

コイルばねの静的ならびに動的応力の解析*

沢 登 健**, 秋 山 雪 治***
Takeshi SAWANOBORI, Yukiharu AKIYAMA
塚 原 幸 茂****, 中 村 正 信**
Yukishige TSUKAHARA, Masanobu NAKAMURA

Key Words: Helical Spring, Stress Analysis, Pitch Angle, Finite Element Approach, Dynamic Spring Constant

1. 緒 言

素線断面が円形形状を有するコイルばねは、エネルギー吸収能力が優れ、取扱いも容易なので緩衝防振装置、荷重設定および調整機構の基本的要素として、広く利用されている。このため早くからコイルばねの合理的設計に対する努力が続けられ、Wahl⁽¹⁾や Ancker⁽²⁾をはじめ、多くの研究者により種々の応力解析法が提案されてきた⁽³⁾。これらのうち、Wahlの応力解析法が一般に用いられているが、ピッチ角と末端の効果を無視しているため、ばね素線に沿った応力の変動やばね折損位置の評価などには適さないことが指摘されている。

清水ら⁽⁴⁾は、ばねの応力解析においてはピッチ角と末端の効果を考慮することが必要であることを指摘し、これらの効果を考慮してばね中心軸に沿って平行圧縮されるコイルばねの断面力および断面モーメントを解析し、実際の折損現象が説明できることを示した。しかし、動的な応力解析においては、計算が複雑なためピッチ角を省略した解析に留めている⁽⁵⁾。

最近コイルばねは、高応力化、軽量化などのためにピッチ角を大きくする傾向にある。この場合、素線の外周部を起点とする早期折損が認められることがあり、これらを合理的に説明するために従来の応力解析法の見直しや再評価が必要とされている⁽⁶⁾⁽⁷⁾。しかしピッチ角や末端の効果を考慮して解析的に応力を評価するためには、面倒な計算を必要とするので、マトリックス法などを利用した数値解析法がコイルばねの応

力解析に用いられるようになってきており、有益な結果が得られている⁽⁷⁾⁽⁸⁾。著者らは、静的のみならず動的な場合まで含めてコイルばねの諸特性を解析するには、有限要素法を用いるのが適切であるとの考えから、先にピッチ角を考慮したコイルばね要素の質量および剛性マトリックスを求め、コイルばね自由振動の解析を行い、その有効性を示した⁽⁹⁾。この解析の際に求めた要素マトリックスではピッチ角が考慮されている上、有限要素法においては末端条件の考慮が容易であるので、応力解析においてもかなり良好な結果が得られるものと思われる。そこでばね中心軸に沿って静的ならびに動的に平行圧縮を受けるコイルばねの応力解析を有限要素法によって行ったところ、ピッチ角の応力におよぼす影響および応力分布などについて興味ある結果を得たので以下に報告する。

2. 記 号

図1(a)に示すように、素線軸上任意点における接線、主法線、従法線方向に x 軸、 y 軸、 z 軸をとり、各断面の変位および断面力の成分は、これらの座標軸に沿って考える。本報告で使用する主な記号は次のようである。

X, Y, Z : 断面力の x, y, z 成分
 T, H, M : 断面モーメントの x, y, z 成分
 u, v, w : 素線軸変位の x, y, z 成分
 β, δ, ϕ : 素線断面の回転角の x, y, z 成分
 r : 平均コイル半径
 d : 素線直径
 α : ピッチ角
 n : 有効巻数
 I : 素線断面の直径まわりの断面二次モーメント
 A : 素線断面積
 ρ_0 : 素線軸の曲率半径 $=r/\cos^2\alpha$

* 昭和58年10月9日 第61期全国大会講演会において論文講演として講演、原稿受付 昭和58年4月4日。

** 正員、山梨大学工学部(〒400 甲府市武田4-3-11)。

*** 学生員、山梨大学工学部。

**** 学生員、東京工業大学(〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

- η : 曲りはりの断面係数
 ξ : 素線断面の図心と中立軸の間の距離
 C : ばね指数 $= 2r/d$
 E : 縦弾性係数
 G : 横弾性係数
 ν : ポアソン比
 θ : ばね中心軸まわりの角座標
 φ : ばね要素の全巻角
 Φ : ばねの全巻角 $= 2\pi n$
 h : 端末の変位
 p_a : 公称圧縮力 $= Glh/\pi nr^3$
 τ_a : 公称せん断応力 $= p_a rd/4I$
 $\sigma_{\max}$: 最大主応力
 $\tau_{\max}$: 最大せん断応力
 ϵ_{45} : 素線軸に対して左 45° 方向のひずみ
 ω : 動的平行圧縮変位の振動数
 ω_1 : コイルばねの伸縮一次の固有円振動数
 k_s : ばね定数 $= Gd^4/64nr^3$
 k_d : 動ばね定数

3. 解 析

3.1 基本関係式 コイルばねの応力解析を有限要素法によって行うためには、図1(b)に示すコイルばね要素内の任意位置の変位を表す適当な表示式を求める必要がある。しかしばね要素のような曲率とねじれ率を有する空間曲線形構造要素に対して、応力解析に利用できる簡潔な表示式は見当たらない。そこで本報でも既報⁽⁹⁾と同様に、要素内の変位式としてコイルばねの静的つりあい状態における解析解を用いる。

既報⁽⁹⁾によれば、静的平衡状態にあるコイルばねの変位、角変位、断面力および断面モーメントは未定定数 $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ を用いて表すことができ、結果は

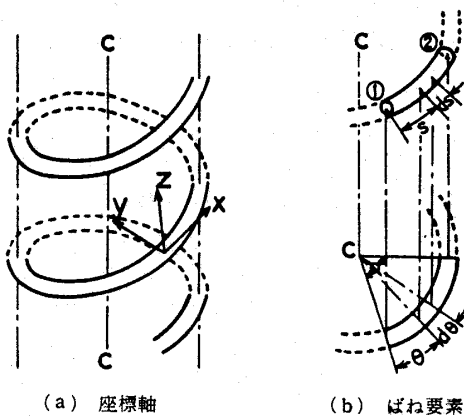


図 1

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta \\ \delta \\ \psi \end{Bmatrix}, x = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \\ H \\ M \end{Bmatrix}, a = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1)$$

