Wellenausbreitung in einem offenen thermodynamischen System zeitlich veränderlicher Gesamtenergie

H.-D. FREUND und G. LOCKE

Institut für Reine und Angewandte Kernphysik der Universität Kiel

(Z. Naturforsch. **25 a**, 730—735 [1970]; eingegangen am 30. August 1969)

Wave Propagation in an open Thermodynamic System with Time Variation of the Total Energy

The absorption and dispersion of sound due to dissipative phenomena such as diffusion, heat conduction and viscous flow have been investigated by Herzfeld, Litovitz and others. Whereas in these studies the total energy of the carrier system remains constant, we consider the case that it is changing. It turnes out that the wavelength λ remains constant, while all other wave characteristics become time depend and can be connected with the usual sound velocity of the carrier system $\bar{c}(t) = \sqrt{(\partial \bar{p}/\partial \bar{\varrho})_S} \sim \sqrt{e(t)}$.

The time averages of these quantities are:

Mean energy density of the wave:	$\frac{E}{V}(t) \sim c(t)$,
Sound frequency:	$\omega(t) \sim c(t)^{-1/2}$,
Acoustic density amplitude:	$\varrho_0(t) \sim c(t)^{-1/2}$,
Acoustic pressure amplitude:	$p_0(t) \sim c(t)^{3/2}$,
Acoustic velocity amplitude:	$u_0(t) \sim c(t)^{1/2}$.

The change in energy density takes place via the potential energy. Thus the original balance between potential and kinetic energy is disturbed. Modulation vibrations of the wave amplitudes around the time averages arise. In addition dephasing of the pressure and density components with respect to the acoustic velocity takes place. The phasevelocities are disturbed too. They differ from time dependence of $c(t)$.

These differences are running asymptotically towards zero, i. e. after a longer period of time a phase step remains of the total wave system. This phase step is negative for increasing energy of the carrier system and positive for decreasing energy. The value of the phase step is proportional to the wavelength λ, i. e. systems of this kind show dispersion.

Einleitung

In dieser Arbeit wird der Ausbreitungsmechanismus von Wellen in offenen thermodynamischen Systemen untersucht. Solche Trägersysteme besitzen eine zeitlich veränderliche Gesamtenergie.

Eine Problemstellung dieser Art tritt z. B. bei der mathematischen Behandlung schwerer Reaktorunfälle auf [1], bei denen während der Exkursion ein Teil des Kernbrennstoffs in den gasförmigen Zustand übergeführt wird. Mit fortdauernder Leistungssteigerung erhitzt sich dieses Gas weiter.

Druckimpulse, die durch Störungen im gasförmigen Kernbrennstoff ausgelöst werden, verformen sich während dieser Zeit, da sich die Energiedichte des Trägersystems ständig vergrößert.

Als Modell wird ein unendlich ausgedehntes Medium mit der Zustandsgleichung eines idealen Gases zugrunde gelegt. Darin breitet sich ein ebener Wellenzug mit der anfänglichen, mittleren Energiedichte E_0/V aus. Die innere Energie des Trägersystems verändert sich in einem isochoren Prozeß.

Für die mathematische Formulierung wird die akustische Näherung verwendet, d. h. die gasdynamischen Grundgleichungen werden linearisiert. Man erhält dann aus der

$$\textit{Kontinuitätsgleichung:} \quad \varrho_t + \bar{\varrho}\, u_x = 0\,, \tag{1}$$

$$\textit{Bewegungsgleichung:} \quad \bar{\varrho}\, u_t + p_x = 0\,, \tag{2}$$

$$\textit{Entropiegleichung:} \quad \bar{s}_t + s_t = 0\,. \tag{3}$$

In diesen Gleichungen kennzeichnen überstrichene Buchstaben ($\bar{\varrho}$, $\bar{s}$, $\bar{e}$) die Zustandsgrößen des Trägersystems, die nicht überstrichenen Buchstaben (ϱ, p, u, s) die Zustandsabweichungen der Welle gegenüber dem Trägersystem.

