Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

П. Л. Рубин, Квантовая динамика как случайный процесс в фазовом пространстве, *ТМФ*, 1997, том 110, номер 3, 454–458

DOI: 10.4213/tmf981

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.217.116.183
20 апреля 2024 г., 13:54:24

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 110, № 3
март, 1997

П. Л. Рубин*

КВАНТОВАЯ ДИНАМИКА КАК СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Показано, что квантовая динамика может рассматриваться как случайный процесс с независимыми приращениями в фазовом пространстве, но только этот процесс описывается псевдовероятностями, т.е. вероятностями, которые могут принимать наряду с положительными также и отрицательные значения. При этом эволюция совместной функции распределения координаты и импульса в точности совпадает с динамикой функции Вигнера квантовой системы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Попытки рассматривать квантовую динамику как случайный процесс имеют долгую историю (см. [1, 2]). Они порождены формальной аналогией между уравнением Шредингера и уравнением диффузии. Случайный процесс при этом рассматривается в координатном пространстве.

Иная точка зрения предложена в работе Мойала [3]. Эта работа основана на использовании функции Вигнера [4]. Уравнение динамики функции Вигнера напоминает кинетическое уравнение для некоторого марковского процесса в фазовом пространстве механической системы. Однако сам этот процесс не был рассмотрен. Цель настоящей работы – дать явное описание случайного процесса, функция распределения мгновенных значений которого в точности подчиняется уравнению для функции Вигнера.

При этом, однако, необходимо отметить следующее обстоятельство. Формально функцию Вигнера можно рассматривать как функцию распределения в фазовом пространстве, нормированную на 1, но не обязательно всюду положительную. Поэтому рассматриваемый в работе процесс, вообще говоря, не может быть описан положительными вероятностями. В этой ситуации представляется естественным несколько изменить терминологию, используя, например, приставку “псевдо” (псевдовероятность и т.п.). Однако такое изменение в дальнейшем лишь подразумевается и только изредка используется явно. Физическая интерпретация отрицательной вероятности здесь обсуждаться не будет.

2. СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

Сначала удобно рассмотреть некоторый класс случайных процессов как таковой. Его связь с квантовой механикой обсуждается позже. Пусть $Z(t)$ – n-мерная случайная век-

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН

тор-функция с независимыми приращениями, которые описываются следующей функцией распределения:

$$f_{\Delta Z(t)}(z,t) = \big\langle \delta\big[\Delta Z(t) - z\big]\big\rangle = \delta(z) + \nu(z,t)\Delta t + o(\Delta t). \tag{1}$$

Здесь $\Delta Z(t) = Z(t+\Delta t) - Z(t)$, угловые скобки означают статистическое усреднение и предполагается обычная нормировка функции распределения:

$$\int f_{\Delta Z(t)}(z,t)\, d^n z = 1.$$

Это означает, что

$$\int \nu(z,t)\, d^n z = 0. \tag{2}$$

Тем самым неравенство $\nu \geq 0$ невозможно, если $\nu \not\equiv 0$, и, значит, вероятности, вообще говоря, не всюду положительны. Далее, уравнение (1) позволяет предположить, что процесс Z "пуассоновского" (разрывного) типа: при $\Delta t \to 0$ не происходит сужения функции распределения.

Следующим шагом будет рассмотрение случайного поля $Z(x,t)$, где x – n-мерный вектор. Вместо уравнения (1) теперь принимается

$$f_{\Delta Z(x,t)}(z,t) = \big\langle \delta\big[\Delta Z(x,t) - z\big]\big\rangle = \delta(z) + \nu(z \mid x,t)\Delta t + o(\Delta t), \tag{3}$$

где $\Delta Z(x,t) = Z(x,t+\Delta t) - Z(x,t)$. При этом аналогично (2) должно быть

$$\int \nu(z \mid x,t)\, d^n z = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \zeta(x,t), \tag{5}$$

где $\zeta(x,t) = \partial Z(x,t)/\partial t$. Пусть $F(x,t)$ – функция распределения $x(t)$, т.е.

$$F(x,t) = \big\langle \delta\big[\tilde{x}(t) - x\big]\big\rangle.$$

Здесь предполагается усреднение по реализациям траекторий $\tilde{x}(t)$ (отмеченных тильдой во избежание путаницы обозначений).

Нетрудно получить динамическое (эволюционное) уравнение для функции распределения $F(x,t)$. Пусть $\Delta t \to 0$. Тогда

$$F(x,t+\Delta t) \simeq \big\langle \delta\big[\tilde{x}(t) + \Delta Z(\tilde{x}(t),t) - x\big]\big\rangle.$$

Вектор $\Delta Z(\tilde{x}(t),t)$ статистически не зависим от предыдущих событий. Поэтому, пользуясь соотношением (3), получаем

$$F(x,t+\Delta t) \simeq F(x,t) + \Delta t \int \delta(y+z-x)\nu(z \mid y,t)F(y,t)\, dy\, dz.$$

Отсюда уже непосредственно следует искомое динамическое уравнение:

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \int F(x-y,t)\nu(y \mid x-y,t)\,dy. \tag{6}$$

Если вместо (5) написать

$$\frac{dx}{dt} = A(x,t) + \zeta(x,t), \tag{7}$$

где A – неслучайный вектор, то вместо (6) будем иметь

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\big[F(x,t)A(x,t)\big] + \int F(x-y,t)\nu(y \mid x-y,t)\,dy. \tag{8}$$

При этом, используя (4), убеждаемся, что

$$\int \frac{\partial F(x,t)}{\partial t}\,dx = 0.$$

Это равенство означает просто сохранение нормировки.

