

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Тарасов, О числе Хееша для плоскости Лобачевского, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 1, 97–104

DOI: 10.4213/mzm5251

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.133.139.105

17 мая 2024 г., 10:34:09





УДК 514.1

О числе Хееша для плоскости Лобачевского

А. С. Тарасов

В работе доказывается существование многоугольника на плоскости Лобачевского с любым заданным числом Хееша.

Библиография: 4 названия.

1. Постановка задачи. Напомним определение короны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Рассмотрим пространство $\mathcal{X}$ постоянной кривизны размерности n (E^n , S^n , H^n) и разбиение этого пространства или его части на многогранники P_i , изометричные заданному многограннику P . Назовем *нулевой короной* C_0 некоторой копии P_0 многогранника P сам многогранник P_0 . Далее, по индукции, k -й *короной* C_k назовем множество многогранников P_i , которые имеют хотя бы одну общую точку с многогранником из $(k-1)$ -й короны. При этом $(k-1)$ -я корона лежит целиком во внутренней k -й короны (рис. 1).

В частности, при рассмотрении разбиения только части пространства для приграничного многогранника существует только нулевая корона.

Слой S_k определяется как множество многогранников $C_k \setminus C_{k-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Рассмотрим всевозможные (как частичные так и полные) разбиения пространства копиями заданного многогранника P . Максимально возможный порядок короны для этого многогранника называется *числом Хееша*. Для многогранников, которыми можно замостить все пространство, число Хееша считается равным ∞ (в случае, если это не сфера).

В некоторых случаях число Хееша несложно вычислить. Например, для правильного N -угольника на Евклидовой плоскости при $N > 6$ число Хееша равно 0. Действительно, при $N > 6$ правильные N -угольники нельзя расположить так, чтобы полностью замостить окрестность вершины.

Проблема Хееша звучит следующим образом: для любого ли n существует многоугольник на Евклидовой плоскости с числом Хееша n [1]?

Эта проблема остается открытой. На данный момент найдены примеры многоугольников с числами Хееша от 0 до 5 (см. [2], [3]).

Основная техника создания таких примеров состоит в следующем: берем многоугольник, замощающий плоскость, и добавляем на его стороны соответствующие

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00565, 08-01-91202).

друг другу выступы и впадины. Если количество выступов не равно количеству впадин, то разница между количеством выступов и впадин с ростом порядка короны должна расти квадратично, в то время как количество многоугольников в граничном слое растет линейно. Это ограничивает максимальный порядок короны.

Аналогичный вопрос можно задать и для других пространств, в частности, для плоскости Лобачевского. Аргумент, который срабатывал на Евклидовой плоскости, уже не работает для плоскости Лобачевского. Например, Манн [1] доказал, что если взять правильный многоугольник, допускающий замощение плоскости Лобачевского, и добавить на каждую сторону впадину или выступ, то число Хееша данного многоугольника будет или 0, или ∞ . В настоящей работе доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Для любого натурального n на плоскости Лобачевского существует многоугольник Q_n , число Хееша которого равно n .*

2. Доказательство теоремы. Рассмотрим разбиение плоскости Лобачевского с символом Шлефли $\{K, 3\}$ ($K > 6$), т.е. разбиение на правильные K -угольники так, что в каждой вершине сходится ровно по 3 многоугольника. Для этого достаточно выбрать такой размер правильного K -угольника, чтобы все его углы были равны $2\pi/3$.

Обозначим этот многоугольник через T_K и приступим к построению выступов и впадин на сторонах этого многоугольника.

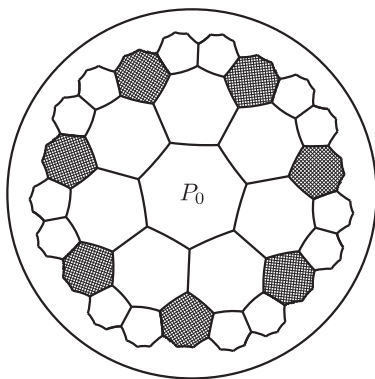


Рис. 1. Корона C_2 для T_7 ; серым цветом выделены многоугольники с двумя нижними сторонами (см. определение 3)

В существующих примерах рассматривался один тип выступов и впадин. То есть все выступы подходили всем впадинам. Мы же будем использовать одновременно выступы и впадины нескольких различных форм так, чтобы в данную впадину вставлялся выступ только строго определенной формы.