Aus diesem gekoppelten Differentialgleichungssystem lassen sich mit Hilfe der Zustandsgleichung idealer Gase

$$\varrho = \varrho_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/\varkappa} \exp\left(-\frac{s - s_1}{c_p}\right) \tag{4}$$

mit $\varkappa = c_p/c_v$

[1] R. A. MEYER, B. WOLFE u. N. F. FRIEDMANN, A Parameter Study of Large Fast Reactor Meltdown Accidents, ANL 7 **120**, 671 [1965] (Conf. Argonne, Oct. 1965).

separate Differentialgleichungen für alle Zustandsgrößen der Wellenbewegung ermitteln.

Dichteschwankung ϱ:

$$\varrho_{tt} - \bar{c}^2 \varrho_{xx} = 0\,, \tag{5}$$

Schalldruck p:

$$p_{tt} - 4\frac{\bar{c}_t}{\bar{c}} p_t + \left(6\frac{\bar{c}_t^2}{\bar{c}^2} - 2\frac{\bar{c}_{tt}}{\bar{c}}\right) p - \bar{c}^2 p_{xx} = 0\,, \tag{6}$$

Schallschnelle u:

$$u_{tt} - 2\frac{\bar{c}_t}{\bar{c}} u_t - \bar{c}^2 u_{xx} = 0\,. \tag{7}$$

Die darin enthaltene Funktion $\bar{c}(t)$ ist durch die partielle Ableitung

$$\bar{c}(t)^{-2} = \left(\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial \bar{p}}\right)_{\bar{s}} \tag{8}$$

definiert.

Sie charakterisiert das Zeitverhalten des Trägersystems. Zum besseren Verständnis der auftretenden Besonderheiten beim Ausbreitungsmechanismus von Wellen in Trägersystemen mit veränderlichem $\bar{c}(t)$, sei zunächst über den Fall mit konstantem $\bar{c} = \text{const}$ referiert.

Wellenausbreitung in einem Trägersystem zeitlich konstanter Gesamtenergie

Die Entropiegleichung (3) verändert sich zu

$$\bar{s}_t + s_t = 0\,, \tag{9}$$

wobei beide Beiträge einzeln verschwinden.

$\bar{s}_t = 0$ Die Entropie des Trägersystems ist konstant, (10 a)

$s_t = 0$ die Wellenkompression verläuft adiabatisch. (10 b)

Voraussetzung (10 a) führt dazu, daß die partielle Ableitung

$$\bar{c}^{-2} = (\partial \bar{\varrho}/\partial \bar{p})_s$$

ebenfalls zeitlich konstant bleibt und damit die Differentialgleichungen (5), (6), (7) in den Wellengleichungstyp übergehen.

$$\begin{aligned} \varrho_{tt} - \bar{c}^2 \varrho_{xx} &= 0\,, \\ p_{tt} - \bar{c}^2 p_{xx} &= 0\,, \\ u_{tt} - \bar{c}^2 u_{xx} &= 0\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Dieser Gleichungstyp besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho_0 \exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}(\bar{c}\,t - x)\right\}, \\ p &= p_0 \exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}(\bar{c}\,t - x)\right\}, \\ u &= u_0 \exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}(\bar{c}\,t - x)\right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Die Konstante $\bar{c}$ ist dabei die Phasengeschwindigkeit der Welle.

Zusammen mit der Zustandsgleichung (4) berechnet man für $\bar{c}$

$$\bar{c} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varrho}}\right)_{\bar{s}}} = \sqrt{\varkappa \frac{\bar{p}}{\bar{\varrho}}}\,. \tag{13}$$

Das ist die bekannte Laplacesche Gleichung, die in der Akustik die Schallgeschwindigkeit eines Trägersystems angibt.

