В. М. Тарарин, О c-3-транзитивных группах автоморфизмов циклически упорядоченных множеств, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 1, 122–129

DOI: 10.4213/mzm333

Математические заметки

том 71 выпуск 1 январь 2002

УДК 512.544.43

О С-3-ТРАНЗИТИВНЫХ ГРУППАХ АВТОМОРФИЗМОВ ЦИКЛИЧЕСКИ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

В. М. Тарарин

Группа G автоморфизмов циклически упорядоченного множества $\langle X, C\rangle$ называется с-3-транзитивной, если для любых элементов $x_i, y_i \in X$ $(i=1,2,3)$, $C(x_1,x_2,x_3)$, $C(y_1,y_2,y_3)$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $g(x_i)=y_i$, $i=1,2,3$. Установлена простота группы всех автоморфизмов циклически упорядоченного множества в случае ее с-3-транзитивности. Дано описание с-3-транзитивных групп автоморфизмов с абелевым стабилизатором двух точек.

Библиография: 7 названий.

В данной заметке установлена простота группы всех автоморфизмов циклически упорядоченного множества в случае ее с-3-транзитивности, а также показано, что с-3-транзитивная группа автоморфизмов циклически упорядоченного множества X, $\operatorname{card}(X) \geqslant 4$, с абелевым стабилизатором двух точек изоморфна фактор-группе $\mathbf{PGL}_2^+(P)$ группы $\mathbf{GL}_2^+(P)$ матриц порядка два с положительными определителями по нормальной подгруппе $P^*\mathbf{E}_2$ скалярных матриц для некоторого линейно упорядоченного поля P.

Непустое множество X называется *циклически упорядоченным множеством* (*ЦУ множеством*) [1], если на X определено тернарное отношение C, обладающее следующими свойствами:

C1) если $C(x,y,z)$, то $x \neq y \neq z \neq x$;

C2) если $x \neq y \neq z \neq x$, то имеет место ровно одно из отношений $C(x,y,z)$ и $C(x,z,y)$;

C3) если $C(x,y,z)$, то $C(y,z,x)$;

C4) если $C(x,y,z)$ и $C(x,z,t)$, то $C(x,y,t)$.

Важный пример ЦУ множества – ЦУ множество $\mathbf{T}$ комплексных чисел на единичной окружности, если $C(x,y,z)$ означает, что числа x,y,z следуют друг за другом при обходе против часовой стрелки.

В дальнейшем $C(a_1,a_2,\dots,a_n)$, $n \geqslant 3$, означает, что $C(a_i,a_j,a_k)$ имеет место для всех $i<j<k$. Для элементов a, b ЦУ множества $\langle X, C\rangle$ полагаем $((a,b)) = \{x \in X \mid C(a,x,b)\}$, $[[a,b]] = ((a,b)) \cup \{a,b\}$. Если $\langle X, C\rangle$ – ЦУ множество и f – подстановка множества X, то f называется *автоморфизмом* ЦУ множества $\langle X, C\rangle$, если из $C(x,y,z)$ следует $C(f(x),f(y),f(z))$ для всех $x,y,z \in X$. *Группой автоморфизмов* ЦУ множества $\langle X, C\rangle$ называется любая подгруппа G группы $A(\langle X, C\rangle)$ всех автоморфизмов ЦУ

множества $\langle X, C\rangle$, рассматриваемая как группа, действующая на X. Через e обозначаем единичный элемент группы. Группа G *транзитивна*, если для любых $x, y \in X$ найдется $g \in G$ такой, что $g(x) = y$.

Группу G автоморфизмов ЦУ множества $\langle X, C\rangle$, $\operatorname{card}(X) \geqslant n$, будем называть с-$n$-*транзитивной* ($n \geqslant 3$), если для любых элементов $x_i, y_i \in X$, $i = 1, \dots, n$, $C(x_1, \dots, x_n)$, $C(y_1, \dots, y_n)$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $g(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n$.

Пример. Простейшим примером с-3-транзитивной группы является циклическая группа третьего порядка $A(\langle X, C\rangle)$ автоморфизмов ЦУ множества $\langle X, C\rangle$, состоящего из трех элементов x_1, x_2, x_3 с отношением $C = \{(x_1, x_2, x_3), (x_2, x_3, x_1), (x_3, x_1, x_2)\}$.