Выберем $4n+2$ различных форм выступов и соответствующих им впадин. Выступы и впадины должны быть симметричными так, чтобы в соответствующую впадину выступ вставлялся двумя симметричными способами. Формы выступов и впадин нужно выбирать так, чтобы они были достаточно малыми, и выступы и впадины, находящиеся на разных сторонах, не могли пересекаться между собой. Например,

в качестве выступа или впадины, соответствующих числу x , можно взять ломаную из 6 отрезков и сжатую перпендикулярно стороне в x раз (рис. 2, а)).

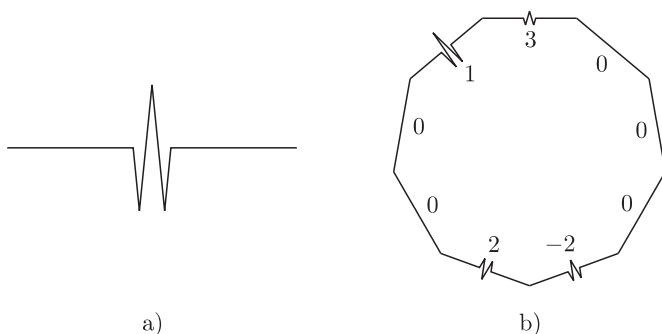


Рис. 2. Выступ и многоугольник, заданный последовательностью 0, 0, 0, 3, 1, 0, 0, 2, -2

Перенумеруем типы выступов числами от 1 до $4n + 2$, а типы впадин числами от -1 до $-4n - 2$ так, чтобы соответствующие выступы и впадины имели противоположные значения.

Будем обозначать сторону с выступом или впадиной номером типа, а сторону без выступа или впадины нулем. Таким образом, чтобы задать многоугольник Q_n , нам достаточно определить циклическую последовательность целых чисел из K элементов. Каждое число определяет, есть ли на стороне выступ (впадина), и если есть, то какой. Для определения возможного порядка короны нам достаточно рассматривать короны разбиения $\{K, 3\}$, где k сторонам многоугольников приписаны числа, сумма которых для каждого внутреннего ребра должна равняться 0.

Зададим последовательность, определяющую многоугольник Q_n . Эта последовательность состоит из набора специальных подпоследовательностей, разделенных подпоследовательностью 0, 0.

Вот список этих подпоследовательностей:

- 1) для всех целых i , $|i| \leq 4n + 2$, кроме -1 , подпоследовательность $0, i, 0$;
- 2) подпоследовательность $2, 1, 2$;
- 3) для $0 \leq k \leq n - 1$ подпоследовательность $-4k, -(1 + 4k), 3 + 4k, 4 + 4k$;
- 4) для $0 \leq k \leq n - 1$ подпоследовательность $-(2 + 4k), -(3 + 4k), 5 + 4k, 6 + 4k$.

Например, многоугольник Q_0 задается последовательностью

$$0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, -2, 0, 0, 0, 2, 1, 2, 0, 0,$$

а многоугольник Q_1 задается последовательностью

$$\begin{aligned} &0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 6, \\ &0, 0, 0, 0, -2, 0, 0, 0, 0, -3, 0, 0, 0, 0, -4, 0, 0, 0, 0, -5, 0, 0, 0, 0, -6, \\ &0, 0, 0, 2, 1, 2, 0, 0, 0, -1, 3, 4, 0, 0, -2, -3, 5, 6, 0, 0. \end{aligned}$$

Количество сторон многоугольника Q_n равно $K = 52n + 25$.

ЛЕММА 1. Для Q_n нельзя построить $(n + 1)$ -ю корону.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n = 0$ это очевидно, так как в многоугольнике Q_0 нет стороны -1 .

