DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. VIII No 1 1975

Тереза Михниковская-Плюцинская

СВОЙСТВО ОПЕРАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ВЫПОЛНЕННОЙ НА МОДИФИЦИРОВАННОМ ОБОБЩЕННОМ КВАЗИ-ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

I. Введение

С.Д. Эйдельман и Х. Милицер-Гружевская исследовали фундаментальные решения систем параболических по Петровскому интегрируемые в бесконечном промежутке относительно временной переменной.

В случае когда число измерений пространства n меньше порядка системы $2b$ построены так называемые специальные фундаментальные решения. Эти решения получено путем отбрасывания нескольких начальных членов в разложении квази-решения параболической системы в ряд Тейлора (см. [3]). С.Цонкала [4] заметил, что в случае нечетного числа измерений n можно построить так называемое модифицированное фундаментальное решение, которое имеет лучшие свойства при оценках чем специальное фундаментальное решение. Оно получено из ряда Тейлора путем отбрасывания меньшего числа членов чем раньше и является интегрируемым. В данной работе определен обобщенный модифицированный потенциал пространственного заряда (18) и доказанное для него свойство (28).

II. Постановка задачи

Пусть будет дана система m уравнений порядка $2b$, параболическая по Петровскому, в пространстве $R^n \times \langle 0, \infty)$ в следующем виде

$$(1) \qquad \sum_{0<|k|\leq 2b}^{1\leq j\leq m} A_{ij}^{(k)}(x,t)D^{(k)}u_j - \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0, \quad i=1,\dots,m,$$

где n нечетное число, пространственная переменная $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \Omega'$ (Ω' - ограниченная область пространства R^n) а временная переменная $t \geqslant 0$.

Коэффициенты $A_{ij}^{(k)}$ системы (1) ограничены и непрерывны в $(\Omega' \times \langle 0, \infty))$. Они удовлетворяют условиям Гельдера следующего вида

$$(2) \qquad \left|A_{ij}^{(k)}(x,t) - A_{ij}^{(k)}(\bar{x},\bar{t})\right| \leqslant \mathrm{const}\left[|x\bar{x}|^h + |t-\bar{t}|^{h'}\right],$$

когда $|k| = 2b$,

$$(3) \qquad \left|A_{ij}^{(k)}(x,t) - A_{ij}^{(k)}(\bar{x},\bar{t})\right| \leqslant \mathrm{const}|x\bar{x}|^h, \quad \text{когда } |k| < 2b,$$

причем $(k) = (k_1,\ldots,k_n)$, где $k_1, k_2,\ldots,k_n$ являются натуральными числами или равняются нулю, а $|k| = k_1 + k_2+\ldots+k_n$, $|x\bar{x}|$ - означает Евклидово расстояние двух точек $x,\bar{x}$ принадлежащих к области Ω', где $\bar{x} = (\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$; $|t - \bar{t}|$ - определяет величину модуля разницы двух величин временной переменной; const - означает универсальную положительную постоянную. Положительные постоянные h, h' не больше единицы.

Оператор дифференцирования в системе (1) имеет вид

$$D^{(k)} = \frac{\partial^{|k|}}{\partial^{k_1}x_1\,\partial^{k_2}x_2\ldots\partial^{k_n}x_n}.$$

Система (1) является параболической по Петровскому (ср [2] стр. 161).

Неизвестная функция $u(x,t)$ является столбцовой матрицей в следующем виде

$$(4) \qquad u(x,t) = \left[u_1(x,t),\ u_2(x,t),\ldots,u_n(x,t)\right].$$

Погожельский ([2], (9,7) стр. 180) нашел матрицу фундаментальных решений, которую запишем в следующем виде

$$(5) \qquad \Gamma(x,t;y,\tau) = \left(\Gamma_{\alpha\beta}(x,t;y,\tau)\right),$$

$$\alpha, \beta = 1,\ldots,m, \quad t > \tau \geqslant 0, \quad y = (y_1,\ldots,y_n) \in \Omega'.$$

В связи с системой (1) рассмотрим вспомагательную систему, в следующем виде

$$(6)\qquad \sum_{|k|=2b}^{1\leqslant j\leqslant m} A_{ij}(Z,\zeta)D^{(k)}u_j - \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0, \qquad i=1,2,\dots,m$$

где Z определенная точка области Ω' , ζ является величиной временной переменной.

