1.

Beitrag zur Lehre von den Schwingungen elastischer fester Körper.

(Von Herrn *v. Heim*, Oberst-Lieutenant im Königlich-Würtembergischen Ehren-Invaliden-Corps zu Stuttgart.)

1.

Die beiderlei Aggregatzustände der Körper, welche man unter den Benennungen *fest* und *flüssig* zu begreifen pflegt, unterscheiden sich im Wesentlichen dadurch, dafs die Theilchen der *festen* Körper durch innern Zusammenhang unter sich verbunden sind und nur durch Kräfte, deren Stärke diesen Zusammenhang überwiegt, sich von einander trennen lassen, wogegen die Theilchen der *tropfbaren* oder *expansiv flüssigen* Körper (sofern von der Klebrigkeit, als einer nicht wesentlichen Eigenschaft derselben, abgesehen wird, oder sofern sie als vollkommen flüssig vorausgesetzt werden) einer Kraft, welche sie zu trennen strebt, für sich keinen Widerstand entgegensetzen, dafs sie nicht, wie die Theilchen der festen Körper, an eine bestimmte Ordnung, in der die verschiedenen Theilchen, im Zustande der Bewegung sowohl, als in dem der Ruhe sich neben einander befinden, gebunden sind und dafs sie im Allgemeinen eines äufsern Druckes, z. B. des Drucks der Schwere bedürfen, um während der Bewegung in stetiger Berührung zusammengehalten zu werden.

Indessen ist auch bei den festen Körpern, als solchen, die Verbindung ihrer Grundbestandtheile mit einander keineswegs als unveränderlich zu betrachten; und insbesondere kommt denjenigen Arten derselben, welche man *elastisch* nennt, die Eigenschaft zu, dafs ihre kleinsten Theile durch die Einwirkung äufserer Kräfte ihre gegenseitige Lage nach der eigenthümlichen Natur der Körper und nach der Stärke dieser Kräfte mehr oder weniger verändern, jene Lage aber, sobald die äufsere Einwirkung aufhört, wenn dieselbe ein gewisses Maafs nicht überschritten hat, von selbst wieder annehmen können.

Allein ungeachtet dieser möglichen Veränderungen behalten diese Körper dennoch die Natur des festen Aggregatzustandes, so dafs auch bei der in jenen räumlichen Veränderungen bestehenden Bewegungen jeder an irgend einem Puncte eines solchen Körpers angebrachte Druck oder Zug nach der ihm eigenthümlichen bestimmten Richtung sich dem ganzen Körper mittheilt und nur nach dieser Richtung auf denselben wirkt. Die Bewegung irgend eines Theils eines festen Körpers übt demzufolge durch seinen Zusammenhang mit den übrigen Theilen des Körpers einen unmittelbaren Einflufs auf die Bewegung aller dieser Theile aus; woraus weiter folgt, dafs, wenn es sich davon handelt, die Bewegungen, in welche die Theilchen eines elastischen festen Körpers durch äufsere, deren Spannkraft erregende Kräfte versetzt werden, durch Rechnung zu bestimmen oder die Beziehungen zwischen den spannenden Kräften und den räumlichen Veränderungen des Körpers durch Gleichungen auszudrücken, kein Theil desselben für sich allein und abgesondert von den übrigen Theilen betrachtet werden kann, sondern die Gleichungen nothwendig sämmtliche Theile des Körpers umfassen müssen.

2.

Anders verhält es sich mit der Bewegung flüssiger Körper. Bei einer flüssigen Masse pflanzt sich jeder Druck auf ihre Oberfläche und die Einwirkung jeder Kraft auf irgend ein Theilchen der Masse nach allen Richtungen im Innern fort, und der irgend ein Element der Flüssigkeit umgebende Druck stellt die gesammte Beziehung des Elements zu allen auf dasselbe wirkenden Kräften vor und begreift alle diese Kräfte in sich, so dafs man, wenn auch jedes Element durch seine Berührung mit den ihm nächsten Elementen auf die Bewegung dieser und anderer Theile Einflufs hat, dennoch dasselbe als für sich allein jenem Drucke unterworfen und durch ihn angetrieben und in Bewegung gesetzt betrachten kann.

Man könnte zwar einwenden, auch bei den elastischen festen Körpern träten die gegenseitigen Einwirkungen der verschiedenen Theilchen auf einander, d. h. die sogenannten Molecularkräfte an die Stelle des innern Zusammenhanges derselben, durch welchen, so wie durch den Druck, den die Elemente einer Flüssigkeit auf einander ausüben, eben jene Kräfte ihre Thätigkeit äufsern, und wenn daher bei der Bestimmung der Bewegung eines einzelnen Theils eines solchen Körpers diese Kräfte in die Rechnung eingehen, so sei dadurch zugleich auch auf die Verbindung dieses Theils mit den übrigen Theilen des Körpers die nöthige Rücksicht genommen. Allein das Sachverhältnifs ist bei den beiderlei Aggregatformen dennoch völlig verschieden. Irgend ein Theilchen eines flüssigen Körpers kann nämlich einer besondern, auf dasselbe wirkenden Kraft, wenn der dazu nöthige Raum vorhanden ist, für sich nachgeben, und eine durch die entstehende Bewegung dieses Theilchens eintretende

Veränderung in der gegenseitigen Lage der benachbarten Theilchen kann kein Hindernifs für diese Bewegung abgeben, sondern etwa nur zu dem Drucke, dem das Theilchen unterworfen ist, beitragen. Ein fester Körper, sei er elastisch oder nicht, kann dagegen, wie auch die bewegenden Kräfte an ihn angebracht seien, immer nur als Ganzes und keinerlei Theil desselben kann für sich in Bewegung gesetzt werden, so dafs die Geschwindigkeit der Bewegung des Körpers und jedes einzelnen Theils desselben in jedem Augenblicke der Bewegung von der ganzen Masse des Körpers abhangt.

3.

Die Bewegungen der elastischen festen Körper, von denen in diesem Aufsatze die Rede ist, lassen sich unterscheiden: in solche, welche durch Ausdehnung oder Zusammendrückung der Körper nach der Richtung ihrer Längs-Achse, ferner in solche, welche durch Drehung um diese Achse (durch Torsion) und in solche, welche durch Biegung hervorgebracht werden. Jede dieser Arten von Bewegung kann mit den beiden andern, oder mit einer derselben verbunden sein. Im Folgenden wird jedoch nur jede für sich, getrennt von den übrigen, näher betrachtet und es wird ferner vorausgesetzt werden, dafs die Längs-Achse (Centrallinie) (welche sowohl krumm als gerade sein kann) eine gerade Linie sei. Die Bewegungen werden *Schwingungen* genannt, wenn die Gestalt-Änderungen der Körper, welche die Bewegungen hervorbringen, in fortgesetzter Folge abwechselnd nach entgegengesetzten Seiten des Gleichgewichtstandes Statt haben.

4.

Sind mehrere materielle Puncte, deren jeder der Einwirkung einer oder mehrerer Kräfte unterworfen ist, auf irgend eine Art unter sich verbunden, so werden sie ihre, durch jene Kräfte hervorgebrachten Bewegungen gegenseitig modificiren; d. h. es wird die Bewegung, welche jeder der Puncte wirklich annimmt, nach Richtung und Geschwindigkeit im Allgemeinen von derjenigen verschieden sein, die er, in freiem Zustande für sich bestehend, durch dieselbe Einwirkung annehmen würde.