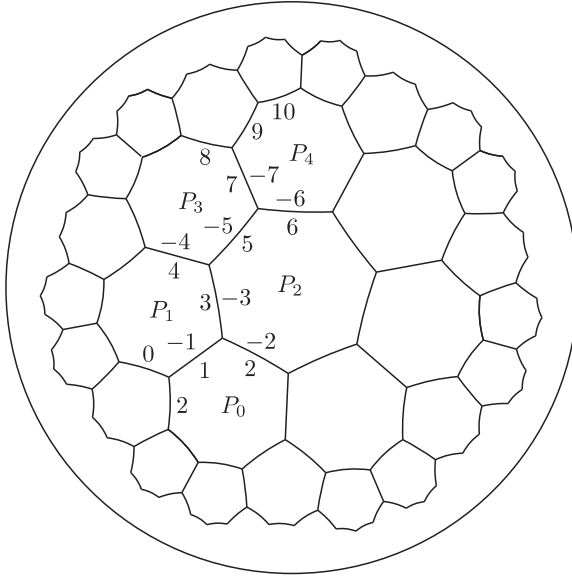


Рис. 3. Однозначная подстановка многоугольников P_i

Рассмотрим случай $n > 0$. Возьмем корону C_0 многоугольника P_0 (рис.). В ней есть последовательность сторон 2, 1, 2. К стороне 1 можно приставить многоугольник P_1 только последовательностью 0, -1 , 3, 4. К одной из соседних с 1 сторон 2 подходит ребро 3 из P_1 . Сюда подставляется однозначным образом многоугольник P_2 последовательностью -2 , -3 , 5, 6. При $n > 1$ к многоугольникам P_1 , P_2 однозначно приставляется многоугольник P_3 последовательностью -4 , -5 , 7, 8, а к P_3 и P_2 однозначно подставляется многоугольник P_4 последовательностью сторон -6 , -7 , 9, 10. Такая однозначная последовательность повторяется до многоугольника P_{2n} , после чего к многоугольникам P_{2n} , P_{2n-1} необходимо приставить еще один многоугольник со сторонами $-4n$, $-(4n + 1)$. Однако в многоугольнике Q_n нет такой последовательности сторон; значит, к этой части границы приставить ничего не удастся. Многоугольники P_{2n-1} , P_{2n} находятся на расстоянии не более чем n шагов от P_0 . Таким образом, $(n + 1)$ -ю корону построить невозможно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Дана корона C_k в разбиении $\{K, 3\}$. Для многоугольника R , лежащего в слое S_k , сторону e назовем *нижней*, если эта сторона общая с многоугольником из слоя S_{k-1} ; *боковой*, если эта сторона общая с многоугольником R' из того же слоя S_k ; *верхней*, если эта сторона лежит на границе короны C_k .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для многоугольника T_K разбиения $\{K, 3\}$ для любого k корона C_k односвязна (рис. 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем круг D_k радиусом $k + 1$ и построим его разбиение на области с K сторонами и K вершинами – криволинейные K -угольники (рис. 4).

Будем строить это разбиение по индукции, начиная с $k = 0$. Для $k = 0$ выберем на окружности K точек. Получаем, что D_0 состоит из одного K -угольника.

Далее, пусть у нас уже построен D_{k-1} – разбиение круга радиуса k . Чтобы получить разбиение D_k , построим разбиение в слое между окружностями радиуса k и $k+1$. Для каждой вершины на границе D_{k-1} , не являющейся концом радиального ребра, проведем радиальное ребро до границы D_k . Граница оказалась подразбита на дуги. Добавим для каждой такой дуги $K-4$ или $K-5$ вершин, подразбив ее на $K-3$ или $K-4$ дуг соответственно так, чтобы в ограниченной области было ровно K сторон. Эти K сторон разбиваются на три группы. Одна или две стороны находятся на границе D_{k-1} . Две стороны разделяют многоугольник от других многоугольников из этого же слоя, а остальные $K-3$ или $K-4$ стороны находятся на границе D_k . Легко видеть, что в каждой неграничной вершине сходится ровно три K -угольника.

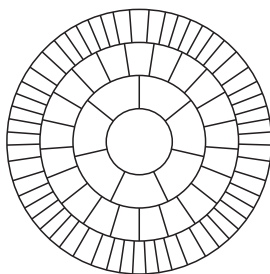


Рис. 4. Круг D_3 – топологический образ C_3 для $K = 7$

При стремлении $k \rightarrow \infty$ мы получаем разбиение плоскости D_∞ .

Теперь построим абстрактный комплекс A_∞ из многоугольников T_K , склеивая их комбинаторно эквивалентно D_∞ .