Aus der Lösung (12) für einen ebenen Wellenzug lassen sich verschiedene Eigenschaften ablesen:

1. Alle Komponenten der Wellenbewegung (Dichte, Druck, Schallschnelle) breiten sich mit derselben Geschwindigkeit $\bar{c}$ aus.
2. Alle Komponenten sind in Phase.
3. $\bar{c}$ ist konstant, d. h. die Frequenz der Welle bleibt erhalten.
4. Die Amplituden der Wellenkomponenten bleiben zeitlich konstant.
5. Die Phasengeschwindigkeit $\bar{c}$ ist unabhängig von der Wellenlänge λ, d. h. es existiert keine Dispersion.
6. Die Anteile der kinetischen und potentiellen Energie an der mittleren Energiedichte der Welle sind gleich groß.

Punkt 6. läßt sich verifizieren, wenn man die Amplitudenbedingung

$$p_0 = \bar{\varrho}\,\bar{c}\,u_0 \tag{14}$$

heranzieht. — Die mittlere Energiedichte zu einem beliebigen Zeitpunkt ist:

$$\frac{E}{V} = \frac{1}{4}\bar{\varrho}\,u_0^2 + \frac{1}{4}\frac{p_0^2}{\bar{\varrho}\,\bar{c}^2}. \tag{15}$$

Mit (14) folgt:

$$\frac{1}{4}\bar{\varrho}\,u_0^2 = \frac{1}{4}\frac{p_0^2}{\bar{\varrho}\,\bar{c}^2}.$$

Die kinetische Energie ist in einer Welle gleich der potentiellen Energie.

Aus (15) lassen sich andererseits bei vorgegebener Energiedichte der Welle Rückschlüsse auf die Amplitudenhöhen ziehen.

Es gilt:

$$u_0 = \sqrt{2\,E/V\,\bar{\varrho}}\,, \tag{16}$$

$$p_0 = \bar{c}\,\sqrt{2\,E\,\bar{\varrho}/V}\,, \tag{17}$$

$$\varrho_0 = 1/\bar{c}\cdot\sqrt{2\,E\,\bar{\varrho}/V}\,. \tag{18}$$

Wie zu sehen ist, hängen die Amplitudenhöhen von Druck und Dichte auch noch von der Schallgeschwindigkeit des Trägersystems ab.

$$p_0 \sim \bar{c}\,, \qquad \varrho_0 \sim \bar{c}^{-1}\,. \tag{20}$$

Wellenausbreitung in einem Trägersystem zeitlich veränderlicher Gesamtenergie

a) Zunehmende Gesamtenergie

Bei der Ableitung der Differentialgleichungen (5), (6), (7) wurde noch die Zusatzannahme gemacht, daß Entropieänderungen nur vom Trägersystem, nicht jedoch durch die Wellenkompression erwirkt werden. Das bedeutet:

$$s_t = 0\,, \qquad \bar{s}_t \neq 0\,. \tag{19}$$

Diese Einschränkung führt im folgenden zu einer Vernachlässigung von Wärmeleitungs-, Zähigkeits- und Relaxationseffekten.

Bei der Suche nach Lösungen für die Differentialgleichungen (5), (6), (7) hat man es gegenüber (11) mit drei verschiedenen Typen zu tun. Die komplizierteste Gl. (6) geht jedoch mit dem Ansatz $p = \bar{c}^2\,\varrho$ in die Diff.-Gl. (5) über. Es müssen also nur noch zwei Lösungen für (5) und (7) gefunden werden.

Infolge der verschiedenen Differentialgleichungen für die Wellenkomponenten lassen sich, im Gegensatz zu der in Abschnitt III gegebenen 6 Punkte-Charakterisierung, folgende Welleneigenschaften voraussagen:

Zu 1. Die Wellenkomponenten von Dichte und Druck besitzen eine andere Phasengeschwindigkeit als die Schallschnelle.

Zu 2. Die verschiedenen Phasengeschwindigkeiten müssen zu Phasenverschiebungen zwischen den Komponenten der Welle führen.

Zu 3. $\bar{c}$ ist eine Zeitfunktion, d. h. die Frequenz der Welle wird verändert; konstant bleibt hingegen die Wellenlänge.