で定義される変位ベクトル u 、断面力ベクトル x およびパラメータベクトル a を用いて

$$u = Aa \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$x = Ba \quad \dots\dots\dots (3)$$

と書くことができる。ここで A と B は、結合定数がピッチ角 α 、平均コイル半径 r 、素線直径 d などをパラメータとして含む $1, \theta, \theta^i \cos \theta, \theta^i \sin \theta (i=0, 1, 2, 3)$ の線形結合式で表される 6×12 のマトリックである。

式(6)と(7)で $\theta=0$ あるいは $\theta=\phi$ とおいた場合の u, x, A, B にそれぞれ添字 1 あるいは 2 をつけて表すことにすれば

$$u_1 = A_1 a, u_2 = A_2 a \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$x_1 = B_1 a, x_2 = B_2 a \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。 u_1 と u_2 はそれぞれ図1(b)のばね要素の節点①と節点②の変位ベクトルであるが、これらを

$$U_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

で定義される要素節点変位ベクトルの式に代入すると、パラメータベクトル a と要素節点変位を関係づける式

$$U_e = Pa \quad \dots\dots\dots (7)$$

が得られる。ここに P は

$$P = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

なる 12×12 の正方マトリックスである。

ばね要素の節点①と②の節点力ベクトルをそれぞれ F_1 と F_2 とすれば、これらの節点力と式(5)の断面力ベクトル x_1 と x_2 の間には

$$F_1 = -x_1, F_2 = x_2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

の関係が成り立つ。要素節点力ベクトルを

$$F_e = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (10)$$

と定義する。

3.2 要素マトリックス ばね要素の質量マトリックスと剛性マトリックスは、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを利用して求める。

ばね要素の運動エネルギー $K \cdot E$ とポテンシャルエネ

ルギ $P \cdot E$ は、対角要素 $m_i (i=1 \sim 6)$ が $m_1 = m_2 = m_3 = \rho A r / \cos \alpha$, $m_4 = 2\rho I r / \cos \alpha$, $m_5 = m_6 = 0$ である対角マトリックス M_d と対角要素 $k_i (i=1 \sim 6)$ が $k_1 = r / (EA \cos \alpha)$, $k_2 = k_3 = 0$, $k_4 = r / (2GI \cos \alpha)$, $k_5 = k_6 = r / (EI \cdot \cos \alpha)$ である対角マトリックス K_d を用いて

$$K \cdot E = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \dot{u}^t M_d \dot{u} d\theta \quad (11)$$

$$P \cdot E = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x^t K_d x d\theta \quad (12)$$

と表すことができる。ここで記号 $\cdot$ と t はそれぞれ時間微分と転置を表す記号である。式(2), (3), (7)を式(11)と(12)に用いれば

$$K \cdot E = \frac{1}{2} \dot{U}_e^t M_e \dot{U}_e \quad (13)$$

$$P \cdot E = \frac{1}{2} U_e^t K_e U_e \quad (14)$$

となる。ここで

$$M_e = P^{-t} \left[\int_0^{\pi} A^t M_d A d\theta \right] P^{-1} \quad (15)$$

$$K_e = P^{-t} \left[\int_0^{\pi} A^t K_d A d\theta \right] P^{-1} \quad (16)$$

で、 M_e と K_e はそれぞればね要素の質量マトリックスと剛性マトリックスである。なお、ばね要素の節点①と②における外力のなす仕事 $E \cdot W$ は

$$E \cdot W = U_e^t F_e \quad (17)$$

と表せる。

3.3 断面力の計算 式(13), (14), (17)をラグランジュの運動方程式に代入すれば、系に減衰がないときのばね要素の運動方程式

$$M_e \ddot{U}_e + K_e U_e = F_e \quad (18)$$

が得られる。各ばね要素に対して得られる式(18)を、各要素間の力のつりあいと変位の連続性を考慮して整理すれば、ばね全体の運動方程式として

$$M \ddot{U} + K U = F \quad (19)$$

を得る。ここで M , K , U , F はそれぞれコイルばね全体の質量マトリックス、剛性マトリックス、節点変位ベクトルおよび節点力ベクトルである。

コイルばねの変形条件あるいは作用荷重が与えられると、式(19)からコイルばねの節点変位を求めることができ、この結果を式(18)に用いれば、各ばね要素の節点力が求められ、したがって式(9)から断面力および断面モーメントが得られる。

以下では、円振動数 ω の正弦波状の変位あるいは作用荷重が与えられる場合について考える。この場合、 U_e , F_e , U , F の振幅をそれぞれ U_{e0} , F_{e0} , U_0 , F_0 とすれば式(18)と(19)の両式から

$$C_e U_{e0} = F_{e0} \quad (20)$$

$$C U_0 = F_0 \quad (21)$$

が成り立つ。ここで

$$C_e = K_e - \omega^2 M_e \quad (22)$$

$$C = K - \omega^2 M \quad (23)$$

である。式(21)で適当な並べかえを行って

$$\begin{bmatrix} C_{aa} & C_{ab} \\ C_{ba} & C_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{a0} \\ u_{b0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{a0} \\ F_{b0} \end{bmatrix} \quad (24)$$

とする。ここで u_{a0} と u_{b0} はそれぞれ U_0 の未知の節点振幅と既知の節点振幅よりなるベクトルであり、 F_{a0} と F_{b0} はそれぞれ既知の節点力振幅と未知の節点力振幅よりなるベクトルである。式(24)を解くと u_{a0} と F_{b0} は

$$u_{a0} = C_{aa}^{-1} (F_{a0} - C_{ab} u_{b0}) \quad (25)$$

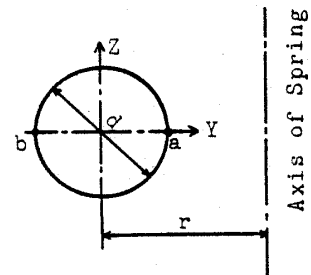
$$F_{b0} = (C_{bb} - C_{ba} C_{aa}^{-1} C_{ab}) u_{b0} + C_{ba} C_{aa}^{-1} F_{a0} \quad (26)$$