Пусть G – группа автоморфизмов ЦУ множества $\langle X, C\rangle$ и $a \in X$. Тогда из условий C1)–C4) следует, что отношение $\leqslant_a$ на X, определяемое по правилу:

C5) $x \leqslant_a y$, если и только если $x = a$ или $x = y$, или $C(a, x, y)$ является отношением линейного порядка, причем, для любого элемента g, принадлежащего *стабилизатору* $G_a = \{g \in G \mid g(a) = a\}$ в группе G точки a, выполняется свойство: из $x \leqslant_a y$ следует $g(x) \leqslant_a g(y)$ для любых $x, y \in X$. Таким образом, справедлива

Лемма 1. *Стабилизатор G_aв группе G автоморфизмов ЦУ множества $\langle X, C\rangle$ любой точки $a \in X$ является группой автоморфизмов линейно упорядоченного множества $\langle X, \leqslant_a\rangle$.*

Заметим, что группа G_a действует точно на множестве $X \setminus \{a\}$ и поэтому можно считать, что G_a является группой автоморфизмов линейно упорядоченного множества (ЛУ множества) $\langle X \setminus \{a\}, \leqslant_a\rangle$.

Необходимые сведения по теории групп автоморфизмов ЛУ множеств содержатся в [2].

Непосредственно из определения с-n-транзитивной группы автоморфизмов вытекает

Лемма 2. 1) С-n-*транзитивная группа автоморфизмов является транзитивной.*

2) С-n-*транзитивная группа автоморфизмов является* с-t-*транзитивной для любого натурального числа t, $3 \leqslant t \leqslant n$.*

Группа $G \neq \{e\}$ автоморфизмов ЛУ множества $\langle X, \leqslant\rangle$ называется о-n-*транзитивной* ($n \geqslant 2$) [2], если для любых элементов $x_1 < \dots < x_n$ и $y_1 < \dots < y_n$ множества X найдется $g \in G$ такой, что $g(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n$. Очевидно, что о-n-транзитивная группа транзитивна.

Лемма 3. *Группа G автоморфизмов ЦУ множества $\langle X, C\rangle$,* $\operatorname{card}(X) \geqslant 4$, *является* с-$n$-*транзитивной тогда и только тогда, когда стабилизатор G_a в группе G любой точки $a \in X$ является* о-$(n-1)$-*транзитивной группой автоморфизмов ЛУ множества $\langle X \setminus \{a\}, \leqslant_a\rangle$.*

Доказательство. Если G – с-n-транзитивная группа автоморфизмов ЦУ множества $\langle X, \mathrm{C}\rangle$, $\operatorname{card}(X) \geqslant 4$, и $a \in X$, то $\operatorname{card}(X \setminus \{a\}) \geqslant 3$ и, следовательно, найдутся элементы $a_1, a_2, a_3 \in X \setminus \{a\}$ такие, что $C(a, a_1, a_2, a_3)$. Из последнего отношения имеем $C(a, a_1, a_2)$, $C(a, a_2, a_3)$, откуда в силу леммы 2 найдется $g \in G$ такой, что $g(a) = a$, $g(a_1) = a_2$, $g(a_2) = a_3$. Таким образом, $g \in G_a$ и $g \neq e$ и, следовательно, в силу леммы 1

G_a является неединичной группой автоморфизмов ЛУ множества $\langle X \setminus \{a\}, \leqslant_a\rangle$, откуда, в частности, следует, что $X \setminus \{a\}$ – бесконечное множество. Если $x_1 <_a \cdots <_a x_{n-1}$ и $y_1 <_a \cdots <_a y_{n-1}$ – произвольные элементы ЛУ множества $\langle X \setminus \{a\}, \leqslant_a\rangle$, то по определению С5) порядка $\leqslant_a$ получаем $C(a, x_1, \dots, x_{n-1})$, $C(a, y_1, \dots, y_{n-1})$ и в силу с-n-транзитивности группы G найдется $g \in G$ такой, что $g(a) = a$, $g(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n-1$. Следовательно, стабилизатор G_a является о-$(n-1)$-транзитивной группой автоморфизмов ЛУ множества $\langle X \setminus \{a\}, \leqslant_a\rangle$.