Unter Berücksichtigung dieser Aspekte werden folgende Lösungsansätze konstruiert:

$$\varrho = \varrho_0 \exp\left\{ i\,\frac{2\pi}{\lambda}\,\Big(\int_0^t b\,\mathrm{d}\tau - x\Big)\right\}, \tag{21}$$

$$p = c^2\,\varrho_0 \exp\left\{ i\,\frac{2\pi}{\lambda}\,\Big(\int_0^t b\,\mathrm{d}\tau - x\Big)\right\}, \tag{22}$$

$$u = u_0 \exp\left\{ i\,\frac{2\pi}{\lambda}\,\Big(\int_0^t a\,\mathrm{d}\tau - x\Big)\right\}. \tag{23}$$

Geht man mit diesen Ansätzen in die entsprechenden Diff.-Gln. (5), (6), (7) ein, dann ergeben sich neue Differentialgleichungen für die unbekannten Phasengeschwindigkeiten a, b:

$$b^2 - i\,\frac{\lambda}{2\pi}\,b_t - \bar{c}^2 = 0\,, \tag{24}$$

$$a^2 - i\,\frac{\lambda}{2\pi}\left(a_t - 2\,\frac{\bar{c}_t}{\bar{c}}\,a\right) - \bar{c}^2 = 0\,. \tag{25}$$

Um weitere Aussagen über die Größen a, b machen zu können, muß ein Zeitgesetz der Funktion $\bar{c}$ angenommen werden. Es wird ein Exponentialgesetz

$$\bar{c} = \bar{c}_0\, e^{\omega_0 t/2} \tag{26}$$

gewählt, das einer Zunahme der inneren Energie des Trägersystems von

$$\bar{e} = \bar{e}_0\, e^{\omega_0 t} \tag{27}$$

entspricht.

Zusammen mit der Neuformulierung

$$b = \bar{c}\,(1+\gamma)\,, \tag{28}$$

$$a = \bar{c}\,(1+\delta) \tag{29}$$

erhält man aus den Diff.-Gln. (24), (25) für die Korrekturfunktionen γ, δ in linearer Näherung[2]

$$\gamma_t + \gamma\left[\tfrac{1}{2}\,\omega_0 + i\,2\,n\,\omega_0\, e^{\omega_0 t/2}\right] = -\,\tfrac{1}{2}\,\omega_0\,, \tag{30}$$

$$\delta_t - \delta\left[\tfrac{1}{2}\,\omega_0 + i\,2\,n\,\omega_0\, e^{\omega_0 t/2}\right] = \tfrac{1}{2}\,\omega_0\,. \tag{31}$$

Darin ist der Parameter n ein Maß für die Wellenlänge λ, gemessen an der Bezugswellenlänge λ_0.

$$n = \lambda_0/\lambda\,, \qquad \lambda_0 = 2\pi\,\bar{c}_0/\omega_0\,. \tag{32}$$

Mit der Substitution $y = \omega_0\, t/2$ erhält man für die Korrekturfunktionen die Lösungen:

$$\gamma = -\,e^{-y - i\,4\,n\,e^y} \cdot \int_0^y e^{y' + i\,4\,n\,e^{y'}}\,\mathrm{d}y'\,, \tag{33}$$

$$\delta = +\,e^{y - i\,4\,n\,e^y} \cdot \int_0^y e^{-y' + i\,4\,n\,e^{y'}}\,\mathrm{d}y'\,. \tag{34}$$

Diese sind komplex. In Real- und Imaginärteil aufgespalten, ergeben sich die Ausdrücke:

$$\gamma = \alpha + i\,\beta \tag{35}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha &= -\,e^{-y} \int_0^y e^{y'} \cos\left[4\,n\,(e^y - e^{y'})\right]\,\mathrm{d}y' \\ &= -\,\frac{e^{-y}}{4\,n}\,\sin\left[4\,n\,(e^y - 1)\right]\,, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \beta &= e^{-y} \int_0^y e^{y'} \sin\left[4\,n\,(e^y - e^{y'})\right]\,\mathrm{d}y' \\ &= \frac{e^{-y}}{4\,n}\,\left\{1 - \cos\left[4\,n\,(e^y - 1)\right]\right\} \end{aligned} \tag{37}$$