と求められる。 u_{a0} と u_{b0} を式(20)に用いれば、各要素の断面力と断面モーメントの振幅が得られる。

3.4 応力計算 コイルばねの応力計算においては、曲げまたはねじりを受けるはりの応力計算の場合と同様に、図2の yz 面の応力成分のみを考え、その他の応力成分は零と仮定する。コイルばねで応力上問題となるのは、素線の外周部と主法線 (y 軸) との交点である内径側の a と外径側の b である。この位置における応力は、上記の仮定から、素線軸 (x 軸) 方向の垂直応力 σ とせん断応力の z 軸方向の成分 τ のみであって、これらは断面力 X , Z と断面モーメント T , M を用いて

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \pm \frac{T(d \mp 2\xi)\rho_0}{2(2\rho_0 \mp d)} + 1.23 \frac{Z}{A} \\ \sigma &= \frac{X}{A} + \frac{M}{A\rho_0} \left(1 \mp \frac{d}{2\rho_0 \mp d} \right) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

と表すことができる。ここで式の複号は、内径側 a の応力計算の際は上側の符号を、外径側 b の応力計算の際は下側の符号を用いる。ばねの応力解析においては、最大主応力 $\sigma_{\max}$ と最大せん断応力 $\tau_{\max}$ が重要である



Y : Principal normal

Z : Binormal

図2 素線断面

が、これらは σ と τ を用いて

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \dots\dots\dots(28)$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \dots\dots\dots(29)$$

と表される。

内径側または外径側からみて、素線軸に対して左45°の方向のひずみ ϵ_{45} と σ 、 τ の間には

$$2G\epsilon_{45} = \frac{1-\nu}{2(1+\nu)}\sigma + \tau \quad \dots\dots\dots(30)$$

の関係があるので、素線軸に沿う応力分布を調べるときには、 $2G\epsilon_{45}$ を用いる。それは σ 、 τ の理論値と比較するための実験においては3方向ひずみゲージによる測定を必要とし、素線軸に沿う応力分布の検討の際は相当の手数を要するが、 $2G\epsilon_{45}$ との比較では実験は45°ひずみゲージによる測定のみでよいので、測定数を1/3に減らすことができるためである。なお式(30)の複号は式(27)におけると同様に用いている。 $2G\epsilon_{45}$ を以後換算応力と呼ぶ。

4. 実 験

解析結果と比較検討するために静的または動的に、ばね中心軸に沿って平行圧縮を受けるコイルばねの応力を求める実験を行う。図3(a)は静的な場合の実験・計測の概略図であり、図3(b)は動的な場合の実験・計測の概略図である。

静的実験では、図2の内径側aと外径側bに、端末より3/4巻めから半巻ごとに3方向ひずみゲージまたは45°ひずみゲージをはったコイルばねを、図3(a)に示すように万能試験機を用いてばね中心軸に沿って圧縮し、生じたひずみを測定する。ひずみ出力は、AD変換されてパーソナルコンピュータに読込まれ、デー

タ処理が施されて最大主応力 $\sigma_{\max}$ 、最大せん断応力 $\tau_{\max}$ 、換算応力 $2G\epsilon_{45}$ などが求められる。

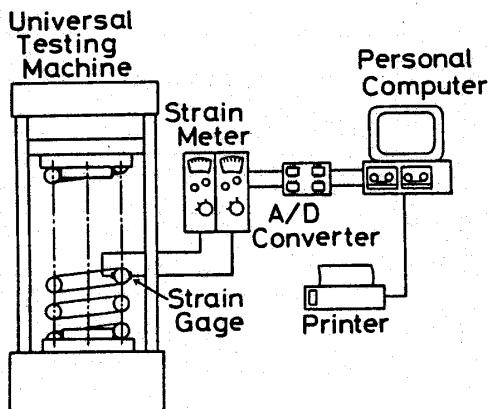
動の実験では、45°ひずみゲージを静的実験の場合と同様にはったコイルばねの一端を図3(b)に示すように加振機によって正弦的に圧縮し、このとき生ずるひずみの振幅を測定する。また動ばね定数を測定するために、コイルばねの固定端側にロードセルを取付け、中心軸方向の力の振幅を測定する。得られたひずみ出力は、波形記憶装置に読込まれ、モニターされた後GP-IBインターフェースを介して、パーソナルコンピュータに転送される。転送されたデータから、理論値と比較すべき換算応力 $2G\epsilon_{45}$ 、動ばね定数 k_d などを求め、結果をプリンタまたはX-Yプロットに出力する。図3(b)のリレーは、ひずみ測定点数に比べて波形記憶装置の入力端数が少ないのを補うために用いており、波形記憶装置に入力するひずみ出力の選択はパーソナルコンピュータのキーボード上からワンプードマイクロコンピュータを介して行う。

5. 結果と検討

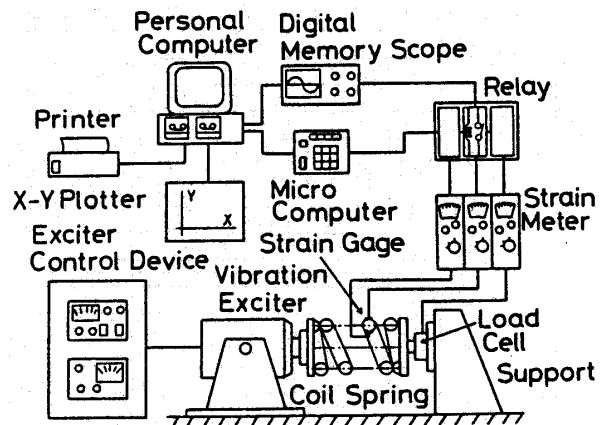
5.1 静的な場合

5.1.1 断面力と断面モーメントの計算例 本報の応力解析法では、ばね端に作用する荷重条件または変位条件が与えられるとばねの任意断面の応力を計算できるが、本報ではコイルばねをばね中心軸に沿って平行圧縮した場合の応力解析を行う。

