



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Чунаев, Об экстраполяции аналитических функций суммами вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 5, 794–797

DOI: 10.4213/mzm9347

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.128.199.210

27 апреля 2024 г., 10:54:12



Об экстраполяции аналитических функций суммами вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$

П. В. Чунаев

В заметке рассматривается задача экстраполяции аналитических в окрестности точки $z = 0$ функций посредством сумм вида (см. [1]–[4])

$$H_n(z) = H_n(h, \{\lambda_k\}; z) = \sum_{k=1}^n \lambda_k h(\lambda_k z), \quad z, \lambda_k \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Как аппарат приближения такие суммы впервые применялись в работе [1].

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n, n \in \mathbb{N}$, – некоторый набор комплексных чисел. Мы будем использовать известные формулы Ньютона (см., например, [5]):

$$S_1 = \sigma_1, \quad S_m = (-1)^{m+1} m \sigma_m - \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{m-j} S_j \sigma_{m-j}, \quad m = 2, 3, \dots, \quad (2)$$

выражающие степенные суммы $S_m = S_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \sum_{k=1}^n \lambda_k^m$ через элементарные симметрические многочлены

$$\sigma_m = \sigma_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_m}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где $\sigma_m = 0$ при $m > n$. Пусть $a > 1$. Выберем числа λ_k так, что

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \prod_{k=1}^{m-1} (ak - 1), \quad m = 2, \dots, n. \quad (3)$$

Тогда, как показано в работе [2], имеем

$$\max_{k=1, \dots, n} |\lambda_k| \leq a - (a-1)n^{-1}, \quad S_m = a^{m-1}, \quad m = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Пусть h – функция, аналитическая в области $D_r := \{z : |z| < r\}$, где $0 < r \leq \infty$ и $D_\infty = \mathbb{C}$, и имеющая тейлоровское разложение

$$h(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots$$

Если выбрать числа λ_k как указано в (3), то будем иметь

$$H_n^{(1)}(z) = H_n^{(1)}(h, a; z) := H_n\left(\frac{z}{a}\right) = \sum_{m=0}^{n-1} h_m z^m + \sum_{m=n}^{\infty} h_m S_{m+1} \left(\frac{z}{a}\right)^m,$$

где сумма $H_n(z/a)$ как функция от z определена и аналитична в D_r и

$$h(z) - H_n^{(1)}(z) = \sum_{m=n}^{\infty} h_m \left(1 - \frac{S_{m+1}}{a^m}\right) z^m, \quad z \in D_r. \quad (5)$$

Работа выполнена при поддержке ДПННТ (проект № 1.1348.2011), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (проект № 14.В37.21.0369) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00952-а, 11-01-97517-р_центр_а).

Отсюда получается экстраполяционная формула (см. [2]):

$$h(z) \approx H_n^{(1)}(z) = \sum_{k=1}^n \lambda_k h\left(\frac{\lambda_k}{a} z\right), \quad \left|\frac{\lambda_k}{a} z\right| \leq \beta_n |z| < |z| < r, \quad \beta_n := 1 - \frac{a-1}{an}, \quad (6)$$

т.е. значения функции h в точке z выражаются через ее значения в точках $\lambda_k a^{-1} z$ с меньшими модулями. При μ -кратной экстраполяции получается сумма $H_n^{(\mu)}(z) = H_n^{(\mu)}(h, a; z)$ вида (см. [1], [2])

$$H_n^{(\mu)}(z) = \sum_{k_1, \dots, k_\mu=1}^n \lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_\mu} h\left(\frac{\lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_\mu}}{a^\mu} z\right), \quad \left|\frac{\lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_\mu}}{a^\mu} z\right| \leq \beta_n^\mu |z|. \quad (7)$$

Остаточный член был оценен в [2] так:

$$|h(z) - H_n^{(\mu)}(z)| \leq n^\mu (1 + an) \sum_{m=n}^{\infty} |h_m| |z|^m, \quad z \in D_r. \quad (8)$$