Решение этой системы для $0 \leqslant t \leqslant T = \mathrm{const}$ (ср [2]) имеет вид матрицы

$$(7)\qquad W^{Z,\zeta}(x,t;y,\tau) = \left(W^{Z,\zeta}_{\alpha,\beta}(x,t;y,\tau)\right),\ \alpha,\beta = 1,\dots,m,$$

называемой матрицей квази-решений.
В решени (7) коэффициенты системы (6) постоянны в точке (Z,ζ), что намечено над буквой W.
Оценки для производных k - того порядка элементов матрицы (7) можно записать в виде (ср [2] (33) и (34))

$$(8)\qquad \left|D_x^{(k)}\left(W^{Z,\zeta}(x,t;y,\tau)\right)\right| < \frac{C_k}{\left(\sqrt[2b]{t-\tau}\right)^{n+|k|}} \exp\left[-\frac{c_k|xy|^q}{\sqrt[2b-1]{t-\tau}}\right],$$

где $q=\frac{2b}{2b-1}$ причем положительные постоянные C_k и c_k зависят от порядка производной, но не зависят от точки (Z,ζ).

Неравенство (8) справедливо для каждой пары (x,y) точек области Ω' при $0 \leqslant \tau < t < T$.

Оценки (8) можно переписать в другом виде

$$(9)\qquad \left|D_x^{(k)}\left(W^{Z,\zeta}(x,t;y,\tau)\right)\right| < \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{\mu}} \cdot \frac{1}{|xy|^{n+|k|-2b\mu}},$$

в котором $x \neq y$ и $0 < \mu < 1$, когда $|k| + n \geqslant 2b$.

В этой работе нас интересуют такие решения параболических систем, которые интегрируемы относительно временной переменной $t \in \langle 0, \infty)$. В связи с этой проблемой разработано теорию специальных решений, а в последнее время исследуются т.н. модифицированные решения. Решения эти получаем в случае, когда n меньше порядка системы $2b$. Нас будут интересовать такие

модифицированные решения, которые получаем в случае когда n является нечетным числом, т.е. $n = 2l + 1$; $l = 0,1,\ldots$
В случае когда n является четным числом теория специальных уравнений была подана С.Д. Эйдельманом и Х. Милицер-Гружевской. Начальные исследования относительно модифицированного квази-решения имеются в работе [1] стр. 7-14. Поскольку квази-решение (7) системы (6) для $t \in \langle 0,\infty)$ в случае $n < 2b$ не является интегрируемым относительно временной переменной, решение (7) раскладывается в ряды Тейлора относительно $(x-y)$ в окрестности точки $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n) \neq 0$ и пренебрегаем несколькими первыми членами, которые неинтегрируемы, относительно временной переменной t, в бесконечном промежутке.

Замечено, что в случае, когда размерность пространства нечетная,при конструировании модифицированного решения можно пренебречь одним выражением меньше чем при конструировании фундаментального специального решения. Это приводить к тому, что полученные таким образом функции после диференцирования просто оцениваются и не требуют сложных вычислении.

Определение модифицированного решения для системы (6) находим в формуле (25) работы [1] стр. 7. Запишем его в следующем виде

$$W^{z,\xi}(x,t;y,\tau,a) =$$

$$(10)\qquad = \sum_{|k|=2b-n}^{\infty} \frac{1}{|k|!}\left((\xi_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(\xi_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(k)}\left(W^{z,\xi}_{\alpha\beta}(x,t;y,\tau)\right)_{x-y=a}$$

$$\alpha,\beta = 1,\ldots,m$$

где обозначено $\xi_i = x_i - y_i$; $i = 1,2,\ldots,n$.

Модифицированное решение (10) можно записать при помощи решения (7) в следующем виде

$$(11)\qquad W^{z,\xi}(x,t;y,\tau,a) = W^{z,\xi}(x,t;y,\tau) - \mathcal{P}^{z,\xi}(x,t;y,\tau,a),$$

где

(12)
$$\mathcal{P}^{z,\xi}(x,t;y,\tau,a) =$$
$$= \sum_{|k|=0}^{2b-n-1} \frac{1}{|k|!}\left[(\xi_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(\xi_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(k)}\left(W^{z,\xi}_{\alpha,\beta}(x,t;y,\tau)\right)_{x-y=a}.$$

В дальнейшем будем нами рассуждения вести в области Ω', внутри которой находится ограниченная область Ω вместе с контуром S. $\Omega \subset \Omega' \subset R^n$; $x,y,z \in \Omega'$, $t,\tau,\xi \in \langle 0,\infty)$, размерность пространства $n = 2l+1$; $l = 0,1,\ldots$ точка $a \neq 0$, $a \in \Omega'$.