Обратно, если стабилизатор G_a в группе G автоморфизмов ЦУ множества $\langle X, C\rangle$ любой точки $a \in X$ является о-$(n-1)$-транзитивной ($n \geqslant 3$) группой автоморфизмов ЛУ множества $\langle X \setminus \{a\}, \leqslant_a\rangle$, то легко заметить, что множество $X \setminus \{a\}$ бесконечно и группа G действует транзитивно на X. Пусть $C(x_1, \dots, x_n)$, $C(y_1, \dots, y_n)$, $x_i, y_i \in X$. Найдется элемент $g \in G$ такой, что $g(x_1) = y_1$. Тогда имеем $C(y_1, g(x_2), \dots, g(x_n))$. По определению С5) порядка $\leqslant_a$ получаем $g(x_2) <_{y_1} \cdots <_{y_1} g(x_n)$ и $y_2 <_{y_1} \cdots <_{y_1} y_n$, откуда по предположению $h(g(x_i)) = y_i$, $i = 2, \dots, n$, для некоторого элемента $h \in G_{y_1}$. Следовательно, $hg(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n$, и поэтому G является с-n-транзитивной группой автоморфизмов. Лемма 3 доказана.

Пусть G – с-3-транзитивная группа автоморфизмов ЦУ множества $\langle X, C\rangle$, $\operatorname{card}(X) \geqslant 4$. Тогда непосредственно из леммы 3 следует, что ЛУ множество $\langle X \setminus \{a\}, \leqslant_a\rangle$, $a \in X$, не обладает ни наибольшим, ни наименьшим элементом, откуда в силу определения С5) порядка $\leqslant_a$ получаем, что $((a, b)) \neq \oslash$ для $b \in X$, $b \neq a$. Следовательно, имеет место

Лемма 4. *Пусть G – с-3-транзитивная группа автоморфизмов ЦУ множества $\langle X, C\rangle$, $\operatorname{card}(X) \geqslant 4$. Тогда $((a, b)) \neq \oslash$ для любых элементов $a, b \in X$, $a \neq b$.*

Несложные рассуждения показывают, что справедлива

Лемма 5. *Ограничение стабилизатора G_a в группе $G = A(\langle X, C\rangle)$ всех автоморфизмов ЦУ множества $\langle X, C\rangle$ любой точки $a \in X$ на множество $X \setminus \{a\}$ совпадает с группой $A(\langle X \setminus \{a\}, \leqslant_a\rangle)$ всех автоморфизмов ЛУ множества $\langle X \setminus \{a\}, \leqslant_a\rangle$.*

Лемма 6. *С-3-транзитивная группа $A(\langle X, C\rangle)$ всех автоморфизмов ЦУ множества $\langle X, C\rangle$, $\operatorname{card}(X) \geqslant 4$, является с-$n$-транзитивной группой для любого натурального числа $n \geqslant 3$.*

Доказательство. Пусть выполнено условие леммы и $G = A(\langle X, C\rangle)$. Тогда в силу лемм 3 и 5 для любой точки $a \in X$ стабилизатор G_a является о-2-транзитивной группой $A(\langle X \setminus \{a\}, \leqslant_a\rangle)$ всех автоморфизмов ЛУ множества $\langle X \setminus \{a\}, \leqslant_a\rangle$ и, следовательно, о-2-транзитивной решеточно упорядоченной группой автоморфизмов, откуда в силу [2, с. 69] получаем, что G_a – о-$(n-1)$-транзитивная группа автоморфизмов ЛУ множества $\langle X \setminus \{a\}, \leqslant_a\rangle$ для любого натурального числа $n \geqslant 3$. Поэтому по лемме 3 группа G является с-n-транзитивной для любого $n \geqslant 3$. Лемма 6 доказана.

Теорема 1. *Если группа $A(\langle X, C\rangle)$ всех автоморфизмов циклически упорядоченного множества $\langle X, C\rangle$ является с-3-транзитивной, то она простая.*

Доказательство. Пусть группа $G = A(\langle X, C\rangle)$ является с-3-транзитивной. Если $\operatorname{card}(X) = 3$, то G – циклическая группа третьего порядка из примера и, следовательно, простая. В дальнейшем предполагаем, что $\operatorname{card}(X) \geqslant 4$.