Построим отображение f комплекса A_∞ на плоскость Лобачевского, $f: A_\infty \rightarrow H^2$. Каждый многоугольник будем отображать в многоугольник, изометричный T_K (правильный K -угольник с углами $2\pi/3$). Выберем некоторый многоугольник P комплекса A_∞ и зафиксируем его отображение на плоскость. Далее, для каждого $P' \subset A_\infty$ выберем некоторую цепочку многоугольников, начинающихся с P и заканчивающихся в P' , в которой соседние многоугольники смежны по стороне, и будем последовательно строить отображение вдоль этой цепочки так, чтобы образы смежных многоугольников были по разные стороны относительно общего ребра. Такое построение проводится однозначно.

Отображение всего комплекса будет существовать, если образ многоугольника P' не зависит от выбора цепочки. Или, другими словами, для любой замкнутой цепочки начальный и конечный образы совпадают. В силу односвязности комплекса A_∞ это условие достаточно проверить для элементарных цепочек, обходящих вершину. А для них это верно в силу того, что сумма углов вокруг образа каждой вершины в точности равна 2π . Мы получаем, что существует изометрическое отображение комплекса на плоскость.

Построенные комплекс A_∞ и отображение f удовлетворяют условиям теоремы Александрова [4], из которой следует, что отображение f покрывает взаимнооднозначно всю плоскость Лобачевского. То есть $f(A_\infty) = \{K, 3\}$.

В частности, мы получили, что корона C_k является образом односвязного диска D_k , а значит, и сама является односвязным множеством.

Утверждение 1 доказано.

Так же из построения диска D_k видно, что у каждого многоугольника из слоя S_k , $k > 0$, есть одна или две нижние стороны (при $k = 1$ ровно одна), две боковые стороны и $K - 3$ или соответственно $K - 4$ верхние стороны. Для центрального многоугольника, составляющего C_0 , все стороны верхние.

ЛЕММА 2. При $k \leq n$ для многоугольника Q_n существует корона C_k . Причем выполняется следующее условие: в каждой паре соседних сторон на границе короны, принадлежащих разным многоугольникам, либо найдется нулевая сторона, либо типы сторон равны $4l$, $4l + 1$, где $0 \leq l \leq k$. При этом за стороной $4l + 1$ следует сторона $4l + 2$ (рис. 5).

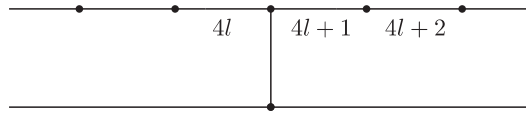


Рис. 5. Условие индукции в лемме 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k = 0$ эти условия, очевидно, выполняются, так как нет пары соседних многоугольников.

Пусть уже построена корона C_{k-1} . Заполним слой S_k многоугольниками так, чтобы к каждому общему ребру примыкали противоположные выступы. Обозначим через R копию многоугольника Q_n , которая ставится в текущую позицию. Для каждого возможного места нам требуется задать, как правильно развернуть многоугольник R . Будем расставлять многоугольники по шагам (рис. 6).

1) Рассмотрим места, куда вставляются многоугольники с двумя нижними сторонами, когда один из номеров границы короны C_{k-1} из этих двух сторон равен 0, а номер второй стороны x не равен 1.

Повернем многоугольник R последовательностью $0, 0, 0, -x, 0, 0, 0$. Обе боковые стороны R при этом нулевые.

2) Расставим оставшиеся многоугольники с двумя нижними сторонами. По предположению индукции номера сторон на границе – это пара вида $4l, 4l + 1$, где $0 \leq l \leq k - 1$ (включая вариант $0, 1$).

Тогда, при $k \leq n$ многоугольник R ставится однозначно последовательностью $0, 0, -4l, -(1 + 4l), 3 + 4l, 4 + 4l, 0, 0$. Боковые стороны имеют вид 0 и $4l + 3$. При максимальном $l = k - 1$ одна из боковых сторон равна $4(k - 1) + 3 = 4k - 1$.

3) Далее, расставляем многоугольники с одной нижней стороной -1 . Они ставятся однозначно (с точностью до симметрии) последовательностью сторон $0, 0, -1, 3, 4, 0, 0$.

Одна боковая сторона при этом нулевая, а вторая -3 .