На основании формулы (3.2) и (3.3) в работе [1] известны оценки производных порядка p элементов матрицы модифицированного квази-решения. Переписываем их в следующем виде

(13)
$$\left|D_x^{(p)}\left(W^{z,\xi}(x,t;y,\tau,a)\right)\right| \leqslant \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{1+\frac{1}{2b}}}$$

для $t-\tau > 1$ и $|p| = 0,1,\ldots$

(14)
$$\left|D_x^{(p)}\left(W^{z,\xi}(x,t;y,\tau,a)\right)\right| \leqslant \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}}\cdot\frac{1}{|xy|^{n+|p|-2b\mu}}$$

для $0 < t-\tau < 1$ и $0 < \mu < 1$.

На основании (3.4) работы [1] известно, что

(15)
$$D_x^{(p)}\left(W^{z,\xi}(x,t;y,\tau,a)\right) = D_x^{(p)}\left(W^{z,\xi}(x,t;y,\tau)\right)$$

где $|p| > 2b-n-1$.

Обратим внимание на то, что основное специальное квази-решение отмечается от модифицированного квази-решения следующим членом (ср [1], (3.1) стр. 8)

(16)
$$d(x,t;y,\tau,a) =$$
$$= -\frac{1}{(2b-n)!}\left[(\xi_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(\xi_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(2b-n)}\left(W^{z,\xi}(x,t;y,\tau)\right)_{x-y=a}$$

III. Исследование квази-потенциала образованного при помощи модифицированного квази-решения

Будем пользоваться свойствами квази-потенциала пространственного заряда (ср [2], (64) стр. 173). В квази-потенциале находится плотность $\varphi(y,\tau) = [\varphi_1(y,\tau),\ldots,\varphi_m(y,\tau)]$ непрерывная и ограниченная в $(\Omega' \times (0,\infty))$ которая удовлетворяет условию Гельдера

$$(17) \qquad \left|\varphi(y,\tau) - \varphi(\bar{y},\bar{\tau})\right| \leqslant \mathrm{const}\left|y\bar{y}\right|^{h_\varphi}, \text{ где } h_\varphi \in (0,1).$$

Аналогично как в работе [1] исследуем свойства следующего обобщенного модифицированного квази-потенциала

$$(18) \qquad V(x,t,a) = \int_0^t \int_{\Omega'} W^{y,\tau}(x,t;y,\tau,a)\varphi(y,\tau)dyd\tau .$$

Для сокращения записи оператор выступающий в системе (6) запишем следующим образом

$$(19) \qquad L_0^{(z,\zeta)} = P_0 - \frac{\partial}{\partial t},$$

где $P_0 = \sum_{|k|=2b}^{1\leqslant j\leqslant m} A_{ij}^{(k)}(z,\zeta)D^{(k)}, \quad i=1,2,\ldots,m.$

Докажем теорему соответствующую теореме 5, стр. 180 в работе [2] для модифицированного квази-потенциала. С этой целью исследуем результат операции L_0 для $(z,\zeta)=(y,\tau)$ т.е. $L_0 = L_0^{(y,\tau)}$, на обобщенном модифицированном квази-потенциалом. Разложим предел интегрирования относительно τ на два частичных пределы, а именно от 0 до $t-T$, где $T = \mathrm{const}$ и от $t-T$ до t. В связи с этим имеем

$$(20) \qquad L_0(V(x,t,a)) = L_0\left(\int_0^{t-T}\int_{\Omega'} W^{y,\tau}(x,t;y,\tau,a)\varphi(y,\tau)dyd\tau\right) +$$

$$+ L_0\left(\int_{t-T}^{t}\int_{\Omega'} W^{y,\tau}(x,t;y,\tau,a)\varphi(y,\tau)dyd\tau\right).$$

На основании формулы (11) операции (20) можем представить следующим образом

$$(21)\qquad L_o(\vartheta(x,t,a)) = L_o\left(\int_{t-T}^{t}\int_{\Omega'} W^{y,\tau}(x,t;y,\tau)\varphi(y,\tau)dyd\tau\right) -$$

$$- P_o\left(\int_{t-T}^{t}\int_{\Omega'} p^{y,\tau}(x,t;y,\tau,a)\,\varphi(y,\tau)dyd\tau\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{t-T}^{t}\int_{\Omega'} p^{y,\tau}(x,t;y,\tau,a)\,\varphi(y,\tau)dyd\tau\right) +$$

$$+ L_o\left(\int_{0}^{t-T}\int_{\Omega'} W^{y,\tau}(x,t;y,\tau)\,\varphi(y,\tau)dyd\tau\right) -$$

$$- P_o\left(\int_{0}^{t-T}\int_{\Omega'} p^{y,\tau}(x,t;y,\tau,a)\,\varphi(y,\tau)dyd\tau\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{0}^{t-T}\int_{\Omega'} p^{y,\tau}(x,t;y,\tau a)\varphi(y,\tau)dyd\tau = I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6\,.$$