Man stelle sich in irgend einem Augenblicke der Bewegung die auf einen der Puncte wirkende bewegende Kraft, welche als gegeben zu betrachten ist, in zwei Theilkräfte so zerlegt vor, dafs die eine derselben der Geschwindigkeitszunahme dieses Puncts, wie sie in dem Augenblicke wirklich Statt findet, als bewegende Kraft entspricht. Die Wirkung der durch die Zerlegung sich ergebenden zweiten Theilkraft wird durch die Verbindung des Puncts mit den übrigen materiellen Puncten aufgehoben und die letztere Kraft daher die ***verlorne Kraft*** genannt.

Alle diese zum System gehörigen verlornen Kräfte müssen offenbar, wie grofs auch die Zahl der Puncte und wie auch deren Zusammenhang beschaffen sein mag, in jedem Augenblicke unter sich im Gleichgewicht sein, weil sonst Bewegung aus ihnen hervorgehen müfste und die ersten Theilkräfte, im Widerspruch mit der Annahme, nicht die sein könnten, von welchen allein die wirkliche Bewegung des Systems abhangt.

Der letztere Satz begreift im Wesentlichen den nach *d'Alembert* benannten Hanptgrundsatz der Dynamik (*d'Alembert,* Traité de Dynamique, 1758 No. 60. und ***Poisson,*** Traité de Mécanique, 1833, Tome II. No. 350) in sich, durch welchen die ganze Lehre von der Bewegung der Körper auf die Lehrsätze der Statik sich zurückführen läfst und alle diese Sätze zugleich bei jener Lehre Anwendung finden.

5.

Das angeführte Princip von *d'Alembert* setzt zwar seinem Begriffe nach eine Verbindung mehrerer materiellen Puncte voraus, läfst sich jedoch, wiewohl uneigentlich, auch auf einen einzelnen für sich bestehenden Punct, auf welchen eine oder mehrere Kräfte wirken, anwenden. In diesem besondern Falle, in welchem die zu zerlegende Kraft mit der ersten Theilkraft zusammenfällt, mufs demnach die verlorne Kraft für sich im Gleichgewicht, oder gleich Null sein, und in diesem uneigentlichen Sinne findet das Princip dann ebenfalls auf die Bewegung der flüssigen Körper Anwendung, indem, der Natur derselben gemäfs, bei der Bildung der Grundgleichungen für ihre Bewegung nur ein einzelnes Element in Betracht zu ziehen ist und betrachtet werden kann.

Ein solches Verfahren ist für die Lösung der die Bewegung der flüssigen Körper betreffenden Fragen zwar nicht nothwendig, insofern eine andere, etwas verschiedene Auffassungsweise die gleichen Ergebnisse liefert (Man vergleiche z. B. die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper von ***Euler,*** übersetzt von ***Brandes,*** 1806, 2ter Theil, 2ter Abschnitt), aber sie ist gestattet, da sie nichts Ungereimtes enthält. Wenn es sich dagegen von Bewegungen irgend einer Art der Elemente eines festen Körpers handelt, dessen Theile durch innern Zusammenhang, wenn auch nicht auf unveränderliche Weise, mit einander verbunden sind, so mufs nothwendig das Gleichgewicht als zwischen den verlornen Kräften sämmtlicher Elemente des Körpers bestehend angenommen werden und eine ähnliche Anwendung des genannten

Princips auf einzelne Elemente des Körpers, wie bei flüssigen Körpern, könnte, als mit dem Wesen und dem Begriffe des Princips in offenbarem Widerspruche stehend, nur zu unrichtigen Folgerungen führen.

6.

In dieser Beziehung mufs der Weg, den die französischen Schriftsteller, unter ihnen namentlich ***Poisson***, zur Entwickelung der Gesetze der Schwingungen elastischer fester Körper gefolgt sind, zu einem gewichtigen Bedenken Anlafs geben. In dem vom Gleichgewicht der festen Körper handelnden dritten Buche seines „Traité de Mécanique" sind von diesem Physiker die allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichts einer biegsamen Saite und einer elastischen Ruthe abgeleitet; welche Gleichungen, den Grundsätzen der Analysis gemäfs, auf ein einzelnes, im Zustande der ruhenden Spannung durch irgend welche Kräfte befindliches Element des gebogenen, oder nur nach seiner Längs-Achse gedehnten Körpers sich beziehen und durch entsprechende Integration die Gestalt desselben in gespanntem Zustande bestimmen. Dieser Gleichungen bedient sich ***Poisson***, indem er die verlorne Kraft des Elements an die Stelle der dasselbe spannenden Kräfte setzt, zur Darstellung der Grundgleichungen der Bewegung der genannten Körper, und gelangt hierdurch, in Bezug auf die Schwingungen der biegsamen Saite und der elastischen Ruthe in der Richtung ihrer Längs-Achse, zu Differential-Gleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen, welche der Form nach ganz mit den auf die Schwingungen der Luft in einer Röhre bezüglichen Gleichungen der Hydrodynamik übereinstimmen (No. 484, 494, 658).

Es ist aber klar, dafs wenn, wie es das Princip von ***d'Alembert*** seiner Grundbedeutung nach unstreitig fordert und wie es in andern Fällen der Bewegung fester Körper, z. B. bei der Umdrehungsbewegung eines solchen um eine feste Achse (No. 391), um einen festen Punct (No. 412) und bei der Bewegung eines Systems von Körpern (No. 531) auch von ***Poisson*** geschieht, die verlorenen Kräfte im ganzen Umfange des elastischen Körpers, oder des Systems, als im Gleichgewicht unter sich stehend angenommen werden, oder das Integral derselben nach der ganzen Ausdehnung des Körpers gleich Null gesetzt wird, wodurch die eine unabhängige Veränderliche aus den Gleichungen gänzlich verschwindet, die Ergebnisse der Rechnung ganz anders ausfallen müssen, als wenn die Gleichungen in der den flüssigen Körpern entsprechenden Form mit partiellen Differentialen dargestellt und behandelt werden.

7.

Zur Bestimmung der mit der Spannung elastischer fester Körper verbundenen Bewegung ist indessen noch ein weiterer Grundsatz nöthig: ein Grundsatz nämlich, durch welchen die Beziehung sich ausspricht, in der in jedem Augenblicke der Bewegung die Veränderung der Lage eines Elements des Körpers zu der irgend eines andern Elements steht.

Ein an einem Ende seiner Längs-Achse befestigter Körper, von gleichen Querschnitten und sonst gleicher Beschaffenheit, werde z. B. durch eine nach der Richtung dieser Achse wirkende Kraft ausgedehnt. Nach dem Grundgesetze, dafs gleiche Ursachen gleiche Wirkungen hervorbringen, werden offenbar gleich lange Theile des Körpers in jeder unendlich kleinen, und folglich auch in jeder endlichen Zeit, um gleich viel länger werden, oder eine gleiche Spannung annehmen. Haben die Theile des Körpers ungleiche Querschnitte und sind sie verschiedenen Kräften unterworfen, so folgt aus demselben Gesetze, dafs die Ausdehnungen und Spannungen gleich langer Theile nach einer und derselben Zeit direct wie die auf sie wirkenden Kräfte und umgekehrt wie die Flächen der Querschnitte derselben sich verhalten werden.