本報の応力解析法では、はじめに断面力および断面モーメントを求めることが必要になる。図4はピッチ角と端末の効果を考慮して断面力と断面モーメントを計算した結果の代表例として、ばねの応力解析において主要なモーメント T の素線軸に沿う変動の様子を示したものである。図4は、有効巻数 n を6~7まで、



(a) 静的実験・計測の概略図



(b) 動の実験・計測の概略図

図 3

1/4 巻ずつ変化させ、それぞれの巻数についてピッチ角 $\alpha=0^\circ$ と $\alpha=4.8^\circ$ とした場合の計算結果であるが、 T には巻数とピッチ角に依存する特徴がみられる。すなわち、 $n=6$ と 7 の整数巻ではピッチ角 $\alpha=0^\circ$ では、素線軸に沿う T の変動はみられず一定であるのに対し、ピッチ角 $\alpha=4.8^\circ$ では端末付近で T は大きく変動し、ばね中央部の断面に行くに従って変動の度合は小さくなる。一方 $n=6.5$ の半整数巻では、 T はピッチ角 $\alpha=0^\circ$ と $\alpha=4.8^\circ$ の場合でも素線軸に沿ってほぼ同様に正弦的に変動する。整数巻 $n=6$ あるいは $n=7$ と半整数巻 $n=6.5$ の間では、ピッチ角 $\alpha=4.8^\circ$ の場合は、ばね端部での変動がいちばん大きく、ばね中央部に行くに従って変動の度合は小さくなるものの、整数巻 $n=6$ と $n=7$ の場合ほど顕著ではない。図 4 からピッチ角が小さい場合でも整数巻のコイルばねでは、ピッチ角を零とおくと、応力算定上大きな誤差を生ずることがわかる。

図 5 は断面力と断面モーメントのピッチ角依存性を整数巻 $n=6$ と半整数巻 $n=6.5$ について示したものである。静的な場合は、ばねの端末の断面力および断面モーメントが知られれば、素線軸に沿う断面力および断面モーメントの分布は、力およびモーメントのつりあい式から容易に求められるので、図 4 では端末の断面力と断面モーメントの計算値を示してある。

図 5 の計算に用いたばねでは、いずれの巻数におい

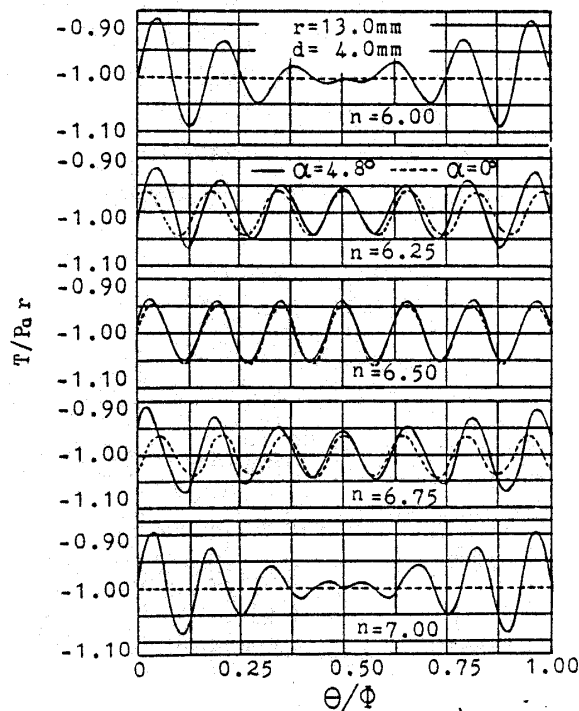


図 4 素線軸に沿うねじりモーメント T の分布

ても、ピッチ角 α が増大しても、 T および Z の変化は小さいのに対し、 M および X はその大きさを増しているのが特徴である。すなわち $\alpha=10^\circ$ では X は Z に対して整数巻 $n=6$ で 13%、半整数巻 $n=6.5$ で 18% の大きさに、 $\alpha=20^\circ$ ではそれぞれ 34% と 36% になっている。一方 M は T に対して $\alpha=10^\circ$ では整数巻 $n=6$ で 18%、半整数巻 $n=6.5$ で 23% の大きさに、 $\alpha=20^\circ$ ではそれぞれ 44% の大きさにになっている。断面モーメント H は、整数巻の $n=6$ では、ピッチ角が増大するにともない徐々に増加して $\alpha=10^\circ$ 以上では一定になるのに対し、半整数巻の $n=6.5$ の場合はピッチ角と無関係に一定である。任意断面における断面力および断面モーメントの変動は、端部における T, H, X の値と密接に関係しており、これらの値によって図 1 に示すような変動の相違が説明できるが、本報の方法ではこれらの値を求めることは容易である。

5.1.2 素線軸に沿う応力の計算結果と実験結果の比較 本報の計算方法の妥当性を確かめるために、ばね素線軸に沿った応力分布を調べた。応力分布については図 4 からわかるようにばね中央に対して対称性があるので、実験はばね端末からばね中央部の片側についてのみ行う。結果を図 6 に示すが、ピッチ角を考慮した本報の計算結果と実験結果はよく一致しており、ばねの応力解析ではピッチ角の影響を無視できないことがわかる。

5.1.3 応力修正係数 応力算定の基礎となる断面力および断面モーメントが、ピッチ角および巻数に依存して変化するため、コイルばね設計上問題となる最大せん断応力 $\tau_{\max}$ にもその影響が当然現れること