Заметим, что между всеми многоугольниками, построенным по 2) и 3) пункту в k -м слое всегда есть место для, как минимум, двух многоугольников. Действительно, эти многоугольники строятся на разных блоках (подпоследовательностях), а между разными подпоследовательностями всегда есть, как минимум, две нулевые стороны.

Значит, на данном этапе у нас нет мест под многоугольники с двумя ненулевыми боковыми сторонами.

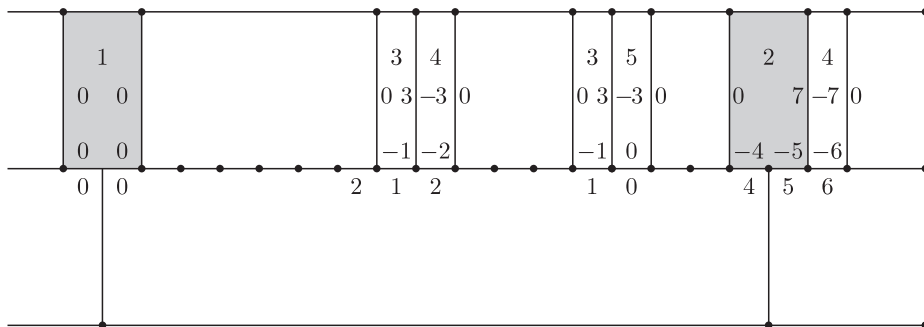


Рис. 6. Частично построенный k -й слой, поверх $(k-1)$ -го слоя, после 5 шагов; большое число – номер шага, на котором устанавливался многоугольник; серым цветом отмечены многоугольники с двумя нижними сторонами

4) Ставим многоугольники с одной нижней ненулевой стороной и одной ненулевой боковой стороной. Нижняя сторона при этом оказывается $-(2+4l)$, а боковая $-(3+4l)$.

Действительно, если боковая сторона -3 , значит, текущий и многоугольник сбоку стоят на сторонах 1, 2, т.е. нижняя сторона текущего многоугольника должна быть -2 .

Если боковая сторона имеет выступ другого типа, то это число вида $-(4l+3)$. Эта сторона была построена на втором шаге построения. Следовательно, по предположению индукции нижняя сторона многоугольника R должна быть $-(4l+2)$.

В этом случае многоугольник R подставляется однозначно последовательностью $0, 0, -(2+4l), -(3+4l), 5+4l, 6+4l, 0, 0$. Вторая боковая сторона многоугольника R при этом нулевая.

5) Расставим многоугольники с одной нижней нулевой стороной и боковой ненулевой стороной.

Боковая сторона при этом -3 . Многоугольник подставляется последовательностью $0, 0, 0, -3, 0, 0, 0$.

6) Теперь все незакрытые боковые стороны нулевые, а нижняя сторона не равна 1. Для заданной нижней стороны x подставим многоугольник последовательностью $0, 0, 0, -x, 0, 0, 0$.

Итак, при $k \leq n$ мы смогли успешно поставить k -й слой. Проверим, что выполняются условия индукции. Рассмотрим два соседних многоугольника на границе короны C_k . Если боковая сторона между ними была нулевая, то и соседние стороны на границе также нулевые, так как в каждой подпоследовательности по краям есть необходимое количество нулей.

Если боковая сторона не нулевая, то это сторона вида $\pm(4l + 3)$. При этом, из построения ясно, что стороны на границе оказываются $4l + 4$, $4l + 5$ или $4l + 4$, 0 для $0 \leq l \leq k - 1$. Это удовлетворяет условию индукции при $k \leq n$.

Из этих двух лемм следует теорема.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C. Mann, “Hyperbolic regular polygons with notched edges”, *Discrete Comput. Geom.*, **34:1** (2005), 143–166.
- [2] C. Mann, *On Heesch’s Problem and Other Tiling Problems*, Ph. D. Thesis, Univ. of Arkansas, Fayetteville, AR, 2001.
- [3] D. Eppstein, *Heesch’s problem*, <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/heesch/>.
- [4] А. Д. Александров, “О заполнении пространства многогранниками”, *Вестн. Ленинградск. ун-та*, 1954, № 2, 33–43.

А. С. Тарасов

Институт системного анализа РАН, г. Москва

E-mail: tarasov@isa.ru

Поступило

19.06.2008

Исправленный вариант

03.02.2010