Aus ähnlichen Betrachtungen erhellet, dafs bei der Bewegung eines elastischen Körpers mit gleichen Querschnitten um seine Längs-Achse und bei der durch Biegung desselben entstehenden Bewegung die Momente der Spannungen der Querschnitte, oder die Drehwinkel und Krümmungswinkel in jedem Augenblicke der Bewegung wie die Momente der drehenden und biegenden Kräfte sich verhalten werden.

Jenem Grundsatze, welcher dazu soll dienen können, aus den als bekannt angenommenen, irgend einem Augenblicke der Bewegung entsprechenden räumlichen Veränderungen eines oder mehrerer Elemente des elastischen Körpers die der übrigen Elemente und des ganzen Körpers, so wie sie in demselben Augenblicke Statt finden, zu bestimmen, wird sich demgemäfs die allgemeine Fassung geben lassen: *dafs die Spannungen der verschiedenen Elemente eines elastischen Körpers in jedem Momente der durch die Spannung des Körpers entstehenden Bewegung sich eben so zu einander verhalten, wie wenn der Körper in diesem Momente im Zustande des Gleichgewichts mit den spannenden Kräften (der ruhenden Spannung) sich befände.*

Der oben angeführte Grundsatz beruht auf der Voraussetzung, dafs die die Bewegung des Körpers erzeugenden Kräfte ihre Wirksamkeit auf sämmtliche Theile des Körpers gleichzeitig ausüben, d. h. dafs die Übertragung dieser Wirksamkeit von den Angriffspuncten auf die nicht unmittelbar angegriffenen Theile des Körpers, wozu allerdings ein erster Anfang von Spannung nöthig scheint, in unbestimmbar kurzer Zeit erfolge: einer Voraussetzung, welche der ganzen Lehre von der Bewegung fester Körper zum Grunde liegt.

Den besonderen Betrachtungen, welche die vom Verfasser des gegenwärtigen Aufsatzes im Jahre 1838 herausgegebene Schrift „Über Gleichgewicht und Bewegung gespannter elastischer fester Körper etc." zur Unterstützung dieses Grundsatzes (§. 194.) enthält, mögen hier noch folgende weitere beigefügt werden.

8.

Eine elastische Stange sei um eine, an einem Ende ihrer Längs-Achse senkrecht auf diese angebrachte Achse beweglich; am andern Ende wirke eine Kraft auf Umdrehung der Stange um die letztere Achse. Die Bewegung werde durch Reibung, welche an dieser Achse Statt findet und welche sich nach Belieben vermehren und vermindern läfst, erschwert. Wäre keine Reibung vorhanden, so würde, vermöge der im vorigen Paragraph erwähnten Voraussetzung, die Umdrehung der Stange ohne Biegung derselben anfangen, sobald die Kraft zu wirken beginnt: wegen der Reibung aber mufs ein Theil der Kraft, welcher das gleiche Moment mit der Reibung hat (und welcher die für die Umdrehungsbewegung verlorne Kraft bildet) dazu verwendet werden, dieselbe zu überwinden; und nur durch den übrigen Theil der Kraft wird die Umdrehung hervorgebracht. Durch jenen Theil wird die Stange in Spannung versetzt, und die Umdrehung kann nicht eher anfangen, als bis der Grad der Spannung, welchen die Überwindung der Reibung erfordert, erzeugt ist. Dieselbe Theilkraft, welche den gleichen Angriffspunct und die gleiche Richtung hat wie die ganze Kraft, mufs daher beim Anfange der Umdrehung mit der Reibung im Gleichgewicht sein. Daher müssen auch die Spannungen der Querschnitte im Gleichgewicht sein mit dieser Theilkraft, und deren Momente müssen sich eben so zu einander verhalten, wie im Zustande des Gleichgewichts mit eben dieser sie spannenden Kraft. Dieses ist der Fall, mag die Reibung einem gröfsern oder kleineren Theile der ganzen Kraft gleich, oder eben so grofs wie diese sein, und es läfst sich für jeden Zustand der elastischen Stange, vom ungespannten an, bis zu dem der gröfsten Spannung, den sie annehmen mufs, oder für jeden Zeitpunct der die Spannung begleitenden Bewegung, d. h. der entstehenden Biegung, ein Grad der Reibung angeben, welcher der Spannung gerade das Gleichgewicht halten würde, auch wenn die ganze Kraft zur Überwindung der vorhandenen Reibung nicht hinreichte. Bei jedem solchen Grade der Reibung müfste das Verhältnifs der Spannungen, welche irgend zwei Querschnitte oder irgend zwei Elemente der Stange angenommen haben, dasselbe sein, wie wenn die Stange im Zustande der ruhenden Spannung, des Gleichgewichts mit der Theilkraft, welche gleiches Moment mit dieser Reibung hat, sich befände: daher mufs offenbar dasselbe Verhältnifs auch in dem entsprechenden Augenblick der mit der Biegung verbundenen Bewegung Statt finden; unabhängig von der Gröfse der Reibung oder des die Umdrehung erschwerenden Widerstandes, welcher wirklich vorhanden ist.

Eben diese Folgerungen müssen auch dann ihre Gültigkeit haben, wenn mehrere Kräfte an der Stange wirken, oder wenn an jedem Elemente derselben eine eigene Kraft, wie die Schwere, thätig ist, indem in diesem Falle, was hier von der biegenden Kraft gesagt ist, von der Resultirenden der Kräfte gilt.

Man bemerke noch, dafs das Verhältnifs zwischen den Spannungen je zweier Elemente des elastischen Körpers bei der Biegung von einem Augenblicke dieser Bewegung zum andern sich ändert, weil die Längen der Hebel-Arme, an denen die spannende Kraft auf je zwei Querschnitte wirkt, durch die Krümmung der, wenn auch ursprünglich geraden Längs-Achse des Körpers in jedem Augenblicke in ein anderes Verhältnifs zu einander treten, dafs jenes Verhältnifs aber bei der Drehung des Körpers um seine Längs-Achse (Torsion) und bei der Ausdehnung oder Zusammendrückung desselben nach der Richtung dieser Achse, als während der Bewegung unverändert und somit dem Verhältnisse, wie es im Zustande des Gleichgewichts mit der ganzen auf die Stange wirkenden Kraft besteht, als gleichbleibend betrachtet werden kann.

Die Darstellung der Grundgleichungen für die genannten Bewegungen der elastischen festen Körper, wie sie durch Anwendung des eben angeführten Grundsatzes und jenes von *d'Alembert* sich ergeben, wird Gegenstand der folgenden Paragraphen sein.

Bewegung einer elastischen Stange, welche durch Ausdehnung oder Zusammendrückung nach der Richtung der Centrallinien hervorgebracht wird.

9.

Eine am Ende A ihrer Länge befestigte elastische Stange (Taf. I. Fig. 1.) werde durch eine oder mehrere nach der Centrallinie AB wirkende Kräfte in der Richtung von A nach B, welche Richtung als diejenige der positiven dieser Kräfte angenommen wird, ausgedehnt; AB, die Länge der Centrallinie, sei $= l$, $Ax = x$, $Ax' = x + \partial x$, so dafs ∂x die Dicke der zwischen den beiden Normalschnitten an x und x' enthaltenen Normalschicht (des Elements) xx' bezeichnet. Nach Verflufs der Zeit t sei durch die Ausdehnung x nach M gekommen und $xM = u$, oder $AM = x + u$.