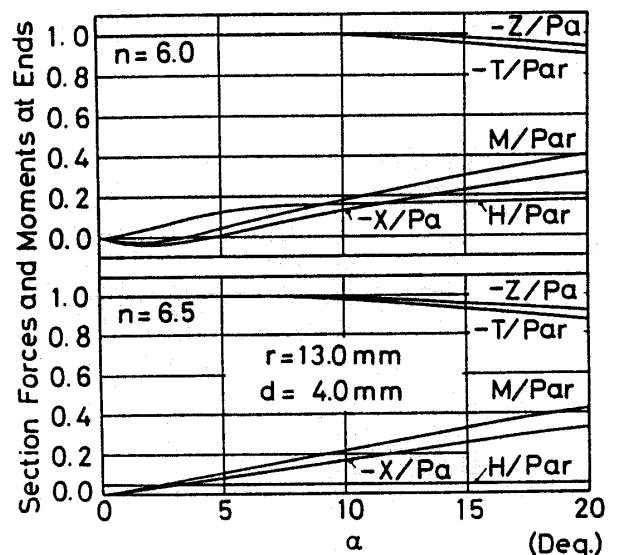


図 5 端末の断面力と断面モーメント

になる。図7はピッチ角と巻数によって最大せん断応力が変化する様子を、横軸にばね指数をとって応力修正係数の形で実験値とともに示したものである。図7には比較のために Wahl⁽¹⁾と Ancker ら⁽²⁾による結果も示してある。本報の応力修正係数は、図1と図2から分かるように、ピッチ角 $\alpha=0^\circ$ でない場合は垂直応力が存在するため、一般に最大せん断応力、したがって応力修正係数は大きくなる。ピッチ角 $\alpha=4.8^\circ$ では Wahl の応力修正係数に比較して整数巻 $n=6$ で10%、半整数巻 $n=6.5$ で4%程度本報の応力修正係数が大きい。Wahl の応力修正係数ではピッチ角および端末条件が考慮されておらず、また Ancker らの応力修正係数ではピッチ角は考慮するものの素線軸に沿う断面力および断面モーメントの変動を無視しているので本報の結果とは異なる。

5.1.4 最大主応力 先に5.1.1項でピッチ角 α の増大にともない M および X の大きさが増加することを述べたが、この場合 M および X の符号を考慮すると、 M と X は内径側で圧縮力、外径側で引張力を与える。その結果ばね中心軸に沿う平行圧縮においては、最大主応力はピッチ角が増すと内径側で減少し、外径側で増加する。最大主応力は疲労破損を検討する際に重要である⁽¹⁰⁾ので、最大主応力のピッチ角依存性を調べたのが図8である。図8の計算に用いた r

$=13\text{ mm}$, $d=4\text{ mm}$, $n=6.5$ のコイルばねでは、ピッチ角が小さい場合は、最大主応力は内径側の方が外径側より大きいが、 $\alpha=9.6^\circ$ 以上では逆に外径側の方が内径側より大きくなる。計算結果は実験結果とよく一致しており、本報の解析法の妥当性が示されるが、このようにピッチ角が大きいとき最大主応力が内径側より外径側で大きくなることは、ピッチ角の大きいコイルばねの外周部を起点とする早期折損を説明する重要な結果と思われる。

5.2 動的な場合

5.2.1 動的な応力の計算例 図9はコイルばねの一端を固定し、他端をばね中心軸方向に正弦的に平行圧縮した場合の素線軸に沿った内径側と外径側の応力振幅の分布を実験値とともに示したものである。計算に用いたコイルばねは $\alpha=4.8^\circ$, $n=6$, $r=24\text{ mm}$, d