Из приведенных рассуждений фактически следует, что любое уравнение

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\big[F(x,t)A(x,t)\big] + \int L(x,y)F(y,t)\,dy \tag{9}$$

можно рассматривать как кинетическое уравнение для соответствующего стохастического уравнения вида (7), если выполнено условие

$$\int L(x,y,t)\,dx = 0. \tag{10}$$

Для этого достаточно просто принять (см. (3))

$$\nu(x \mid y,t) = L(x+y,y,t),$$

и в силу (10) условие (4) оказывается выполненным.

3. КВАНТОВАЯ ДИНАМИКА

Рассмотрим (пока формально) следующую систему уравнений:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m}; \qquad \frac{dp}{dt} = \zeta(q,t). \tag{11}$$

Здесь пара переменных (q,p) общей размерности $2n$ играет роль прежнего набора переменных x; m – постоянная. Вектор $A = (p/m, 0)$ имеет ненулевые компоненты только в q-подпространстве, а случайное поле ζ зависит только от q и обладает ненулевыми компонентами лишь в p-подпространстве. Для функции распределения приращений ΔZ принимается

$$f_{\Delta Z(q,t)}(p) = \big\langle \delta\big[p - \Delta Z(q,t)\big]\big\rangle = \delta(p) + U_W(q,p)\Delta t + o(\Delta t). \tag{12}$$

Тем самым функция ν (см. (3)) теперь имеет вид

$$\nu(q', p' \mid q, p) = \delta(q') U_W(q, p')$$

и не зависит от времени.

Таким образом, система (11) является просто частным случаем (7) со специальным видом функций A и ζ. Это позволяет сразу написать эволюционное уравнение для функции распределения $F(q, p, t) = \langle \delta[q - \tilde{q}(t)]\, \delta[p - \tilde{p}(t)] \rangle$:

$$\frac{\partial F(q,p,t)}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial F(q,p,t)}{\partial q} + \int F(q, p - p', t) U_W(q, p')\, d^n p',$$

которое в точности совпадает с уравнением для функции Вигнера квантовой частицы с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(q)$$

(m – масса частицы, $U(q)$ – потенциал) [3], если

$$U_W(q,p) = \frac{1}{(\pi\hbar)^n} \int \frac{U(q-y) - U(q+y)}{i\hbar} e^{2ipy/\hbar}\, d^n y.$$

Таким образом, система стохастических дифференциальных уравнений (11) действительно описывает динамику квантовой частицы и может поэтому рассматриваться как новая математическая формулировка квантовой механики. При этом требуются лишь определенные (указанные выше) статистические свойства вектор-функции ζ.

Легко убедиться также, что усреднение уравнений (11) приводит в точности к классическим уравнениям движения, как того и следовало ожидать (теорема Эренфеста). Для этого необходимо учесть, что (12) описывает фактически приращения импульса, и поэтому обозначение $f_{\Delta Z(q,t)}(\Delta p)$ было бы хоть и более громоздким, но зато более наглядным, чем $f_{\Delta Z(q,t)}(p)$. Теперь нетрудно убедиться, что

$$\langle \Delta p \rangle = \int \Delta p U_W(q, \Delta p)\, d^n \Delta p = -\frac{\partial U}{\partial q},$$

откуда уже непосредственно вытекает сделанное утверждение.

Иногда вместо самой функции Вигнера используют тот или иной ее сглаженный вариант вида

$$F_Q(q,p,t) = \int Q(q - q', p - p') F(q', p', t)\, dq' dp',$$

например функцию Хусими [5]. При этом уравнение динамики такой сглаженной функции (если его вообще можно написать) уже, как правило, не имеет вида (9). Тем самым предлагаемый в настоящей работе подход, вообще говоря, не переносится непосредственно на функции F_Q.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, найдены стохастические дифференциальные уравнения, описывающие динамику квантовой частицы в фазовом пространстве (пока без учета спина). Они могут найти различные применения.

Однако в первую очередь хотелось бы отметить следующее. В настоящее время имеется ряд целенаправленных попыток найти обобщения квантовой механики (см. [6]). Результаты настоящей работы позволяют предположить, что некоторое обобщение квантовой механики действительно может потребоваться. В самом деле, случайный процесс с независимыми приращениями естественно считать лишь аппроксимацией некоторого реального процесса с конечным временем корреляции. В этом случае квантовая механика окажется лишь приближением к некоторой более точной теории.

В заключение автор благодарит Б. Л. Воронова, В. В. Лосякова и И. В. Тютина за обсуждение работы.

Список литературы

[1] *E. Nelson.* Dynamical Theories of Brownian Motion. Princeton, New Jersey: Princeton Univ., 1967.
[2] *M. Davidson.* J. Math. Phys. 1978. V. 19. № 9. P. 1975.
[3] *J. E. Moyal.* Proc. Cambridge. Phil. Soc. 1949. V. 45. Pt 1. P. 99.
[4] *E. Wigner.* Phys. Rev. 1932. V. 40. № 6. P. 749.
[5] *K. Husimi.* Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 1940. V. 22. P. 264.
[6] *S. Weinberg.* Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. № 5. P. 485.

Поступила в редакцию 2.VIII.1996 г.

P. L. Rubin

QUANTUM DYNAMICS AS STOCHASTIC PROCESS IN PHASE SPACE

It is shown that quantum dynamics is equivalent to a stochastic process in phase space. The process is described by normalized but not necessarily positive probability distributions ("pseudoprobabilities"). The dynamics of the distribution function of current process values literally coincides with that of the Wigner function of quantum system.