Die der Normalschicht an A eigenthümliche beschleunigende Kraft sei X, welche diese Schicht nach der positiven Richtung der x von x gegen B zu bewegen strebt. Die Spannung des Normalschnitts der elastischen Stange an x, welche mit T bezeichnet werde, ist als eine den ausdehnenden Kräften widerstrebende oder ihnen entgegengesetzt von B gegen A auf den Theil xB der Stange wirkende Kraft zu betrachten, welche von einem Normalschnitt zum andern mit der Summe der den Normalschnitt spannenden Kräfte zugleich wächst und abnimmt und, wenn x in $x + dx$ sich verändert, in $T + dT$ übergeht, so dafs dT der Normalschicht an x als eigenthümliche bewegende Kraft angehört.

Die beschleunigende Kraft X giebt, wenn ∂m die Masse der Normalschicht an x bedeutet, die bewegende Kraft $X\partial m$ und in dem der Zeit t entsprechenden Augenblicke der Bewegung sind demnach

$$X\partial m + \partial T$$

die bewegenden Kräfte für diese Normalschicht, durch welche sie, wenn sie frei wäre, von A gegen B angetrieben worden wäre. (Wenn X positiv ist, bekommt ∂T, als eine mit $X\partial m$ gleichartige Function ausgedrückt, einen negativen Werth, weil dann die Spannung an x gröfser ist, als an x'; und umgekehrt, wenn X negativ ist).

Die Geschwindigkeit, welche die Normalschicht an x nach Verflufs der Zeit t in der Richtung von x gegen B wirklich angenommen hat, ist $\frac{\delta u}{\delta t}$, und die ihr entsprechende beschleunigende Kraft ist $\frac{\delta^2 u}{\delta t^2}$: daher ist in demselben Augenblick die auf diese Schicht verlorne bewegende Kraft

$$(1.)\qquad = \left(X - \frac{\delta^2 u}{\delta t^2}\right)\partial m + \partial T.$$

Die letztere Kraft des einzelnen Elements setzt nun ***Poisson*** (Traité de Mécanique No. 493) für sich gleich Null und erhält dadurch dieselbe Gleichung wie für die Bewegung einer Flüssigkeit in einer Röhre, nämlich $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Eine solche Annahme ist jedoch, wie oben bemerkt, nicht statthaft. Sie würde die Gleichung $\partial T = \left(\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} - X\right)\partial m$ geben und dadurch, weil $\frac{\delta^2 u}{\delta t^2}$ eine nach

x veränderliche Gröfse ist, zu der Folgerung führen, dafs die Spannung T der elastischen Stange in jedem Falle, auch wenn sie durchaus gleiche Normalschnitte hätte und nur durch eine einzige, am Ende B ihrer Länge angebrachte Kraft gespannt würde, von einem Normalschnitt zum andern sich verändern müfste; was offenbar unrichtig ist.

10.

Nach dem Princip von *d'Alambert* mufs dagegen die Summe jener verlornen Kräfte (1.) im ganzen Umfange des Körpers gleich Null angenommen werden; woraus, wenn ferner aufser den Kräften X noch eine weitere Kraft p am Ende B der Stange nach der Richtung von A gegen B auf sie wirkt, die Gleichung

$$(2.)\quad \int_{l\div 0}\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\partial m+p+\int_{l\div 0}\partial T=0 \text{ folgt.}$$

Um die hier angedeutete Integration auszuführen, ist die Gröfse u als eine Function von x auszudrücken; was mittels des Grundsatzes (§. 7.) geschehen kann. Bezeichnet nämlich

Δl die Verlängerung der ganzen Stange nach t Zeit-Einheiten der Bewegung, in welcher die Dicke ∂x der Normalschicht an x um ∂u sich vergröfsert hat;

Σx zur Abkürzung die Summe $\int_{l\div x} X\partial m$ der Kräfte $X\partial m$ im Abschnitt xB der Stange;

S den Flächen-Inhalt des Normalschnitts an x:

so hat man vermöge dieses Grundsatzes, und da hier die Spannungen und Ausdehnungen je zweier Elemente der Stange in jedem Augenblicke sich eben so zu einander verhalten wie im Zustande des Gleichgewichts mit der ganzen Summe der spannenden Kräfte, die Proportion:

$$\partial u:\Delta l=\frac{p+\Sigma x}{S}\partial x:\int_{l\div 0}\frac{p+\Sigma x}{S}\partial x,$$

woraus ∂u

$$\partial u=\frac{\frac{p+\Sigma x}{S}\partial x}{\int_{l\div 0}\frac{p+\Sigma x}{S}\partial x}\cdot\Delta l \quad\text{und}\quad u=\frac{\int_{x\div 0}\frac{p+\Sigma x}{S}}{\int_{l\div 0}\frac{p+\Sigma x}{S}\partial x}\cdot\Delta l \quad\text{folgt.}$$

Die Spannung des Normalschnitts an x in dem Augenblicke, auf welchen die Verlängerungen Δl und ∂u sich beziehen, ist, wenn ε die eigenthümliche Spannkraft der Stange für eine Flächen-Einheit bezeichnet:

$$T = \varepsilon S \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \Delta l \cdot \frac{p + \Sigma x}{\int_{l \div 0} \frac{p + \Sigma x}{S}},$$

und es ist einleuchtend, dafs man in der Gleichung (2.) statt der Summengröfse

$\int_{l \div 0} \partial T = (T)_{l \div 0} = -\varepsilon \Delta l \frac{\int_{l \div 0} X \partial m}{\int_{l \div 0} \frac{p + \Sigma x}{S} \partial x}$ den Werth von T für $x = 0$ mit negativem Zeichen, nämlich $-\varepsilon \Delta l \frac{p + \int_{l \div 0} X \partial m}{\int_{l \div 0} \frac{p + \Sigma x}{S} \partial x}$ zu setzen, oder jener, nur die Kräfte X in sich schliefsenden Summengröfse wegen, der Kraft p noch das besondere Glied $-\varepsilon \Delta l \frac{p}{\int_{l \div 0} \frac{p + \Sigma x}{S} \partial x}$ beizufügen hat.

Die Gleichung (2.), in welcher nunmehr die Veränderliche x ganz verschwunden und als veränderliche Gröfse, nebst t, nur noch die Zeitfunction Δl enthalten ist, nimmt hiernach die Gestalt

$$(3.) \quad \Big(p + \int_{l \div 0} X \partial m\Big)\Big(\int_{l \div 0} \frac{p + \Sigma x}{S} \partial x - \varepsilon \Delta l\Big) - \frac{\partial^2 \Delta l}{\partial t^2} \cdot \int_{l \div 0} \Big(\int_{x \div 0} \frac{p + \Sigma x}{S} \partial x\Big) \partial m = 0 \text{ an.}$$

11.

Man setze nun, die elastische Stange sei am Ende A ihrer Länge in lothrechter Richtung befestigt, und als ausdehnende Kraft wirke, aufser der am Ende B angebrachten p, nur die eigene Schwere auf sie. Es sei ferner

$2g$ die Beschleunigung der Schwere, nämlich die Geschwindigkeit, welche ein im luftleeren Raume frei fallender Körper in der ersten Secunde erlangt;

β das Gewicht der körperlichen Einheit der Stange;

P ihr Gesammtgewicht.