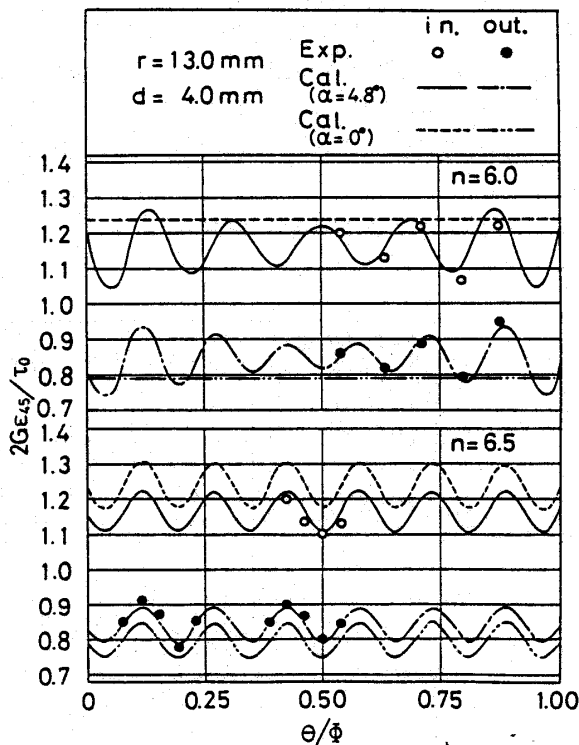


図6 素線軸に沿う静的応力分布

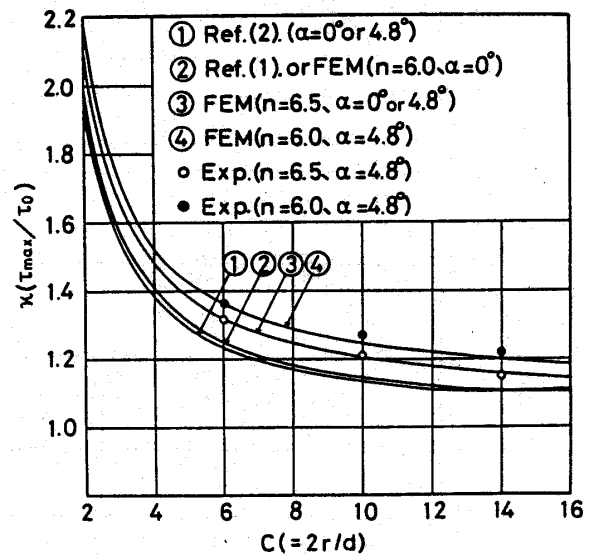


図7 応力修正係数

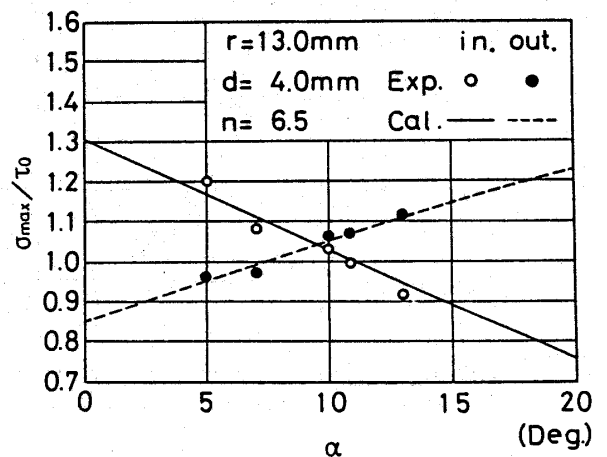


図8 最大応力のピッチ角依存性

=6 mm で、コイルばねが主としてばね中心軸に沿って振動する伸縮一次の固有振動数(サージング振動数)は $\omega_1=152$ Hz である。

図9では、伸縮1次の固有振動数以下の振動数での平行圧縮例として $\omega/\omega_1=0.55$ 、伸縮一次と二次の固有振動数の中間の振動数での平行圧縮例として $\omega/\omega_1=1.65$ 、伸縮二次と三次の固有振動数の中間の振動数

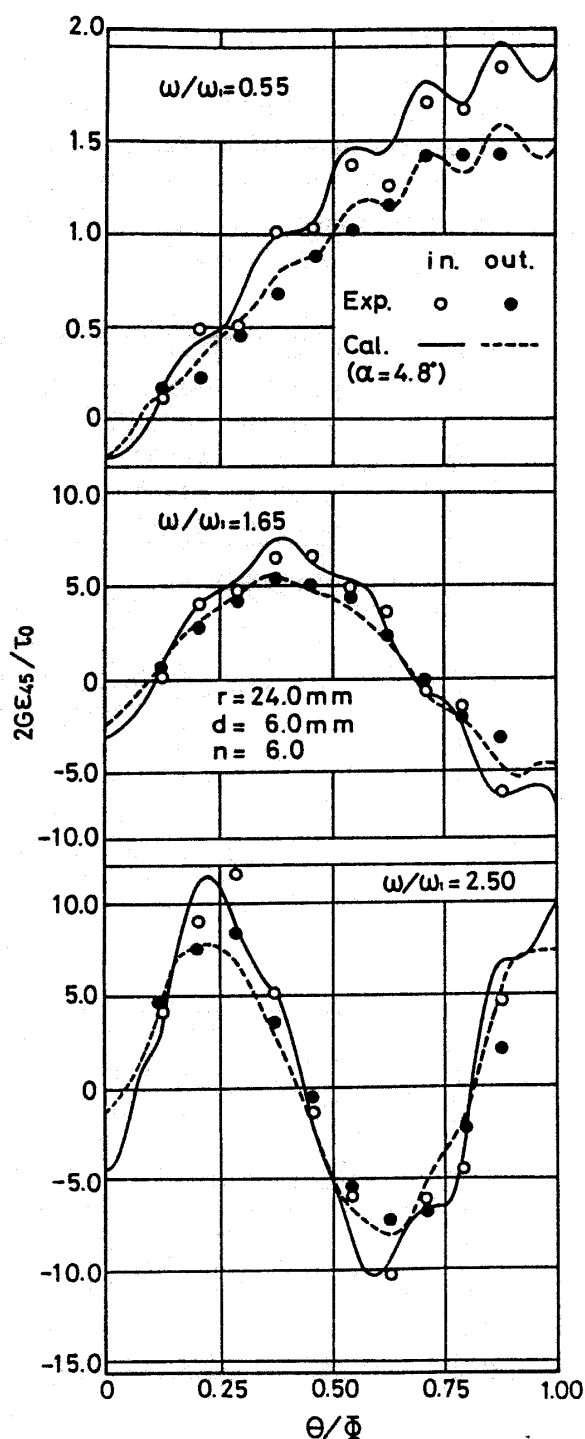


図9 素線軸に沿う動的応力分布

の例として $\omega/\omega_1=2.50$ の三つが描かれている。この場合、図9の応力振幅の分布は各振動数に対して非常に異なっているが、このような応力振幅の分布の様子は、両端固定のコイルばねの振動モードからある程度推定できる。それは、任意の周波数で正弦的に加振される場合の応答は、モード別に考えることができる上、コイルばねのばね中心軸に沿った平行圧縮では、伸縮のモードが重要で、コイルばねの応力解析で主要な T は w の θ に関する微分に大略比例するからである。コイルばねの伸縮の固有モードは既報⁽⁹⁾において詳しい計算を行っているが、それによると細かい点を除けば大略真直棒の縦振動の固有モードと同様である。このことに注意して図9の結果をみると、 $\omega/\omega_1=0.55$ では応力振幅の分布が伸縮一次と二次の固有モードの一次結合に対応した形になっており、そのため応力は加振端より固定端に向かって、ばね巻角に関して 2π 周期の小さな変動を繰返しながら増加して行く。平行圧縮の振動数が二つの伸縮固有振動数の間にある場合の応力振幅の分布は、振動数の大きさによって、二つの固有モードの一方またはそれらの一次結合形に対応した形の分布になるが、図9では $\omega/\omega_1=1.65$ の場合、二次伸縮モードに対応する応力振幅の分布になっており、また $\omega/\omega_1=2.50$ では三次の伸縮モードに対応する応力振幅の分布になっている。

図9の計算例は、平行圧縮の振動数がいずれも伸縮の固有振動数から離れているにもかかわらず、静的応力に比べて動的応力がかなり高くなることを示している。それで基本波の上に非常に小さな高調波が重なった形の圧縮変位の場合、コイルばねに生ずる付加的応力は必ずしも小さいとは限らないので注意が必要である。