[2] Ist die Wellenlänge λ klein gegen die Bezugswellenlänge λ_0, dann werden die Phasengeschwindigkeiten a, b nur wenig von c abweichen. Nur mit dieser Einschränkung gelten die Lösungen.

und

$$\delta = \varepsilon + i\,\eta\,, \tag{38}$$

$$\varepsilon = e^{y} \int_0^y e^{-y'} \cos[4\,n(e^{y} - e^{y'})]\,\mathrm{d}y', \tag{39}$$

$$\eta = -e^{y} \int_0^y e^{-y'} \sin[4\,n(e^{y} - e^{y'})]\,\mathrm{d}y' \tag{40}$$

(s. Anm. [3]).

Setzt man diese Beziehungen in die Ansätze (21), (22), (23) ein, dann erhält man als Näherungslösung für einen ebenen Wellenzug in einem Trägersystem mit zeitlich veränderlicher Gesamtenergie:

$$\varrho = \varrho_0 \exp\left\{-\frac{2\pi}{\lambda}\int_0^t \bar{c}\;\beta\,\mathrm{d}\tau\right\} \cdot \exp\left\{i\,\frac{2\pi}{\lambda}\left[\int_0^t \bar{c}(1+\alpha)\,\mathrm{d}\tau - x\right]\right\}, \tag{41}$$

$$p = c^2\,\varrho_0 \exp\left\{-\frac{2\pi}{\lambda}\int_0^t \bar{c}\;\beta\,\mathrm{d}\tau\right\} \cdot \exp\left\{i\,\frac{2\pi}{\lambda}\left[\int_0^t \bar{c}(1+\alpha)\,\mathrm{d}\tau - x\right]\right\}, \tag{42}$$

$$u = u_0 \exp\left\{-\frac{2\pi}{\lambda}\int_0^t \bar{c}\;\eta\,\mathrm{d}\tau\right\} \cdot \exp\left\{i\,\frac{2\pi}{\lambda}\left[\int_0^t \bar{c}(1+\varepsilon)\,\mathrm{d}\tau - x\right]\right\}. \tag{43}$$

Aus dieser Darstellung lassen sich zwei weitere Abweichungen gegenüber Wellen in Trägersystemen mit konstantem $\bar{c}$ ablesen:

Zu 4. Die Amplituden der Wellenkomponenten sind zeitlich veränderlich.

Zu 5. Die Phasengeschwindigkeiten a, b sind vom Wellenlängenparameter n abhängig, d. h. es existiert Dispersion.

In Punkt 2. wurde festgestellt, daß infolge verschiedener Phasengeschwindigkeiten zwischen den Wellenkomponenten eine Phasenverschiebung φ auftreten muß. Diese wird durch die Amplitudenänderung beeinflußt. Ihren Gesamtbetrag berechnet man aus dem komplexen Verhältnisfaktor K, der aus der Kontinuitätsgleichung folgt:

$$\varrho/u = \overline{K} = K_1 \cdot K_2 = K' + i\,K''. \tag{44}$$

Der Phasenwinkel ist dann:

$$\varphi = \arctan(K''/K'). \tag{45}$$

K_1 stellt in obiger Notation den Einfluß durch Amplitudenänderung dar. Er beträgt

$$K_1 = \bar{\varrho}/b \tag{46}$$

im Gegensatz zum stationären Fall mit $\bar{\varrho}/c$.