Dieses vorausgesetzt, ist $X = 2g$, $\partial m = \frac{\beta}{2g} S \partial x$, $X \partial m = \beta S \partial x$, $\Sigma x = \beta \int_{l \div x} S \partial x$, $\int_{l \div 0} X \partial m = P$, und die Gleichung (3.) geht in

$$\frac{\delta^2 \Delta l}{\delta t^2} = \frac{2g(p+P)}{\beta \int\limits_{l \div 0} S\left(\int\limits_{x \div 0} \frac{p+\Sigma x}{S}\,\partial x\right)\partial x}\left(\int\limits_{l \div 0} \frac{p+\Sigma x}{S}\,\partial x - \varepsilon\,\Delta l\right)$$

über; welche Gleichung mit der in der angeführten Schrift „Über Gleichgewicht etc. §. 196. u. 197." auf anderem Wege gefundenen (wenn man wegen verschiedenen Anfangspuncts und entgegengesetzter Richtung der Abscissen x, in ihr $l-x$ statt x setzt) identisch ist und welche, unter Δl Verkürzung statt Verlängerung verstanden, eben so wohl gilt, wenn die elastische Stange nach der Richtung ihrer Längen-Achse zusammengedrückt, als wenn sie ausgedehnt wird.

Bewegung einer elastischen Stange, welche durch Drehung um die Centrallinie (durch Torsion) hervorgebracht wird.

12.

Eine am Ende A ihrer Länge befestigte elástische Stange (Fig. 2.) werde durch eines oder mehrere Kräftenpaare nach bestimmt gedachter Richtung (wie sie der Pfeil andeutet) um ihre Centrallinie AB so gedreht, dafs diese Linie gerade bleibt. Dieselbe Richtung werde als die der Kräften-Momente, deren Werthe positiv sind, angenommen. AB, die Länge der Centrallinie, sei $=l$, $As=s$, $As'=s+\partial s$, so dafs ∂s der Dicke der zwischen den beiden Normalschnitten an s und s' enthaltenen Normalschicht gleich ist. Nach Verflufs der Zeit t habe der Normalschnitt an s sich um den Winkel γ aus seiner anfänglichen Stellung, und somit der Normalschnitt an s' um den Winkel $\gamma+\partial\gamma$ gedreht.

Das Moment der der Normalschicht zwischen s und s' eigenthümlich angehörigen bewegenden Kräfte, welche sie nach der angegebenen Richtung zu drehen streben, heifse Γ, und das Moment der Spannung des Normalschnitts an s, mit welcher derselbe sich der Drehung widersetzt und welche durch die im Abschnitt sB der Stange angebrachten drehenden Kräfte hervorgebracht wird, sei τ. Wenn s um ∂s zunimmt, geht τ in $\tau+\partial\tau$ über und das Moment der der Normalschicht zwischen s und s' zugehörigen bewegenden Kräfte nach t Zeit-Einheiten der Bewegung ist demnach

$$\Gamma + \partial t,$$

indem ∂t negativ ist, wenn Γ einen positiven Werth hat.

In demselben Zeitmoment ist die Winkelgeschwindigkeit, mit der der Normalschnitt an s in der angedeuteten Richtung wirklich sich bewegt, $=\frac{\delta\gamma}{\delta t}$.

Bedeutet nun

∂i die Fläche irgend eines Elements dieses Normalschnitts am Puncte m;

ϱ den Abstand dieses Puncts von der Centrallinie;

∂m die Masse des Elements der Normalschicht am Puncte m:

so ist, wenn übrigens β und g die in (§. 11.) ihnen beigelegte Bedeutung behalten, $\partial m = \frac{\beta}{2g}\partial i\,\partial s$, und $\varrho^2\frac{\delta^2\gamma}{\delta t^2}\partial m = \frac{\beta}{2g}\frac{\delta^2\gamma}{\delta t^2}\varrho^2\,\partial i\,\partial s$ ist das Moment der der Winkelgeschwindigkeit des letztern Elements entsprechenden bewegenden Kraft. Daher ist, wenn ferner R statt des im ganzen Umfange des Normalschnitts genommenen Integrals $\int\varrho^2\,\partial i$ gesetzt wird, $\frac{\beta}{2g}\cdot\frac{\delta^2\gamma}{\delta t^2}R\,\partial s$ das Moment der der Winkelgeschwindigkeit der Normalschicht entsprechenden bewegenden Kraft und

$$\Gamma - \frac{\beta}{2\gamma}\frac{\delta^2\gamma}{\delta t^2}R\,\partial s + \partial\tau$$

das Moment der auf diese Normalschicht verlorenen bewegenden Kraft.

13.

Nach dem Grundsatze von *d'Alambert* müssen nun die Momente der verlornen Kräfte sämmtlicher Normalschichten der elastischen Stange unter sich im Gleichgewicht stehen, oder es mufs das auf die ganze Ausdehnung der Stange bezogene Integral des letztern Ausdrucks für ein solches Moment gleich Null sein. Werden die Momente Γ weggelassen und wird an deren Stelle das Moment Q eines Kräftenpaares, dessen Richtungen in der Ebene des Normalschnitts an B liegen, gesetzt, wodurch $\partial\tau = 0$ oder das Moment der Spannung τ nach s beständig wird: so hat man die Gleichung:

$$4. \qquad Q - \frac{\beta}{2g}\int_{l\div 0}\frac{\delta^2\gamma}{\delta t^2}R\,\partial s - \tau = 0;$$

indem das dem Moment Q entgegenwirkende (als positiv gesetzte) Moment τ mit negativem Zeichen zu nehmen ist.

Um den Winkel γ als Function von s auszudrücken, hat man ferner nach dem Grundsatze in (§. 7.), im Zustande der Bewegung, wie im Zustande der ruhenden Spannung:

$$\partial\gamma : \gamma = \frac{\partial s}{R} : \int_{s\div 0}\frac{\partial s}{R}$$

und, wenn γ_1 der Werth von γ für $s = l$ ist:

$$\gamma : \gamma_1 = \int\limits_{s \div 0} \frac{\partial s}{R} : \int\limits_{l \div 0} \frac{\partial s}{R} \quad \text{oder} \quad \gamma = \int\limits_{s \div 0} \frac{\partial s}{R} \cdot \frac{\gamma_1}{\int\limits_{l \div 0} \frac{\partial s}{R}}.$$

In demselben Augenblicke aber, in welchem die Normalschnitte an s und B um die Winkel γ und γ_1 sich gedreht haben, ist, wenn unter η die eigenthümliche Spannkraft der Stange gegen Drehung verstanden wird, das Moment der Spannung

$$\tau = \eta R \frac{\partial \gamma}{\partial s} = \frac{\eta \gamma_1}{\int\limits_{l \div 0} \frac{\partial s}{R}}.$$

