случайного события, состоящего в том, что k-я ячейка осталась пустой. Тогда

$$\mathbf{E}I_k = \mathbf{P}\{I_k = 1\} = q_k = \prod_{i=1}^{n}(1 - p_{ik}) \tag{9}$$

и $\mu_0^J = \sum_{k\in J} I_k$. Предположим теперь, что выполняется условие

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n,\, k\in J} p_{ik} < 1. \tag{10}$$

Рассмотрим случайные величины $\mu_0^J(k)$, $k \in J$, с распределениями

$$\mathcal{L}\Big(\mu_0^J(k)\Big) = \mathcal{L}(\mu_0^J - I_k \mid I_k = 1).$$

Нетрудно понять, что распределение случайной величины $\mu_0^J(k)$ совпадает с распределением случайной величины μ_0^J в неоднородной схеме размещения n частиц по ячейкам $\{1,\dots,N\}\backslash\{k\}$ с вероятностями

$$p_{is}(k) = \frac{p_{is}}{1-p_{ik}}, \qquad s \in \{1,\dots,N\}\backslash\{k\}. \tag{11}$$

Пусть случайные величины $\mu_0^J(k)$ заданы на одном вероятностном пространстве с величиной μ_0^J. Тогда согласно оценке метода Чена–Стейна (см., например, неравенства (2.1.2) в [4] или теорему 1 в [5])

$$d(J,\lambda^J) \leqslant \min\left\{1,\ \frac{1}{\lambda^J}\right\} \sum_{k\in J} q_k \mathbf{E}\left|\mu_0^J - \mu_0^J(k)\right|. \tag{12}$$

Искомое построение аналогично построению для обычной полиномиальной схемы (см. главу 6 книги [4]). Случайная величина $\mu_0^J(k)$ реализуется в нашей схеме размещения одновременно с величиной μ_0^J следующим образом. При размещении частиц каждая частица, попавшая в k-ю ячейку, переразмещается (независимо от всего предшествующего) по остальным ячейкам с зависящими от номера частицы вероятностями (11). Это переразмещение частиц не увеличивает число пустых в множестве ячеек $J\backslash\{k\}$. Поэтому величина под знаком модуля в правой части (12) неотрицательна. Следовательно,

$$\mathbf{E}\left|\mu_0^J - \mu_0^J(k)\right| = \mathbf{E}\mu_0^J - \mathbf{E}\mu_0^J(k). \tag{13}$$

Осталось вычислить выражение в правой части этого равенства, что сравнительно легко делается с помощью (9) и (11). Имеем:

$$\mathbf{E}\mu_0^J = \sum_{s\in J}\prod_{i=1}^n (1-p_{is}),$$

$$\mathbf{E}\mu_0^J(k) = \sum_{s\in J\backslash\{k\}}\prod_{i=1}^n\left(1-\frac{p_{is}}{1-p_{ik}}\right) = \sum_{s\in J\backslash\{k\}}\prod_{i=1}^n(1-p_{is})\left(1-\frac{p_{is}p_{ik}}{(1-p_{is})(1-p_{ik})}\right).$$

Используя эти формулы, получаем

$$\sum_{k\in J} q_k \mathbf{E}\mu_0^J = \sum_{k\in J} q_k^2 + \sum_{\substack{k,s\in J\\ k\neq s}}\prod_{i=1}^n (1-p_{ik})(1-p_{is}), \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k\in J} q_k \mathbf{E}\mu_0^J(k) &= \sum_{k\in J}\sum_{\substack{s\in J\\ s\neq k}}\prod_{i=1}^n (1-p_{ik})(1-p_{is})\left(1-\frac{p_{is}p_{ik}}{(1-p_{is})(1-p_{ik})}\right)\\ &> \sum_{k\in J}\sum_{\substack{s\in J\\ s\neq k}}\left(1-\sum_{t=1}^n\frac{p_{ts}p_{tk}}{(1-p_{ts})(1-p_{tk})}\right)\prod_{i=1}^n(1-p_{ik})(1-p_{is})\\ &> \sum_{k\in J}\sum_{\substack{s\in J\\ s\neq k}}\prod_{i=1}^n(1-p_{ik})(1-p_{is}) - \sum_{t=1}^n\left\{\sum_{k\in J} p_{tk}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq t}}^n(1-p_{ik})\right\}^2.\end{aligned} \tag{15}$$

Выражение в скобках в вычитаемом в правой части последней цепочки неравенств равно b_k^J (см. формулу (2)). Поэтому взяв разность оценок (14) и (15), приходим к неравенству

$$\sum_{k\in J} q_k\Big(\mathbf{E}\mu_0^J - \mathbf{E}\mu_0^J(k)\Big) < \sum_{k\in J} q_k^2 + \sum_{t=1}^n (b_t^J)^2. \tag{16}$$

Из (12), (13) и (16) следует (3).