K_2 beschreibt den Einfluß durch Laufzeitverschiebungen

$$K_2 = \exp\left\{i\,\frac{2\pi}{\lambda}\int_0^t \bar{c}(\varepsilon - \alpha)\,\mathrm{d}\tau\right\}. \tag{47}$$

Setzt man die Beziehungen (42), (43) in (40) ein, dann folgt nach einigen Rechnungen für φ:

$$\varphi = \arctan\left\{\frac{(1+\alpha)\,\sin w - \beta\,\cos w}{(1+\alpha)\,\cos w + \beta\,\sin w}\right\}$$

mit

$$w = 2\,n\int_0^y e^{y'}(\varepsilon - \alpha)\,\mathrm{d}y'. \tag{48}$$

Für eine numerische Auswertung ist neben der Phasenverschiebung φ der Phasenwinkel φ_{L} aus der Laplace-Gleichung von Bedeutung:

$$\varphi_{\mathrm{L}} = \frac{2\pi}{\lambda}\int_0^t \bar{c}\,\mathrm{d}\tau = 2\,n(e^{y} - 1). \tag{49}$$

Von gleicher Bedeutung sind die Abweichungen der verschiedenen Wellenkomponenten von diesem Phasenwinkel φ_{L}, nämlich

Dichte, Druck:

$$w_3(\alpha) = \frac{2\pi}{\lambda}\int_0^t \bar{c}\;\alpha\,\mathrm{d}\tau = 2\,n\int_0^y e^{y'}\,\alpha\,\mathrm{d}y'. \tag{50}$$

Schallschnelle:

$$w_1(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\lambda}\int_0^t \bar{c}\;\varepsilon\,\mathrm{d}\tau = 2\,n\int_0^y e^{y'}\,\varepsilon\,\mathrm{d}y' \tag{51}$$

sowie die Amplitudenänderungen

Dichte, Druck:

$$w_4(\beta) = \exp\left\{-\frac{2\pi}{\lambda}\int_0^t \bar{c}\;\beta\,\mathrm{d}\tau\right\} = \exp\left\{-2\,n\int_0^y e^{y'}\,\beta\,\mathrm{d}y'\right\}, \tag{52}$$

Schallschnelle:

$$w_2(\eta) = \exp\left\{-\frac{2\pi}{\lambda}\int_0^t \bar{c}\;\eta\,\mathrm{d}\tau\right\} = \exp\left\{-2\,n\int_0^y e^{y'}\,\eta\,\mathrm{d}y'\right\}. \tag{53}$$

Diese Größen sind in Abb. 1 für $n = 10$ in Abhängigkeit von y aufgetragen.

[3] Die Ausdrücke (39), (40) lassen sich nicht wesentlich vereinfachen. Die Auswertung der Integrale führt auf Funktionen des Integralsinus und Integralkosinus.

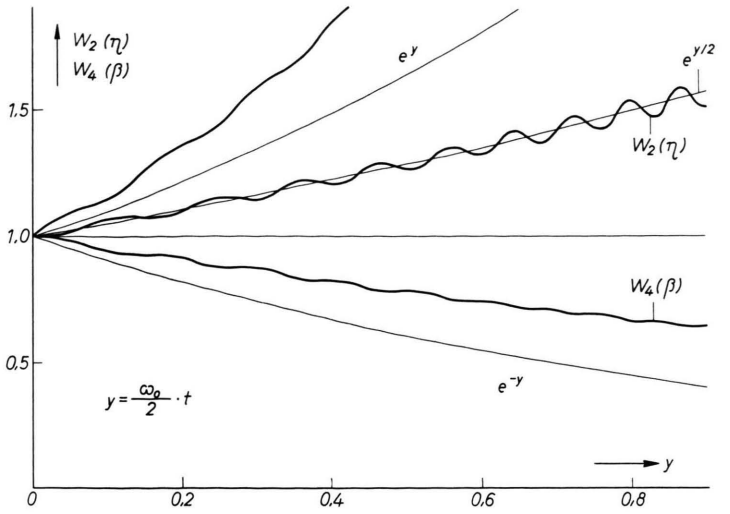

Abb. 1. Amplitudenänderungen verschiedener Wellenkomponenten für $n=10$:

$W_4(\beta)$: Dichte,
$W_4(\beta)\cdot e^{2y}$: Druck,
$W_2(\eta)$: Schallschnelle.