Die Gleichung (4.) geht hiernach in

$$Q \int\limits_{l \div 0} \frac{\partial s}{R} - \eta \gamma_1 - \frac{\beta}{2g} \cdot \frac{\delta^2 \gamma_1}{\delta t^2} \cdot \int\limits_{l \div 0} R \Big(\int\limits_{s \div 0} \frac{\partial s}{R} \Big) \partial s = 0$$

oder in

$$\frac{\delta^2 \gamma_1}{\delta t^2} = \frac{2g}{\beta \int\limits_{l \div 0} R \Big(\int\limits_{s \div 0} \frac{\partial s}{R} \Big) \partial s} \Big(Q \int\limits_{l \div 0} \frac{\partial s}{R} - \eta \gamma_1 \Big)$$

über. Sie enthält in dieser Gestalt nur noch nach t, nicht aber nach s Veränderliche, und ist gleichbedeutend mit der in der angeführten Schrift „Über Gleichgewicht etc." (§. 210.) gefundenen Gleichung

$$\frac{\delta^2 \gamma}{\delta t^2} = \frac{2g}{\int\limits_{l \div 0} \frac{\Sigma \varrho s}{R} \partial s} \Big(Q \int\limits_{l \div 0} \frac{\partial s}{R} - \eta \gamma_1 \Big),$$

indem nach der dort angenommenen Bedeutung $\Sigma \varrho s = \beta \int\limits_{l \div s} R \, \partial s$ und

$$\int\limits_{l \div 0} \frac{\Sigma \varrho s}{R} \partial s = \beta \int\limits_{l \div 0} R \Big(\int\limits_{s \div 0} \frac{\partial s}{R} \Big) \partial s \quad \text{ist.}$$

Bewegung einer elastischen Stange, welche durch Biegung hervorgebracht wird.

14.

Eine am Ende A der (ursprünglich geraden) Centrallinie AB befestigte elastische Stange (Fig. 3.) werde durch eine am andern Ende B dieser Linie angebrachte, von B nach P gerichtete Kraft p so gebogen, dafs die Centrallinie mit der Richtung der biegenden Kraft in einer Ebene bleibt. AB, die Länge der Centrallinie, sei $= l$; der von A an gerechnete Bogen $As = s$;

$As' = s + \partial s$. Für die Curve AB nehme man die auf BP senkrechte aB als Achse der x mit dem Anfangspunct in a an, so dafs für $s = 0$ auch $x = 0$ ist; sx sei $= y$, $aB = x_1$. Nach Verflufs der Zeit t habe sich der Theil As der Centrallinie um den Winkel ω, den die beiden Normallinien an A und s mit einander bilden, gebogen und es sei somit der von den Normalschnitten an s und s' eingeschlossene Krümmungswinkel $= \partial\omega$. Die Richtung BP der biegenden Kraft, und folglich jene der Achse der x, werden als im Raume sich parallel bleibend angenommen; aber x und y sind ebenfalls Zeitfunctionen.

So wie die Kraft p mit dem Moment $p(x_1 - x)$ auf den Normalschnitt an s wirkt und denselben um die auf der Ebene der gebogenen Centrallinie senkrechte Biegungs-Achse an s zu drehen strebt, läfst sich auch das Moment der Spannung, mit der dieser Normalschnitt sich der Drehung widersetzt, als das Moment einer im Abstande xB vom Normalschnitt in der Geraden BP von P nach B wirkenden Kraft τ, oder die Spannung selbst als eine reducirte Kraft betrachten, deren Richtung jener der biegenden Kraft p gerade entgegengesetzt ist. Diese reducirte Kraft ist, da der Voraussetzung nach die Stange nur durch die Kraft p gebogen wird, vermöge des Grundsatzes in (§. 7.), in jedem Augenblicke der Bewegung nach s beständig; oder so wie ∂p ist $\partial\tau$ in jedem solchen Augenblicke gleich Null.

Die Bewegung, welche der Normalschnitt an s bei der Biegung annimmt, entsteht durch die Drehung sämmtlicher zwischen s und A enthaltenen Normalschnitte um ihre Biegungs-Achsen. In Bezug auf eine dieser Achsen, am Punct p, sei $s = {}_1s$, und in dem Zeitmoment, von dem es sich hier handelt, $x = {}_1x$, $y = {}_1y$, und der Winkel $\omega = {}_1\omega$. Bezeichnet, wie in (§. 12.), $\partial m = \frac{\beta}{2g}\partial i\,\partial s$ die Masse des Elements am Puncte m der Normalschicht an s, und bedeuten ferner zur Abkürzung

- $\underline{s}^2$ das Quadrat $(x - {}_1x)^2 + (y - {}_1y)^2$ der Sehne ps: eine symmetrische Function von s und ${}_1s$, welche sich nicht ändert, wenn in ihr $l - s$ statt s und zugleich $l - {}_1s$ statt ${}_1s$ gesetzt wird;
- S den Flächen-Inhalt des Normalschnitts an s und N dessen Drehungsmoment in Bezug auf seine Biegungs-Achse;
- ${}_1S$ und ${}_1N$ dieselben auf den Normalschnitt an p bezüglichen Gröfsen, welche von S und N nur dadurch sich unterscheiden, dafs in ihnen ${}_1s$ an der Stelle von s steht:

so ist $(pm)^2.\partial m$ das Drehungsmoment des genannten Elements der Normalschicht an s in Bezug auf die Biegungs-Achse am Punct p und, wie in der angef. Schrift „Über Gleichgewicht etc. §. 216." gezeigt ist, $(\underline{s}^2.S+N)\frac{\beta}{2g}\partial s$ das Drehungsmoment der Masse der Normalschicht in Bezug auf dieselbe Achse. Das Moment der der Drehung der Normalschicht an s um die Biegungs-Achse am Punct p, wie sie wirklich Statt findet, entsprechenden bewegenden Kraft nach t Zeit-Einheiten der Bewegung ist daher

$$=\frac{\delta^2\partial_1\omega}{\delta t^2}(\underline{s}^2.S+N)\frac{\beta}{2g}\partial s.$$

Nun hat man nach dem Grundsatze in (§. 7.)

$$\partial_1\omega:\partial\omega=\frac{x_1-{}_1x}{{}_1N}:\frac{x_1-x}{N}$$

und, da während der unendlich kleinen Zeit δt die Abstände $x_1-{}_1x$ und x_1-x nur um unendlich kleine Theile sich verändern, auch

$$\frac{\delta^2\partial_1\omega}{\delta t^2}:\frac{\delta^2\partial\omega}{\delta t^2}=\frac{x_1-{}_1x}{{}_1N}:\frac{x_1-x}{N},\quad \text{folglich}\quad \frac{\delta^2\partial_1\omega}{\delta t^2}=\frac{\delta^2\partial\omega}{\delta t^2}\cdot\frac{x_1-{}_1x}{x_1-x}\cdot\frac{N}{{}_1N}.$$

Das eben angeführte Moment läfst sich daher auch

$$=\frac{\delta^2\partial\omega}{\delta t^2}\cdot\frac{x_1-{}_1x}{{}_1x-x}\cdot\frac{N}{{}_1N}(\underline{s}^2.S+N)\frac{\beta}{2g}\partial s$$

setzen und, indem man mit $x_1-{}_1x$ dividirt, die bewegende Kraft selbst

$$=\frac{\delta^2\partial\omega}{\delta t^2}\cdot\frac{N}{x_1-x}\cdot\frac{\beta}{2g}\left(\frac{\underline{s}^2.S+N}{{}_1N}\right)\partial s.$$

Eine solche Kraft giebt es für jede Biegungs-Achse zwischen A und s, und die Summe dieser Kräfte ist, indem man, was erlaubt ist, $\partial_1 s$ statt ∂s setzt, der von ${}_1s=0$ bis ${}_1s=s$ zu nehmende Integral-Ausdruck

$$\frac{\delta^2\partial\omega}{\delta t^2}\cdot\frac{N}{x_1-x}\cdot\frac{\beta}{2g}\cdot\int_{s\div 0}\frac{\underline{s}^2.S+N}{{}_1N}\partial_1 s=\frac{\delta^2\frac{\partial\omega}{\partial s}}{\delta t^2}\cdot\frac{N}{x_1-x}\cdot\frac{\beta}{2g}\partial s\int_{s\div 0}\frac{\underline{s}^2.S+N}{{}_1N}\partial_1 s,$$

in welchem $\frac{\partial\omega N}{x_1-x}$ nach s und ${}_1s$ constant ist.