Автоморфизм $f \in G$ ЦУ множества $\langle X, C\rangle$ будем называть *автоморфизмом с ограниченным носителем* $\operatorname{supp} f = \{x \in X \mid f(x) \neq x\}$, если существуют $t_1, t_2 \in X$, $t_1 \neq t_2$, такие, что $f(x) = x$ для всех $x \in [[t_1, t_2]]$. Покажем, что группа G порождается автоморфизмами с ограниченными носителями. Пусть $g \in G$. Если $g = e$, то g имеет ограниченный носитель. Предположим, что $g \neq e$ и $g(a) = a$ для некоторой точки $a \in X$. Тогда в силу леммы 1 g является автоморфизмом ЛУ множества $\langle X, \leqslant_a\rangle$. Пусть для определенности $a_1 <_a g(a_1) = a_0$ для некоторой точки $a_1 \in X \setminus \{a\}$. Тогда по определению порядка $\leqslant_a$ и лемме 4 найдется точка $b \in X \setminus \{a\}$, $b <_a a_1$, и последовательность $\{a_n | n = 2, 3, \dots\}$ такие, что $a_0 >_a a_1 >_a a_2 >_a \dots >_a b$. Пусть c – точная нижняя грань последовательности $\{a_n\}$ в пополнении $\overline{(X \setminus \{a\})}$ ЛУ множества $\langle X \setminus \{a\}, \leqslant_a\rangle$. По условию теоремы и лемме 3 найдутся автоморфизмы $g_n \in G_a$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что $g_n(a_{n+1}) = a_n$, $g_n(a_n) = a_{n-1}$. Положим для $x \in X$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leqslant_a c, \\ g_n(x), & \text{если } a_{n+1} \leqslant_a x \leqslant_a a_n,\ n \geqslant 1, \\ g(x), & \text{если } a_1 \leqslant_a x. \end{cases}$$

Несложно заметить, что f – автоморфизм ЛУ множества $\langle X, \leqslant_a\rangle$ и, следовательно, в силу леммы 5 $f \in G$, причем, очевидно, f и $s = f^{-1}g$ имеют ограниченные носители, откуда получаем, что g является произведением автоморфизмов f и s с ограниченными носителями. Пусть теперь $g \neq e$ – произвольный элемент группы G. Тогда $g(x) \neq x$ для некоторой точки $x \in X$. Пусть $y \in X$, $y \neq x$, $y \neq g(x)$. По условию теоремы и лемме 3 найдется $f \in G$ такой, что $f(y) = y$ и $f(x) = g(x)$, откуда $g = fs$, $s(x) = x$, где $s = f^{-1}g$. По доказанному выше f и s являются произведениями автоморфизмов с ограниченными носителями, поэтому g представим в виде произведения автоморфизмов с ограниченными носителями.

Пусть H – нормальная подгруппа группы G, $H \neq \{e\}$. Предположим сначала, что $H_1 = H \cap G_a \neq \{e\}$ для некоторой точки $a \in X$. Тогда, очевидно, H_1 действует точно на множестве $X \setminus \{a\}$ и в силу лемм 1, 3, 5 является неединичной нормальной подгруппой o-2-транзитивной группы G_a всех автоморфизмов ЛУ множества $\langle X \setminus \{a\}, \leqslant_a\rangle$ и, следовательно ([3] или [2, с. 87]), содержит группу B всех автоморфизмов h ЛУ множества $\langle X \setminus \{a\}, \leqslant_a\rangle$, носитель $\operatorname{supp} h = \{x \in X \setminus \{a\} \mid h(x) \neq x\}$ которых ограничен сверху и снизу в ЛУ множестве $\langle X \setminus \{a\}, \leqslant_a\rangle$. Пусть произвольный автоморфизм $f \in G$ имеет ограниченный носитель на ЦУ множестве $\langle X, C\rangle$, например, $f(x) = x$ для всех $x \in [[t_1, t_2]]$, $t_1 \neq t_2$. В силу леммы 4 найдется точка $b \in ((t_1, t_2))$ и в силу транзитивности группы G найдется $s \in G$ такой, что $s(b) = a$. Тогда $f_1 = sfs^{-1} \in G_a$ и $f_1(x) = x$ для всех $x \in [[a, s(t_2)]] \cup [[s(t_1), a]]$ и, следовательно, $f_1(x) = x$ для $x \leqslant_a s(t_2)$ и $x \geqslant_a s(t_1)$. Таким образом, f_1 является ограниченным автоморфизмом ЛУ множества $\langle X \setminus \{a\}, \leqslant_a\rangle$ и, следовательно, $f_1 \in B \subseteq H_1$, откуда вытекает, что $f = s^{-1}f_1 s \in H$. Поэтому группа H содержит все ограниченные автоморфизмы ЦУ множества $\langle X, C\rangle$ и по доказанному выше $H = G$.