図9には比較のために実験結果も記してあるが、計

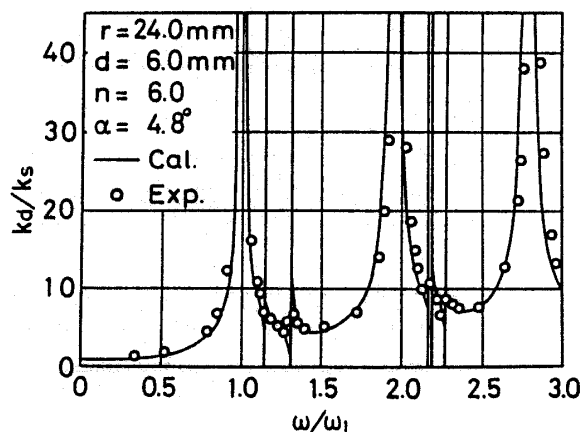


図10 動ばね定数

算結果とかなりよく一致しており、本報の解析法が動的応力解析において有効であることが示される。

5・2・2 動ばね定数 図10は、コイルばねの一端を固定し、他端をばね軸に沿って正弦波状に平行圧縮した場合にばね固定端に生じるばね中心軸方向の力の振幅を、ばね端の変位振幅で除した値、いわゆる動ばね定数の周波数依存性を示したものである。

図10で $\omega/\omega_1=1.0, 1.95, 2.78$ はそれぞれ、伸縮一次、二次、三次の固有振動数であるが、この振動数の付近では、動ばね定数は非常に大きくなり、ばねとしての機能を果たさない。また伸縮の固有振動数の間で、動ばね定数が鋭い立ち上がりを示す振動数は、振動モードがばね中心軸まわりの回転モードまたはばね中心軸横方向の曲げモードである固有振動数と一致している。これは、ピッチ角を考慮した結果、ばね中心軸方向の運動とばね中心軸まわりまたはばね中心軸横方向の運動が連成するために生じたものである。

動ばね定数の計算において、減衰効果を省略しているので、上に示したように動ばね定数が無限大となって現実的でない場合がある。しかしコイルばねの減衰は一般に非常に小さく、実験結果と比較すればわかるように、コイルばねの固有振動数の近くでも、計算結果と実験結果はよく一致している。したがって、動ばね定数は本報の計算法による算定で十分と思われる。

6. 結 言

本報告では、有限要素法を用いてピッチ角および端末効果を考慮したコイルばねの静的ならびに動的応力の解析を行い次の結論を得た。

まず静的解析では

(1) 応力解析の基本となる断面力および断面モーメントのうち、素線軸に沿う方向の断面力 X と従法線まわりの曲げモーメント M がピッチ角の影響を大

きく受ける。また素線軸まわりのねじりモーメント T の素線軸に沿う変化の様子は、整数巻の場合ピッチ角の影響を大きく受けるので、小さなピッチ角の場合でもこれを省略することは問題である。

(2) ピッチ角が増加すると、素線外周部の内径側で圧縮応力、外径側で引張応力が増加するように M と X が増加する。それで最大主応力はピッチ角の小さいときは内径側が外径側より大きく、ピッチ角が大きいときは外径側が内径側より大きい。

次に動的解析では

(1) 有限要素法によれば動的応力解析は静的応力解析と全く異なるところなく容易に実行できる。得られる動的応力は、周波数に依存して大きく変わるが、正弦的平行圧縮の場合は、コイルばねの伸縮の固有モードからおおよその様子を知らることができる。

(2) 本報の計算によれば、動ばね定数の計算も容易であり、計算結果は高次の振動数まで実験結果とよく一致する。

本研究の遂行にあたって、日本発条(株)の板倉部長、斉藤・西山の両主査にばねの製作をはじめ種々の援助をいただいた。記して謝意を表する。

文 献

- (1) Wahl, A. M., *Trans. ASME*, APM-51-17 (1929), 185.
- (2) Ancker, C. J. and Goodier, J. N., *J. Appl. Mech.*, 4 (1958), 471.
- (3) Wahl, A. M., *Mechanical Spring*, (1963), 229, Mc Graw-Hill.
- (4) 清水・ほか2名, 機論, 27-179 (昭36), 1119.
- (5) 清水・ほか2名, 機論, 27-179 (昭36), 1138.
- (6) 下関・ほか3名, 機論, 45-396, C (昭54), 901.
- (7) 下関・早坂, 機論, 48-435, C (昭57), 1774.
- (8) 峰岸, 機械設計, 26-11 (昭57), 47.
- (9) 沢登・福島, 機論, 49-439, C (昭58), 422.
- (10) Almen, J. O. and Black, P. H., *Residual stresses and Fatigue in Metals*, (1963), 91, Mc Graw-Hill.

討 論

〔質問〕 松田 孝〔静岡大学工学部〕

コイルばねの動的設計のための実用的解析法として興味深く拝読した。次の点を質問する。

(1) 静的解析解を変位関数として用い、良い結果が得られた理由をどのように考えておられるか。

(2) 式(27)で、 τ はワールの式、 σ は曲りはりの式の適用と思うが、 I, η が欠落していないか。

(3) セン断応力 τ に断面力 Y は影響しないのか、

論

(4) ひずみの測定値から応力を正しく求めることは、実際上かなり難しいように思うが、ひずみの測定値から応力を求める過程を説明していただきたい。

〔回答〕 (1) 有限要素法では変位法の場合、要素の変位関数があらゆる剛体変位と一定ひずみ状態を表す完全性と要素内部および隣接する要素との境界において変位が連続であるという適合性を満足するならば、要素数を増すときその近似解は厳密解に単調に収束する(付1)。本報の解析で良い結果が得られるのは、

静的解析解を変位関数として用いているので、完全性と適合性が満足されていること、および質量マトリックスを求めるのに剛性マトリックスを求めるのと同じ変位関数を用いているので、質量マトリックスがコンシステント・マス・マトリックスになっており精度が良いことによるものと思われる。

(2) 式(27)には、ご指摘のように I, η が欠落し

ているので下記のように訂正する。

$$\begin{aligned}\tau &= \pm \frac{T(d \mp 2\xi)\rho_0}{2(\rho_0 \mp d)I} + 1.23 \frac{z}{A} \\ \sigma &= \frac{X}{A} + \frac{M}{A\rho_0} \left(1 \mp \frac{1}{\eta} \frac{d}{2\rho_0 \mp d} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (27)$$