Dieser Ausdruck kann mit vorgesetztem negativen Zeichen, da $\partial\tau=0$ ist, zugleich als der Ausdruck der auf die Normalschicht an s verlorenen bewegenden Kraft angesehen werden.

15.

Wird, wie es das Princip von *d'Alambert* fordert, die Summe aller verlorenen bewegenden Kräfte im ganzen Umfange der Stange, wozu noch die

Kraft $p-\tau$ zu addiren ist, gleich Null gesetzt, so ergiebt sich die Gleichung

$$(5.)\qquad -\frac{\delta^2\frac{\partial\omega}{\partial s}}{\delta t^2}\cdot\frac{N}{x_1-x}\cdot\frac{\beta}{2g}\int\limits_{l\div 0}\Big(\int\limits_{s\div 0}\frac{\underline{s}^2.S+N}{{}_1N}\,\partial_1 s\Big)\partial s+p-\tau=0,$$

in der die Spannung τ, nach s constant, $=\frac{\varepsilon N}{x_1-x}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial s}$ ist, und aus welcher mithin die weitere Gleichung

$$(6.)\qquad \frac{\delta^2\frac{\partial\omega}{\partial s}}{\delta t^2}=\frac{2g}{\beta\int\limits_{l\div 0}\Big(\int\limits_{s\div 0}\frac{\underline{s}^2.S+N}{{}_1N}\,\partial_1 s\Big)\partial s}\Big(p\cdot\frac{x_1-x}{N}-\varepsilon\cdot\frac{\partial\omega}{\partial s}\Big)$$

folgt, welche mit der in der angef. Schrift „Über Gleichgewicht etc. §. 226." auf anderem Wege gefundenen Gleichung, in welcher $-\frac{\partial\omega}{\partial s}$ eben Das, was hier $\frac{\partial\omega}{\partial s}$, und x Das, was hier x_1-x ist, dann übereinstimmt, wenn das dortige Integral

$$\int\limits_{l\div 0}\frac{\Sigma xs}{N}\partial s=\beta\int\limits_{l\div 0}\Big(\int\limits_{s\div 0}\frac{\underline{s}^2.S+N}{{}_1N}\,\partial_1 s\Big)\partial s \text{ ist.}$$

16.

Dafs die letztere Gleichheit wirklich Statt hat, läfst sich auf folgende Weise zeigen.

Nach (§§. 214. und 216.) der angeführten Schrift ist

$$\Sigma xs=\beta\int\limits_{s\div 0}(\underline{s}^2.{}_1S+{}_1N)\,\partial_1 s;$$

wo alle Zeichen dieselbe Bedeutung haben, welche ihnen hier beigelegt ist; mit der Ausnahme, dafs ${}_1s$ und s vom freien Ende B der Centrallinie, nicht vom festen Ende A derselben an gerechnet sind. Setzt man daher $l-{}_1s$ statt ${}_1s$ und $l-s$ statt s, wodurch $\partial_1 s$ in $-\partial_1 s$, ∂s in $-\partial s$ übergeht und $\underline{s}^2$ sich nicht verändert, so wird

$$\Sigma xs=\beta\int\limits_{l\div s}(\underline{s}^2.{}_1S+{}_1N)\,\partial_1 s \quad\text{und}\quad \int\limits_{l\div 0}\frac{\Sigma xs}{N}\partial s=\beta\int\limits_{l\div 0}\Big(\int\limits_{l\div s}\Big(\frac{\underline{s}^2.{}_1S+{}_1N}{N}\,\partial_1 s\Big)\partial s;$$

wo nunmehr ${}_1s$ und s vom festen Ende A der Centrallinie an gerechnet sind; so dafs eben jene Gleichheit darin besteht, dafs

$$\int\limits_{l\div 0}\Big(\int\limits_{l\div s}\frac{\underline{s}^2.{}_1S+{}_1N}{N}\,\partial_1 s\Big)\partial s=\int\limits_{l\div 0}\Big(\int\limits_{s\div 0}\frac{\underline{s}^2.S+N}{{}_1N}\,\partial_1 s\Big)\partial s$$

ist; in welchen beiden Ausdrücken alle Zeichen ganz dieselbe Bedeutung haben.

Es sei nun F eine beliebige Function der beiden von einander unabhängigen Veränderlichen s und ${}_1s$, welche nach s und ${}_1s$ so integrirt werden soll, dafs, wenn man zuerst nach ${}_1s$ integrirt, das erste Integral von 0 bis s, und sodann das zweite Integral nach s von 0 bis l, den äufsersten Grenzwerthen von s und ${}_1s$, genommen wird. Wären die Grenzen der Veränderlichen ${}_1s$ unabhängig von s, so liefse sich ohne Weiteres die Ordnung der Integration umkehren und zuerst nach s, und dann nach ${}_1s$ integriren. Da aber die eine Grenze des Integrals nach ${}_1s$ von s abhangt, oder s selbst ist, so müssen die Grenzen des ersten Integrals, wenn es nach s genommen wird, bestimmt werden. Diese Grenzen sind aber keine andern als l und ${}_1s$, oder es mufs bei der ersten Integration s von ${}_1s$ bis l, und bei der zweiten ${}_1s$ von 0 bis l genommen werden. Dafs Dem so sei, zeigt ein Blick auf die nachstehende Zeichen-Gruppirung:

$$\begin{array}{lllll}
F^0_0, \\
F^0_{\mathrm{I}}, & F^1_{\mathrm{I}}, \\
F^0_{\mathrm{II}}, & F^1_{\mathrm{II}}, & F^2_{\mathrm{II}}, \\
F^0_{\mathrm{III}}, & F^1_{\mathrm{III}}, & F^2_{\mathrm{III}}, & F^3_{\mathrm{III}}, \\
F^0_{\mathrm{IV}}, & F^1_{\mathrm{IV}}, & F^2_{\mathrm{IV}}, & F^3_{\mathrm{IV}}, & F^4_{\mathrm{IV}}, \\
& & \text{etc.,}
\end{array}$$