Теперь предположим, что нормальная подгруппа $H \neq \{e\}$ группы G удовлетворяет условию $H \cap G_t = \{e\}$ для всех $t \in X$. Пусть $p \in H$, $p \neq e$ и $a \in X$. По предположению $p(a) \neq a$. В силу леммы 4 найдутся $b, c \in X$ такие, что $C(a, b, c, p(a))$ и $C(a, b, c, p^{-1}(a))$. Из последнего отношения следует $C(p(a), p(b), p(c), a)$ и, следовательно, по C3) имеем $C(a, p(a), p(b), p(c))$, откуда по C4) ввиду $C(a, b, c, p(a))$ получаем

$C(a,b,c,p(a),p(b),p(c))$. В силу леммы 4 найдется $d \in X$ такой, что $C(a,b,c,p(a),p(b), p(c),d)$, откуда имеем $C(a,b,p(a),p(b))$ и $C(a,c,p(a),d)$. По условию теоремы и лемме 6 найдется элемент $s \in G$ такой, что $s(a) = a$, $s(b) = c$, $s(p(a)) = p(a)$, $s(p(b)) = d$. Заметим, что $(sp)(b) = s(p(b)) = d \neq p(c) = p(s(b)) = (ps)(b)$ и $s(a) = a$, $s(p(a)) = p(a)$. Из последних равенств вытекает равенство $(sps^{-1})(a) = p(a)$, откуда в силу предположения о нормальной подгруппе H получаем $sps^{-1} = p$ и, следовательно, $sp = ps$, что противоречит полученному выше неравенству. Таким образом, группа G не обладает нормальной подгруппой $H \neq \{e\}$, удовлетворяющей условию $H \cap G_t = \{e\}$ для всех $t \in X$.

Из изложенного вытекает, что G – простая группа. Теорема 1 доказана.

Лемма 7. *Если G – с-3-транзитивная группа автоморфизмов ЦУ множества $\langle X, C\rangle$ с абелевым стабилизатором точки, то* $\operatorname{card}(X) = 3$ *и G – циклическая группа третьего порядка.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условию леммы. Если $\operatorname{card}(X) = 3$, то G – циклическая группа третьего порядка из примера. Если $\operatorname{card}(X) \geqslant 4$, то в силу леммы 3 стабилизатор G_a, $a \in X$, является о-2-транзитивной группой автоморфизмов ЛУ множества $\langle X \setminus \{a\}, \leqslant_a\rangle$ и поэтому не может быть абелевой группой. Лемма 7 доказана.

Теорема 2. *Пусть G – с-3-транзитивная группа автоморфизмов циклически упорядоченного множества $\langle X, C\rangle$,* $\operatorname{card}(X) \geqslant 4$, *с абелевым стабилизатором двух точек. Тогда группа G изоморфна группе*

$$F^+ = \left\{ \frac{ax+b}{cx+d} \;\middle|\; a,b,c,d \in P, \quad ad - bc > 0 \right\}$$

относительно суперпозиции дробно-линейных функций с коэффициентами из некоторого линейно упорядоченного поля P.

Доказательство. Пусть G – с-3-транзитивная группа автоморфизмов ЦУ множества $\langle X, C\rangle$, $\operatorname{card}(X) \geqslant 4$, с абелевым стабилизатором A двух точек $a_1, a_2 \in X$. Ввиду леммы 7 точки a_1, a_2 различны. Положим $\infty = a_1$ и $0 = a_2$. По условию теоремы в силу леммы 3 стабилизатор G_∞ в группе G точки ∞ действует точно и о-2-транзитивно на ЛУ множестве $X' = \langle X \setminus \{\infty\}, \leqslant_a\rangle$, причем стабилизатор $A = \{g \in G_\infty \mid g(0) = 0\}$ в группе G_∞ точки 0 является абелевым. Следовательно [4], на ЛУ множестве X' можно определить структуру линейно упорядоченного поля $\langle P, +, \cdot, 0, 1\rangle$ таким образом, что ограничение группы G_∞ на множество X' совпадает с группой $H = \{\varphi(a,b) \mid a, b, \in P, a >_\infty 0, \varphi(a,b)(x) = ax + b$ для $x \in P\}$. Доопределив элементы группы H на все множество X, полагая $\varphi(a,b)(\infty) = \infty$, можно считать, что $G_\infty = H$ и $A = \{\varphi(a,0) \mid a \in P, a >_\infty 0\}$. Положим $X' = P$, $X = P \cup \{\infty\}$. В дальнейшем $\leqslant_\infty$ обозначаем просто $\leqslant$, а также полагаем $\varphi(a) = \varphi(a,0)$.