Man beobachtet, daß die Amplituden von Druck und Schallschnelle stetig größer werden, während die Dichteamplitude fortwährend abnimmt. Dabei schwingen die Amplituden um die Zeitgesetze

$$\begin{aligned} \frac{p_0(y)}{p_0(0)} &\approx e^{3y/2} \sim \bar{c}\sqrt{\bar{c}}, \\ \frac{\varrho_0(y)}{\varrho_0(0)} &\approx e^{-y/2} \sim \frac{1}{\sqrt{\bar{c}}} \\ \frac{u_0(y)}{u_0(0)} &\approx e^{y/2} \sim \sqrt{\bar{c}}\,. \end{aligned} \tag{54}$$

Sie gehorchen damit nicht mehr den in (16), (17), (18), (19) aufgezeigten Gesetzmäßigkeiten. Energetisch bedeutet das eine Zunahme der mittleren Energiedichte des Wellensystems.

$$E_{\mathrm{kin}}/V \approx \tfrac{1}{2}\,\bar{\varrho}\,u_0^2(0)\cdot e^{y}\,, \tag{55}$$

$$E_{\mathrm{pot}}/V \approx \frac{1}{2}\,\frac{p_0^2(0)}{\bar{\varrho}\,c^2(0)}\cdot e^{y}\,. \tag{56}$$

Die Energie wird dabei dem Wellensystem als potentielle Energie zugeführt. Eine Störung des Gleichgewichts zwischen potentieller und kinetischer Energie ist die Folge.

Diese Störung führt zu Modulationsschwingungen der Amplituden um die in (54) angegebenen Zeitgesetze und zu einer Phasenverschiebung der Wellenkomponenten von Druck und Dichte gegenüber der Schallschnelle.

Die Frequenz der Modulationsschwingungen ist gleich der Umwandlungszahl zwischen potentieller und kinetischer Energie, also gleich der doppelten Grundfrequenz der Welle.

Die Phasenverschiebung schwankt ebenfalls im Takt dieser Modulationsfrequenz. Ihre Amplitude wächst mit dem Anhalten der Störung (Abb. 2).

Dieselben Modulationsschwingungen kehren auch bei den Phasengeschwindigkeiten der Wellenkomponenten wieder. In Abb. 3 sind die Phasenabweichungen vom Winkel φ_{L} aufgetragen.

Wie aus Abb. 3 ersichtlich, wirkt sich die Veränderung der Phasengeschwindigkeit bei der Massenkomponente im zeitlichen Mittel nur als konstante Phasenverschiebung aus. Ihr nähern sich die Modulationsschwingungen asymptotisch. Die Auswertung der Formel (50) ergibt als asymptotische Phasenretardierung

$$w_3(\alpha)_{\mathrm{as}} = -1/8\,n\,, \tag{57}$$

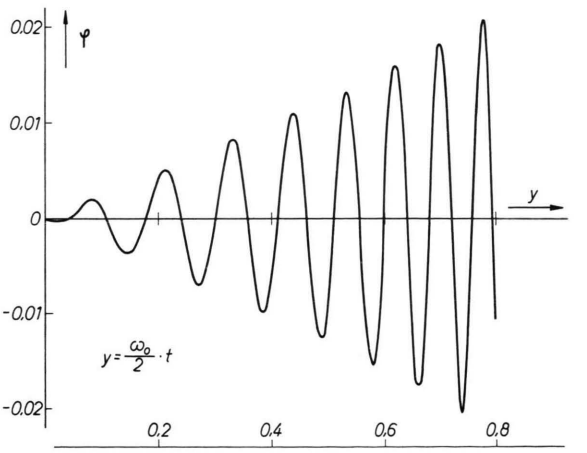

Abb. 2. Phasenverschiebung zwischen Dichte und Druck gegenüber der Schallschnelle für $n=10$.

d. h. sie hängt von der Wellenlänge λ ab und ist um so kleiner, je kleiner die Wellenlänge ist.