in welcher die römischen Ziffern auf die Werthe von s, die arabischen auf jene von ${}_1s$ sich beziehen. Die Gröfsen F, welche die Zeichen vorstellen, können auf zweierlei Art zusammengezählt werden. In dem einen Falle wird zuerst jede horizontale Reihe für sich summirt und es werden hierauf alle diese Reihen zusammengenommen: im andern Falle wird zuerst jede verticale Reihe für sich summirt und es werden dann alle diese Reihen addirt. Der erste Fall entspricht der Integration zuerst nach ${}_1s$ und dann nach s, der andere der Integration zuerst nach s und dann nach ${}_1s$, und es ist augenscheinlich, dafs in jenem Falle ${}_1s$ von 0 bis s und s von 0 bis l, in diesem aber s von ${}_1s$ bis l und ${}_1s$ von 0 bis l zu nehmen ist. In beiden Fällen mufs die doppelte Summation dasselbe Resultat geben und es mufs demnach

$$\int_{l \div 0}\Big(\int_{s \div 0} F\,\partial_1 s\Big)\partial s = \int_{l \div 0}\Big(\int_{l \div {}_1s} F\,\partial s\Big)\partial_1 s$$

sein, oder auch, wenn man im zweiten dieser Ausdrücke, was erlaubt ist, s und ${}_1s$ verwechselt und mit ${}_1F$ die so veränderte Function F bezeichnet:

$$\int_{l \div 0}\Big(\int_{s \div 0} F\,\partial_1 s\Big)\partial s = \int_{l \div 0}\Big(\int_{l \div s} {}_1F\,\partial_1 s\Big)\partial s, \quad \text{daher ferner}$$

$$\int_{l \div 0}\Big(\int_{s \div 0} \frac{\underline{s}^2.S+N}{{}_1N}\,\partial_1 s\Big)\partial s = \int_{l \div 0}\Big(\int_{l \div s} \frac{\underline{s}^2.{}_1S+{}_1N}{N}\,\partial_1 s\Big)\partial s,$$

indem nämlich bei der Verwechselung von s und ${}_1s$ die Gröfse $\underline{s}^2$ ungeändert bleibt und S und N nur s, ${}_1S$ und ${}_1N$ nur ${}_1s$ enthalten. — Was zu erweisen war.

17.

Die Anwendung des Grundsatzes von *d'Alambert* führt demnach in den drei hier betrachteten Fällen der Bewegung elastischer fester Körper auf dieselben Grundgleichungen der Bewegung, welche in der angeführten Schrift, „Über Gleichgewicht etc." aus einer etwas verschiedenen Anschauungsweise sich ergeben haben, nicht aber auf jene, welche sich in dem genannten Werke von *Poisson* entwickelt finden.

In Bezug auf die Integration der hier dargestellten Grundgleichungen, so wie in Bezug auf einige andere mehr zusammengesetzte Fälle der Bewegung solcher Körper, ist ebenfalls auf die erste Schrift zu verweisen.

Noch mag bemerkt werden, dafs nicht nur die Gleichungen des sogenannten *äufsern* Gleichgewichts der elastischen festen Körper, nämlich des Gleichgewichts, welches zwischen den äufsern spannenden Kräften unter sich bestehen mufs, so wie die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der festen Körper überhaupt, welche durch das Princip von *d'Alambert* auf das Gleichgewicht zwischen den verlorenen Kräften bezogen werden und die, so wie jene des äufsern Gleichgewichts, den Körper den sie betreffen in seiner Gesammtheit und als Ganzes umfassen müssen: sondern vermöge des Grundsatzes (§. 7.) zugleich auch die Gleichungen des *innern*, zwischen den spannenden Kräften und der Spannkraft der Körper an ihren Querschnitten bestehenden Gleichgewichts, ebensowohl auf den Zustand der Bewegung der genannten Körper, von der hier die Rede ist, als auf den Zustand des Gleichgewichts derselben Anwendung finden. So müssen z. B. für das innere Gleichgewicht eines gebogenen elastischen Körpers, nach der angeführten Schrift (§. 33.) und mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnungen, die Gleichungen

$$1)\quad \int u\,\partial i = 0,$$
$$2)\quad \int ut\,\partial i = 0,$$
$$3)\quad \varepsilon m\int u^2\,\partial i - px = 0,$$ oder nach (§. 215.)
$$-\varepsilon N\frac{\partial\omega}{\partial s} - px = 0$$

Statt finden. Die dritte dieser Gleichungen kann, wenn $\frac{\partial\omega}{\partial s}$ aus der obigen Gleichung (6.) als Zeitfunction abgeleitet ist, dazu dienen, die Kraft p, welche in irgend einem Augenblicke der Bewegung der Spannung des Körpers das Gleichgewicht hält, zu bestimmen. Aus den beiden andern Gleichungen aber, welche von der Zeit unabhängig sind, folgt, dafs die Drehung der Normal-

3 *

schnitte des Körpers während der Bewegung stets um dieselben Axen Statt hat, welche für den Zustand der ruhenden Spannung sich ergeben.

Ferner mag hier noch die Andeutung Platz finden, dafs Nichts hindert, die Möglichkeit des gleichzeitigen Nebeneinanderbestehens mehrerer Folgen von Schwingungen in elastischen festen Körpern anzunehmen; so dafs die Schwingungen jeder Folge unter sich gleiche, aber eine andere Dauerzeit als jene der übrigen Folgen haben, und dafs hierin die secundären Töne, welche neben den Haupttönen an diesen Körpern öfters wahrgenommen werden, ihre Erklärung finden können.

Die erwähnten Gleichungen mit partiellen Differentialen, welche im „Traité de Mécanique T. II." mit grofsem Aufwande analytischer Gelehrsamkeit weiter behandelt sind, bilden die Grundlage der Lehre von den Schwingungen der biegsamen Saiten, sowohl als der elastischen festen Körper; wie sie in den Werken der französischen Mathematiker entwickelt und auf den physicalischen Theil der Akustik angewendet ist. Zwar findet man in ihnen häufig zur Bestätigung der Sätze dieser Lehre die Übereinstimmung derselben mit der Erfahrung angeführt; allein eine solche Berufung kann, wie Dem auch sei, einer Theorie, welche erwiesenermafsen auf unrichtigen Vordersätzen beruht, offenbar nicht als Stütze dienen, und der Verfasser dieses Aufsatzes glaubte weder hierdurch, noch durch die hohe Achtung, von der er vor Männern wie ***Poisson*** und dessen Vorgänger sich durchdrungen fühlt, sich abhalten lassen zu dürfen, seine Bedenken gegen jene Lehre auszusprechen. Überhaupt mag das Gesammt-Ergebnifs der vorstehenden Erörterungen wohl zu dem Ausspruche berechtigen, dafs der genannte Zweig der mathematischen Physik, so weit er auf die Schwingungen der elastischen festen Körper Bezug hat, noch eine gründlichere Ausbildung, als die jetzige Literatur sie aufzuweisen hat, wünschen läfst.

In dem Werke ***Eulers:*** „Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Laus. 1744," findet sich eine Auflösung des Problems von den Transversal-Schwingungen einer elastischen Ruthe, welche von der der französischen Physiker sehr wesentlich abweicht, aber eben so wenig wie diese als befriedigend möchte gelten können. Was ***Euler*** in „Novi comment. acad. Petrop. T. XV, 1770 und T. XX, 1775" über die obengenannte Art der Bewegung elastischer Körper gegeben hat, trifft dagegen in der Hauptsache mit der französischen Behandlungsweise des Gegenstandes zusammen.

Stuttgart, im Juli 1849.