По изложенному выше и определению C5) порядка $\leqslant$ имеем $C(\infty,-1,0,1)$, в частности, $C(0,1,\infty)$ и $C(\infty,-1,0)$. По условию теоремы найдется элемент $\lambda \in G$ такой, что $\lambda(0) = \infty$, $\lambda(1) = -1$, $\lambda(\infty) = 0$. Заметим, что если $\lambda(a) = -a$, $a \in P$, $a > 0$, то $a = 1$. Действительно, пусть для определенности $a > 1$. Тогда имеем $C(0,1,a)$ и $C(\infty,-a,-1)$, откуда из первого отношения получаем $C(\lambda(0), \lambda(1), \lambda(a))$ и $C(\infty, -1, -a)$, что противоречит второму отношению. Следовательно, $a = 1$.

Так как $\lambda^2(0) = 0$, $\lambda^2(\infty) = \infty$, то $\lambda^2 \in A$ и, следовательно, $\lambda^2 = \varphi(a)$ для некоторого элемента $a \in P$, $a > 0$. Так как из равенств

$$\lambda^2(1) = \varphi(a)(1) = a, \qquad \lambda^2(-1) = \varphi(a)(-1) = -a$$

ввиду $\lambda(1) = -1$ вытекает равенство $\lambda(a) = -a$, то в силу замечания $a = 1$ и $\lambda^2 = \varphi(1)(1) = e$. Имеем $\lambda\varphi(a)\lambda(\infty) = \infty$, $\lambda\varphi(a)\lambda(0) = 0$ для любого элемента $\varphi(a) \in A$, откуда получаем, что $\lambda\varphi(a)\lambda \in A$ для всех $\varphi(a) \in A$ и, следовательно, ввиду $\lambda^2 = e$ отображение $\gamma\colon A \to A$, $\gamma(\varphi(a)) = \lambda\varphi(a)\lambda$, является автоморфизмом группы A, причем, очевидно, γ^2 – тождественный автоморфизм. В силу замечания $\lambda(a) \neq -a$ для всех $a \in P$, $a > 0$, $a \neq 1$, откуда ввиду равенств $\lambda(1) = -1$, $\lambda^2 = e$ получаем $\lambda\varphi(a)\lambda(-1) \neq \varphi(a)(-1)$ и, значит, $\gamma(\varphi(a)) \neq \varphi(a)$ для всех $a \in P$, $a > 0$, $a \neq 1$, т.е. для всех $\varphi(a) \in A$, $\varphi(a) \neq e$. Так как γ – автоморфизм порядка два (т.е. инволюция) абелевой группы A без кручения, не имеющий неподвижных точек, отличных от единичного элемента группы A, то так же, как в [5, § 116, п. ж, с. 317], показывается, что $\gamma(\varphi(a)) = (\varphi(a))^{-1} = \varphi(a^{-1})$ для всех $\varphi(a) \in A$. Для любого элемента $a \in P$, $a > 0$, в силу равенства $\gamma(\varphi(a)) = \lambda\varphi(a)\lambda = \varphi(a^{-1})$ имеем $\lambda\varphi(a) = \varphi(a^{-1})\lambda$, откуда получаем

$$\lambda(a) = \lambda\varphi(a)(1) = \varphi(a^{-1})\lambda(1) = \varphi(a^{-1})(-1) = -a^{-1}$$

и

$$\lambda(-a) = \lambda\varphi(a)(-1) = \varphi(a^{-1})\lambda(-1) = \varphi(a^{-1})(1) = a^{-1}.$$

Следовательно, $\lambda(x) = -x^{-1}$ для всех $x \in P$, $x \neq 0$ и $\lambda(0) = \infty$, $\lambda(\infty) = 0$.