Как видно из (8), при увеличении n при фиксированном μ оценка остаточного члена ухудшается, но ухудшается оценка (7) радиуса круга, в котором лежат узлы экстраполяции $\lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_\mu} a^{-\mu} z$. Наоборот, при увеличении μ при фиксированном n оценка (7) для узлов улучшается, но ухудшается оценка (8). Поэтому в [2] был поставлен следующий

ВОПРОС. Можно ли путем сбалансированного выбора параметров n и μ сколь угодно точно экстраполировать значения функции h на окружность $|z| = r_1 < r$ при условии, что все узлы экстраполяции $\lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_\mu} a^{-\mu} z$ лежат в некотором фиксированном круге $|z| \leq r_0 < r_1$ (можно считать $r_1 = 1$)?

В работе [2] этот вопрос был решен положительно в случае целых функций конечного порядка. В настоящей работе положительное решение получено для произвольных аналитических в D_r функций, найдено явное выражение для остаточного члена μ -кратной экстраполяции и значительно улучшена оценка (8). Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА. Пусть h – функция, аналитическая в D_r , $0 < r \leq \infty$, $a > 1$. Тогда остаточный член μ -кратной экстраполяции имеет вид

$$h(z) - H_n^{(\mu)}(z) = \sum_{m=n}^{\infty} h_m \left(1 - \left(\frac{S_{m+1}}{a^m}\right)^\mu\right) z^m, \quad z \in D_r, \quad (9)$$

и справедлива (не зависящая от μ) оценка погрешности

$$|h(z) - H_n^{(\mu)}(z)| \leq \sum_{m=n}^{\infty} |h_m| |z|^m, \quad z \in D_r. \quad (10)$$

Если $r > 1$, $0 < r_0 < 1$, а числа $\mu_n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют равенству

$$\mu_n = \left\lceil \ln r_0 \cdot \ln^{-1} \left(1 - \frac{a-1}{an}\right) \right\rceil + 1, \quad (11)$$

где $[\cdot]$ – целая часть, то при $n \rightarrow \infty$ суммы $H_n^{(\mu_n)}(z)$ равномерно сходятся к $h(z)$ на окружности $|z| = 1$, причем все узлы экстраполяции лежат в круге $|z| < r_0$.

ПРИМЕЧАНИЕ 1. Из (7) следует, что при увеличении кратности экстраполяции с фиксированным n радиусы кругов, в которых лежат узлы экстраполяции, стремятся к нулю как геометрическая прогрессия со знаменателем β_n (число узлов, естественно, возрастает). При этом оценка погрешности (10) не ухудшается. Отметим еще, что для μ -кратной экстраполяции используется не более $C_{n+\mu-1}^\mu$ различных узлов, хотя сумма $H_n^{(\mu)}$ содержит $n^\mu > C_{n+\mu-1}^\mu$ слагаемых.

ПРИМЕЧАНИЕ 2. Экстраполяция суммами вида (1) в некоторых случаях дает более точные результаты, чем традиционная интерполяция (или экстраполяция) в корнях из единицы, т.е. по узлам $z_k = e^{2\pi i(k-1)/n}$, где $k = 1, \dots, n$. Пусть, например, $h(z) = (z - \rho)^{-1}$, $1 < \rho < 3/2$. При $n > 10$ выберем z из условий $z^n = -1$ и $|z - \rho| < 1$. Тогда для соответствующего интерполяционного многочлена P , построенного по узлам z_k , имеем (см. [7; с. 192])

$$|h(z) - P(z)| = \left| \frac{z^n - 1}{(\rho^n - 1)(z - \rho)} \right| = \frac{2}{\rho^n(1 - \rho^{-n})|z - \rho|} \geq \frac{2}{\rho^n|z - \rho|^2}.$$

Отсюда и из (10) находим

$$|h(z) - H_n^{(1)}(z)| \leq \rho^{-n}|z - \rho|^{-1} < |z - \rho||h(z) - P(z)|.$$

ЛЕММА. При условии (3) имеем $S_m \in \mathbb{R}$ и $1 \leq S_m \leq a^{m-1}$, $m \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Из (2) и (3) получаем

$$S_m = \sum_{j=m-n}^{m-2} S_j \frac{\prod_{k=1}^{m-j-1} (ak - 1)}{(m-j)!} + S_{m-1}, \quad m \geq 2, \quad (12)$$

откуда следует, что $S_m \geq 1$ и последовательность $\{S_m\}$ возрастает.