Aus Abb. 3 erkennt man weiterhin, daß die Massen- und Druckkomponente das „Rückgrat“ der Welle bilden. Die Schallschnelle schwingt sich auf dieses Symmetriezentrum ein.

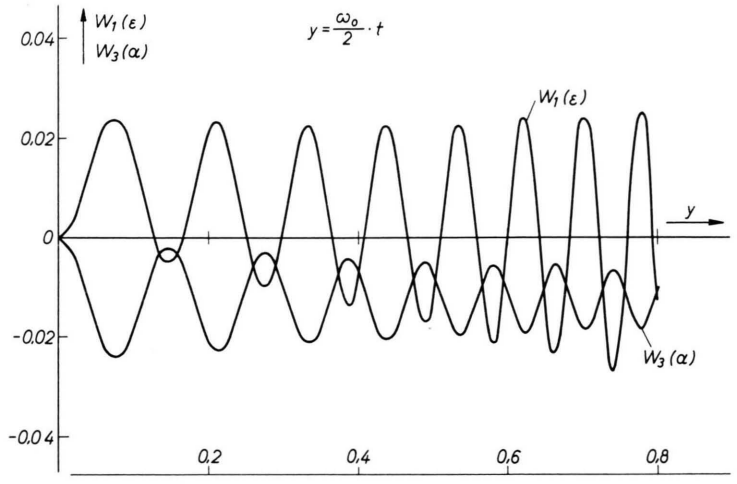

Abb. 3. Phasenabweichungen der Wellenkomponenten vom Winkel φ auf Grund der Laplace-Gleichung für $n=10$:

$W_3(\alpha)$: Dichte, Druck,
$W_1(\varepsilon)$: Schallschnelle.

b) Abnehmende Gesamtenergie

Dieser Fall läßt sich in dem Formelapparat unter a) formal durch den Übergang zu negativen Zeiten vollziehen. Dabei stellen sich gewisse Symmetriebeziehungen bei den Schlüsselgrößen α, β, ε, η heraus. Es gilt:

$$\begin{aligned} \alpha(-y) &= \varepsilon(y), \\ \beta(-y) &= -\eta(y), \\ \varepsilon(-y) &= \alpha(y), \\ \eta(-y) &= -\beta(y). \end{aligned} \tag{58}$$

Diese Symmetriebeziehungen fordern ein analoges Verhalten des Wellensystems, d. h.:

Die mittlere Energiedichte nimmt mit e^{-y} ab. Der Energieentzug geschieht über die potentielle Energie, wodurch das Gleichgewicht zur kinetischen Energie gestört wird. Diese Störung führt zu Modulationsschwingungen der Wellenkomponenten mit den entsprechenden Phasenverschiebungen. Die Amplitudenmodulation von Druck und Dichte wird größer, die von der Schallschnelle kleiner.

Die Welle erleidet jetzt einen avancierenden Phasensprung von $1/8\,n$.

Ausbreitung von Impulsen

Beliebige Impulsformen werden mathematisch mit dem Fourier-Integral dargestellt, d. h. an ihrem Zustandekommen tragen unendlich viele Wellenzüge mit verschiedenem λ bei. Alle diese Wellenzüge werden nach Abschnitt IV, dem herrschenden Zeitgesetz entsprechend, eine Amplitudenänderung durchmachen und einen Phasensprung erleiden. Die Modulationsschwingungen werden sich im Impuls weitgehend aufheben. Dadurch wird eine Impulsverformung im wesentlichen nur durch das mittlere Zeitgesetz sowie durch die wellenlängenabhängigen Phasensprünge eintreten. Sind die Impulsfronten unstetig in der ersten Ableitung, dann existieren dort Wellen mit gegen Null gehenden Phasensprüngen ($\lambda \to 0$).

Solche Impulsfronten pflanzen sich mit der herkömmlichen Schallgeschwindigkeit $\bar{c}$ fort:

$$\bar{c} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varrho}}\right)_s}. \tag{59}$$