Пусть элемент $g \in G$. Если $g(\infty) = \infty$, то $g \in G_\infty$. Если $g(\infty) \neq \infty$, то в силу того, что группа G_∞ действует транзитивно на множестве P, найдется $s \in G_\infty$ такой, что $g(\infty) = s(0) = s\lambda(\infty)$ и, следовательно, $\lambda^{-1}s^{-1}g = r \in G_\infty$ и $g = s\lambda r$ для некоторых $s, r \in G_\infty$. Таким образом, $G = G_\infty \cup \{s\lambda r \mid s, r \in G_\infty\}$, в частности, группа G порождается элементами стабилизатора G_∞ и элементом λ.

На множестве $X = P \cup \{\infty\}$ действует точно группа

$$F^+ = \left\{\frac{ax+b}{cx+d} \;\middle|\; a, b, c, d \in P, \quad ad - bc > 0\right\}.$$

Покажем, что $G = F^+$. Пусть $g \in G$. Если $g(\infty) = \infty$, то $g \in G_\infty$ и $g(x) = \varphi(a, b)(x) = ax+b$, $a > 0$, откуда, очевидно, следует, что $g \in F^+$. Если $g(\infty) \neq \infty$, то по доказанному выше $g = \varphi(a_1, b_1)\lambda\varphi(c, d)$ для некоторых $\varphi(a_1, b_1), \varphi(c, d) \in G_\infty$ и, следовательно, $g(x) = ((b_1c)x + (b_1d - a_1))/(cx + d)$. Так как $a_1 > 0$, $c > 0$, то элементы $a = b_1c$, $b = b_1d - a_1$, c и d удовлетворяют соотношению $ad - bc = a_1c > 0$ и поэтому $g \in F^+$. Таким образом, $G \subseteq F^+$. Обратно, пусть $\omega(x) = (ax+b)/(cx+d) \in F^+$. Если $c = 0$, то $\omega(x) = ax/d + b/d$ и $a/d > 0$, откуда получаем $\omega \in G$. Если $c \neq 0$, то непосредственная проверка показывает, что

$$\omega = \varphi\left(\frac{ad-bc}{c^2}, \frac{a}{c}\right)\lambda\varphi\left(1, \frac{d}{c}\right)$$

и, следовательно, ввиду $ad - bc > 0$ получаем, что $\omega \in G$. Таким образом, $F^+ \subseteq G$. Из изложенного вытекает равенство $G = F^+$. Теорема 2 доказана.

Пусть P – линейно упорядоченное поле, $P^* = P \setminus \{0\}$. Пусть $\mathbf{GL}_2^+(P)$ – группа матриц порядка два над полем P с положительными определителями, $P^*\mathbf{E}_2$ – подгруппа скалярных матриц группы $\mathbf{GL}_2^+(P)$, $\mathbf{PGL}_2^+(P)$ – фактор-группа группы $\mathbf{GL}_2^+(P)$ по нормальной подгруппе $P^*\mathbf{E}_2$.

Теорема 3. *Всякая* с-3-*транзитивная группа G автоморфизмов циклически упорядоченного множества $\langle X, C\rangle$, $\mathrm{card}(X) \geqslant 4$, с абелевым стабилизатором двух точек изоморфна группе $\mathbf{PGL}_2^+(P)$ над некоторым линейно упорядоченным полем P. Обратно, для всякого линейно упорядоченного поля P группа $\mathbf{PGL}_2^+(P)$ изоморфна* с-3-*транзитивной группе автоморфизмов с абелевым стабилизатором двух точек некоторого циклически упорядоченного множества $\langle X, C\rangle$.*

Доказательство. Если G – с-3-транзитивная группа автоморфизмов ЦУ множества $\langle X, C\rangle$, $\mathrm{card}(X) \geqslant 4$, с абелевым стабилизатором двух точек, то в силу теоремы 2 G изоморфна группе F^+ над некоторым линейно упорядоченным полем P. Непосредственная проверка показывает, что соответствие, сопоставляющее элементу

$$\omega(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \in F^+$$

смежный класс $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot P^*\mathbf{E}_2$ группы $\mathbf{GL}_2^+(P)$ по подгруппе $P^*\mathbf{E}_2$, является изоморфизмом групп F^+ и $\mathbf{PGL}_2^+(P)$. Следовательно, группа G изоморфна группе $\mathbf{PGL}_2^+(P)$.