Оценку сверху докажем по индукции. Она верна при $m = 1, \dots, n$ (см. (4)). Предположим, что при некотором $p \geq n$ неравенства $S_m \leq a^{m-1}$ выполняются для всех $m = 1, \dots, p-1$, и докажем, что $S_p \leq a^{p-1}$. Имеем

$$\begin{aligned} S_p &= \sum_{j=p-n}^{p-2} S_j \frac{\prod_{k=1}^{p-j-1} (ak - 1)}{(p-j)!} + S_{p-1} \leq a^{p-2} \sum_{j=p-n}^{p-1} \frac{\Gamma(p-j-a^{-1})}{\Gamma(1-a^{-1})(p-j)!} \\ &= \frac{a^{p-2}}{\Gamma(1-a^{-1})} \sum_{l=1}^n \frac{\Gamma(l-a^{-1})}{l!} := a^{p-2} V(a), \end{aligned}$$

где неравенство получается из предположения индукции и известного свойства гамма-функции $\Gamma(z+n) = z(z+1)\cdots(z+n-1)\Gamma(z)$ при $z = 1 - a^{-1}$. Для завершения доказательства покажем, что $V(a) < a$. Действительно,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \Gamma(l - a^{-1}) = \Gamma(-a^{-1}) + \Gamma(1 - a^{-1})V(a) + \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{1}{l!} \Gamma(l - a^{-1}),$$

причем в этом равенстве левая часть равна нулю (см. [6; с. 565]). Поэтому

$$V(a) = -\frac{\Gamma(-a^{-1})}{\Gamma(1-a^{-1})} - \frac{\sum_{l=n+1}^{\infty} \Gamma(l - a^{-1})/l!}{\Gamma(1-a^{-1})} = a - \frac{\sum_{l=n+1}^{\infty} \Gamma(l - a^{-1})/l!}{\Gamma(1-a^{-1})} < a.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Преобразуем сумму в (7):

$$\begin{aligned} H_n^{(\mu)}(z) &= \sum_{k_1, \dots, k_\mu=1}^n \lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_\mu} \sum_{m=0}^{\infty} h_m \left(\frac{\lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_\mu}}{a^\mu} z \right)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_m}{a^{m\mu}} \sum_{k_1, \dots, k_\mu=1}^n (\lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_\mu})^{m+1} z^m = \sum_{m=0}^{\infty} h_m \left(\frac{S_{m+1}}{a^m} \right)^\mu z^m. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом равенств (4) получаем формулу (9) для остаточного члена, откуда с учетом леммы получается оценка погрешности (10).

Наконец, из (6), (7) и (11) следует, что при указанных μ_n все узлы экстраполяции лежат в круге $|z| \leq r_0 < 1$, а из (10) вытекает равномерная сходимость $H_n^{(\mu_n)}(z) \rightarrow h(z)$ на окружности $|z| = 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Данченко, *Матем. заметки*, **83**:5 (2008), 643–649. [2] V. I. Danchenko, P. V. Chunaev, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **176**:6 (2011), 844–859. [3] А. В. Фрянцев, *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **7**:2 (2007), 39–43. [4] П. В. Чунаев, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **270**, МАИК, М., 2010, 281–287. [5] А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры*, Физматлит, М., 1963. [6] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. В 3 т. Т. 1. Элементарные функции*, Физматлит, М., 2003. [7] Дж. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*, ИЛ, М., 1961.

П. В. Чунаев

Владимирский государственный университет

им. А. Г. и Н. Г. Столетовых

E-mail: chunayev@mail.ru

Поступило

17.01.2012

Исправленный вариант

16.05.2012