Заметим, что в слагаемых I_1, I_2, I_3 приращение временных параметров удовлетворяет неравенству $0 \leqslant t - \tau \leqslant T$.

В связи с этим может применить к слагаемому I_1 результаты теоремы 5 в работе [2]. Действительно

$$I_1 = L_o\left(\int_{t-T}^{t}\int_{\Omega'} W^{y,\tau}(x,t;y,\tau)\,\varphi(y,\tau)dyd\tau\right) =$$

$$= -\varphi(x,t) + \int_{t-T}^{t}\int_{\Omega'} L_o\left(W^{y,\tau}(x,t;y,\tau)\right)\varphi(y,\tau)dyd\tau = -\varphi(x,t)\,,$$

т.н. квази-решению удовлетворяет система (6), итак

$$(22)\qquad I_1 = -\,\varphi(x,t)\,.$$

В слагаемом I_2 оператор P_o имеет порядок выше чем степень многочлена $p^{y,\tau}(x,t;y,\tau,a)$ т.е. оператор P_o введенный под знак интегралов дает результат 0.

Поэтому

$$I_2 = 0. \tag{23}$$

Рассуждая таким же образом оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ можем ввести под знак интеграла

$$I_3 = \int_{t-T}^{t}\int_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial t}\left(p^{y,\tau}(x,t;y,\tau,a)\right)\varphi(y,\tau)dyd\tau. \tag{24}$$

В интегралах I_4, I_5, I_6 приращение временных параметров дает $t-\tau > T$, в связи с чем подинтегральные функции являются регулярными и соответственные операторы можно ввести под знаки интегралов. В связи с этим

$$I_4 = \int_{0}^{t-T}\int_{\Omega'} L_0\left(W^{y,\tau}(x,t;y,\tau)\right)\varphi(y,\tau)dyd\tau = 0, \tag{25}$$

поскольку $L_0\left(W^{y,\tau}\right) = 0$ (смотри (8), (9)),

$$I_5 = -\int_{0}^{t-T}\int_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial t}\left(p^{y,\tau}(x,t;y,\tau,a)\right)\varphi(y,\tau)dyd\tau = 0. \tag{26}$$

так как оператором порядка $2b$ действуем на многочлен порядка не более чем $2b-n-1$.

$$I_6 = \int_{0}^{t-T}\int_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial t}\left(p^{y,\tau}(x,t;y,\tau,a)\right)\varphi(y,\tau)dy\, d\tau. \tag{27}$$

На основании (21) и формул (22) - (27) получим

$$L_0\left(\vartheta(x,t,a)\right) = -\varphi(x,t) + \int_{0}^{t}\int_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial t}\left(p^{y,\tau}(x,t;y,\tau,a)\right)\varphi(y,\tau)dyd\tau. \tag{28}$$

Итак доказана следующая теорема.

Т е о р е м а: Если выполнены условия (2), (3), (17) и условия работы [2] относительно коэффициентов, то модифицированный обобщенный квази-потенциал пространственного заряда (18) относительно параболической системы (6) удовлетворяет свойству (28).

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. M i l i c e r - G r u ż e w s k a: Sur les solution fondamentales spéciales et modifiées. Polish Acad. of Sci Inst. of Math. Preprint nr 44 (1972).

[2] W. P o g o r z e l s k i: Równania całkowe i ich zastosowania, t. IV, Warszawa 1970.

[3] H. M i l i c e r - G r u ż e w s k a: Propriété limite de la matrice du potential spécial de simple couche d'un système parabolique d'équations. Ann. Pol. Math. 14 (1964) 239-268.

[4] S. C ą k a ł a: Solution fondamentale spéciale et modifiée de l'équation de la chaleur avec l'application à la construction de la solution fondamentale d'un système parabolique. Polish Acad. of Sci. Inst. of Math. Preprint nr 37 (March 1972).

Teresa Michnikowska-Plucińska
INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW

Received May 14, 1974.