Обратно, пусть P – линейно упорядоченное поле. Положим $X = P \cup \{\infty\}$. На множестве X определим циклический порядок, полагая:

$C(x, y, z)$, если $x, y, z \in P$ и $x < y < z$ или $z < x < y$, или $y < z < x$;
$C(\infty, x, y)$, если $x, y \in P$ и $x < y$;
$C(x, \infty, y)$, если $x, y \in P$ и $y < x$;
$C(x, y, \infty)$, если $x, y, \in P$ и $x < y$.

По доказанному выше группа $\mathbf{PGL}_2^+(P)$ изоморфна группе F^+, действующей точно на множестве X. Непосредственная проверка с использованием леммы 3 показывает, что F^+ – с-3-транзитивная группа автоморфизмов ЦУ множества $\langle X, C\rangle$ с абелевым стабилизатором двух точек. Теорема 3 доказана.

Следствие. С-3-*транзитивная группа G автоморфизмов с единичным стабилизатором трех точек циклически упорядоченного множества $\mathbf{T}$ изоморфна проективной специальной линейной группе $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{R})$ над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел.*

Доказательство. Пусть G с-3-транзитивная группа автоморфизмов ЦУ множества $\mathbf{T}$ и стабилизатор трех точек $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{T}$ является единичной группой. Тогда в силу с-3-транзитивности группы G и леммы 3 точки a_1, a_2, a_3 различны и стабилизатор любых трех различных точек из $\mathbf{T}$ единичен. Зафиксируем элементы ∞ и 0, $\infty \neq 0$, множества $\mathbf{T}$. В силу леммы 3 стабилизатор G_∞ точки ∞ действует точно и о-2-транзитивно на ЛУ множестве $X' = \langle X \setminus \{\infty\}, \leqslant_\infty\rangle$, откуда, как несложно заметить, следует, что стабилизатор A в группе G_∞ точки 0 действует транзитивно на множестве

$X'' = ((0,\infty))$. Так как по условию следствия стабилизатор трех различных точек в группе G единичен, то $g(x) \neq x$ для любых $x \in X''$, $g \in A$, $g \neq e$, и, следовательно, A является регулярной группой порядковых автоморфизмов ЛУ множества $\langle X'', \leqslant_\infty \rangle$, порядково изоморфного ЛУ множеству $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Несложные рассуждения показывают, что группа A относительно порядка $\leqslant$ (определенного по правилу $g \leqslant h$, $g, h \in A$, тогда и только тогда, когда $g(x) \leqslant h(x)$ для всех $x \in X''$) является архимедовой линейно упорядоченной группой и, следовательно [6], абелевой. Таким образом, G – с-3-транзитивная группа автоморфизмов с абелевым стабилизатором A двух точек ∞ и 0, откуда по теореме 3 следует, что группа G изоморфна группе $\mathbf{PGL}_2^+(P)$ для некоторого линейно упорядоченного поля P, причем в силу доказательств теорем 2, 3 поле P определено на ЛУ множестве X', порядково изоморфном ЛУ множеству вещественных чисел, и, следовательно, ввиду [6. с. 153] и [1. с. 190] P изоморфно полю $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Так как, очевидно, $\mathbf{PGL}_2^+(\mathbb{R})$ совпадает с $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{R})$, то следствие доказано.

Заметим, что в силу теоремы Жордана–Диксона [7. с. 119] для всякого линейно упорядоченного поля P группа $\mathbf{PSL}_2(P)$ проста.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965.

[2] Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.

[3] Higman G. The units of groups rings // Proc. London Math. Soc. 1940. V. 46. № 2. P. 231–248.

[4] Тарарин В. М. О-2-транзитивные группы автоморфизмов с абелевым стабилизатором точки // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 2. С. 289–293.

[5] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977.

[6] Кокорин А. И., Копытов В. М. Линейно упорядоченные группы. М.: Наука, 1972.

[7] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. 3-е изд. М.: Наука, 1982.

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
Республика Карелия, г. Петрозаводск
E-mail: tararin@krc.karelia.ru

Поступило
16.03.2001