Рассмотрим теперь общий случай. Введем обозначение

$$K(J) = \left\{k \in J\colon \max_i p_{ik} < 1\right\}.$$

Для множества $K(J)$ условие (6) уже выполнено. По доказанному выше получаем неравенство (3) для величины $\mu_0^{K(J)}$. Теперь осталось заметить, что $\mu_0^{K(J)} = \mu_0^J$, а выражение в правой части неравенства (3) не уменьшится, если в нем множество $K(J)$ заменить множеством J. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть μ_0 — число ячеек в определенной выше неоднородной схеме размещения, $\lambda = \mathbf{E}\mu_0$ и $d(\lambda)$ — расстояние по вариации между распределением случайной величины μ_0 и пуассоновским распределением с параметром λ. Пусть b_i — вероятность события, состоящего в том, что i-я частица распределилась отдельно от остальных частиц (т.е. в предшествующих обозначениях $b_i = b_i^{\{1,\dots,N\}}$). Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1.3. *Выполняется неравенство*

$$d(\lambda) < \min\left\{1, \frac{1}{\lambda}\right\}\left(\sum_{i=1}^n b_i^2 + \sum_{k=1}^N q_k^2\right).$$

Получение оценок для общего числа пустых ячеек в неоднородной полиномиальной схеме и было первоначальной целью проведенного исследования. Однако оказалось, что доказательство утверждений типа следствия 1.3 проводится относительно просто лишь при дополнительном ограничении $\max_{i,k} p_{ik} < 1$. Чтобы отбросить это чисто техническое условие, приходится проводить рассуждения в несколько более общей постановке теоремы 1, которая, впрочем представляет не меньший интерес.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Обратимся сначала к формуле (1). Как нетрудно убедиться, при $k \in J$

$$q_k = \prod_{i=1}^n (1 - p_{ik}) < \exp\left\{-\sum_{i=1}^n p_{ik}\right\} \leqslant e^{-\alpha(J)}.$$

Поэтому, используя первое из равенств (4), получаем

$$\sum_{k\in J} q_k^2 < e^{-\alpha(J)}\mathbf{E}\mu_0^J = e^{-\alpha(J)}\lambda^J. \tag{17}$$

Теперь оценим другое слагаемое в правой части неравенства (3). Используя формулу (2), получаем

$$\sum_{i=1}^n (b_i^J)^2 = \sum_{k\in J} A_{ik} \prod_{t=1}^n (1 - p_{tk}), \tag{18}$$

где

$$A_{ik} = \sum_{s\in J} \prod_{t=1}^n (1 - p_{ts}) \sum_{i=1}^n \frac{p_{ik}p_{is}}{(1 - p_{ik})(1 - p_{is})}.$$

Воспользуемся неравенствами (5) и (6) для оценивания величины A_{ik} сверху:

$$\begin{aligned} A_{ik} &\leqslant \frac{1}{(1-p)^2} \sum_{s\in J} \prod_{t=1}^n (1 - p_{ts}) \sum_{i=1}^n p_{ik}p_{is} \\ &\leqslant \frac{1}{(1-p)^2} \sum_{i=1}^n \left(p_{ik} \sum_{s\in J} p_{is}\right) \max_s \prod_{t=1}^n (1 - p_{ts}) \end{aligned}$$

$$< \frac{1}{(1-p)^2} \sum_{i=1}^{n} p_{ik} \exp\left\{ -\min_s \sum_{i=1}^{n} p_{is} \right\} \leqslant \frac{C\alpha(J)}{(1-p)^2} e^{-\alpha(J)}. \tag{19}$$

Подставим оценки (17)–(19) в (3):

$$d(J, \lambda^J) < \min\{\lambda^J, 1\} e^{-\alpha(J)} \left\{ \frac{C\alpha(J)}{(1-p)^2} + 1 \right\}. \tag{20}$$

Из этого неравенства следует равенство (8). Теорема 2 доказана.

Автор признателен А. М. Зубкову за интерес к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения. М.: Наука, 1976.
2. *Михайлов В. Г.* Об асимптотической нормальности симметрических разделимых статистик в неоднородной схеме. — Дискретн. матем., 1989, т. 1, в. 2, с. 15–27.
3. *Дьяконова Е. Е., Михайлов В. Г.* О достаточных условиях асимптотической нормальности разделимых статистик в неоднородной схеме размещения. — Дискретн. матем., 1991, т. 3, в. 1, с. 145–151.
4. *Barbour A. D., Holst L., Janson S.* Poisson Approximation. Oxford: Oxford Univ. Press, 1992.
5. *Janson S.* Coupling and Poisson approximation. — Acta Appl. Math., 1994, v. 34, Nos. 1&2, p. 5–15.

Поступила в редакцию
1.II.1996

© 1997 г.

ПИСАНЕЦ С. И.*

О СУЩЕСТВОВАНИИ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА В $\mathbf{R}^m$

В данной работе доказано существование сильных решений стохастических уравнений диффузионного типа с непрерывными коэффициентами.

Ключевые слова и фразы: **базовое вероятностное пространство, стохастическое дифференциальное уравнение, сильное решение, существование, представление сильного решения, единственность.**

Пусть $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_T^0, \mathbf{P}\}$ — вероятностное пространство, $\mathbf{R}^m$ — конечномерное евклидово пространство размерности m. Рассмотрим в $\mathbf{R}^m$ стохастическое уравнение диффузионного типа с непрерывными коэффициентами

$$d\xi_t = \alpha_t(\xi)\, dt + B_t(\xi)\, dw_t, \qquad \xi_0 = x_0, \quad x_0 \in \mathbf{R}^m, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

где функции $\alpha_t(x)$, $B_t(x)$ определены на произведении пространств $[0,T] \times C_{[0,T]}(\mathbf{R}^m)$, непрерывны по совокупности переменных, при каждом $t \leqslant T$ измеримы относительно

*Институт математики НАНУ, отдел теории случайных процессов, Терещенковская 3, Киев-4, Украина.