(3) 断面力 Y は断面力 Z にくらべて十分小さ

付表 1

	a_1	a_3
u	$\frac{r^3}{2EIca^2} \left[\theta s\theta + sa^2 \left\{ (5i-6)\theta s\theta + 2(1-i)\theta^2 c\theta - \frac{i}{3}\theta^3 s\theta \right\} \right] + \frac{r}{2AE} \{-2c\theta + (gsa^2 + g + ca^2)\theta s\theta\}$	$\left\{ \frac{r^3 ta}{EI} (4i-3) + \frac{rta}{AE} (gca^2 + sa^2) \right\} \theta$
v	$\frac{r^3}{2EIca^3} \left[s\theta + \theta c\theta + sa^2 \left\{ (5i-6)s\theta + (i-2)(\theta c\theta + \theta^2 s\theta) - \frac{i}{3}\theta^3 c\theta \right\} \right] + \frac{r}{2AEca} (gsa^2 + g + ca^2)(s\theta + \theta c\theta)$	$\frac{r^3 sa}{EIca} (4i-3) + \frac{rsa}{AE} (g-1)$
w	$\frac{r^3 sa}{2EIca^3} \left[3(i-1)c\theta + (3i-4)\theta s\theta - i\theta^2 c\theta + sa^2 \left\{ (6-5i)\theta s\theta + 2(i-1)\theta^2 c\theta + \frac{i}{3}\theta^3 s\theta \right\} \right] + \frac{rta}{2AE} \{2gc\theta - (gsa^2 + g + ca^2)\theta s\theta\}$	$\left\{ \frac{r^3}{EI} (2i - fsa^2 - ca^2) + \frac{r}{AE} (gca^2 + sa^2) \right\} \theta$
β	$\frac{r^2 ta}{2EI} \{(2f-3i+3)(c\theta + \theta s\theta) + i\theta^2 c\theta\}$	$\frac{r^2 sa^2}{EI} (f-1)\theta$
δ	$\frac{r^2 sa}{2EIca^2} \{(3-i)\theta c\theta - i\theta^2 s\theta\}$	$\frac{r^2}{EIca} (1-2i)$
ϕ	$\frac{r^2}{2EIca^2} [2c\theta + sa^2 \{(3i-5)(c\theta + \theta s\theta) - i\theta^2 c\theta\}]$	$\frac{r^2 casa}{EI} (f-1)\theta$
X	$cas\theta$	sa
Y	$c\theta$	0
Z	$-sas\theta$	ca
T	$rsa\theta c\theta$	rca
H	$rta(c\theta - \theta s\theta)$	0
M	$-\frac{r}{ca} (s\theta + sa^2 \theta c\theta)$	$-rsa$

付表 2

	a_4	a_6	
u	$\frac{r^2 ta}{2EI} \{(1-i)\theta s\theta + i\theta^2 c\theta\}$	$\frac{r^2}{EI} (2fsa^2 + 2ca^2 - 1)\theta$	$ca = \cos \alpha$
v	$\frac{r^2 sa}{2EIca^2} \{(1-i)s\theta + (i+1)\theta c\theta - i\theta^2 s\theta\}$	$\frac{r^2}{EIca} (2fsa^2 + 2ca^2 - 1)$	$sa = \sin \alpha$
w	$\frac{-r^2}{2EIca^2} \{(ica^2 + i + sa^2)\theta s\theta + isa^2 \theta^2 c\theta\}$	$\frac{r^2 ta}{EI} (2i - fsa^2 - ca^2 - 2)\theta$	$ta = sa/ca$
β	$\frac{r}{EI} (i\theta s\theta - fc\theta)$	$\frac{rta}{EI} (fsa^2 + ca^2)\theta$	$c\theta = \cos \theta$
δ	$\frac{ri}{EIca} (s\theta + \theta c\theta)$	$\frac{rsa}{EI} (1-\alpha)$	$s\theta = \sin \theta$
ϕ	$\frac{rta}{EI} (c\theta - i\theta s\theta)$	$\frac{r}{EI} (fsa^2 + ca^2)\theta$	$f = \frac{E}{2G}$
			$g = \frac{\lambda E}{G}$
			$i = \frac{1}{2}(fca^2 + sa^2 + 1)$

a_2, a_5 要素は、それぞれ a_1, a_4 要素において、 $c\theta$ を $s\theta$, $s\theta$ を $-c\theta$ と置き換えたものとなる。また、 (X, Y, Z) の $(a_1, a_2, \dots, a_{12})$ 要素、 (T, H, M) の $(a_7, a_8, \dots, a_{12})$ 要素、 (β, δ, ϕ) の (a_{10}, a_{11}, a_{12}) 要素はすべて零である。さらに、 (T, H, M) の (a_4, a_5, a_6) 要素は、それぞれ (X, Y, Z) の (a_1, a_2, a_3) 要素に等しく、 $(u, v, w, \beta, \delta, \phi)$ の $(a_7, a_8, \dots, a_{12})$ 要素は、それぞれ (T, H, M, X, Y, Z) の $(a_1, a_2, \dots, a_6)$ 要素に等しい。

く、せん断応力 τ の計算の際にはその影響を無視できる。

(4) 素線軸に沿う方向のひずみを ϵ_0 、素線軸と 45° の方向のひずみを ϵ_{45} 、素線軸と 90° をなす方向のひずみを ϵ_{90} とすれば、素線軸方向の垂直応力 σ 、素線軸と 90° をなす方向の垂直応力 σ' およびせん断応力 τ は、 ν をポアソン比として

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{E(\epsilon_0 + \nu\epsilon_{90})}{1-\nu^2} \\ \sigma' &= \frac{E(\epsilon_{90} + \nu\epsilon_0')}{1-\nu^2} \\ \tau &= G(\epsilon_0 + \epsilon_{90} - 2\epsilon_{45}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (i)$$

である。ここで $\sigma' = 0$ 、すなわち $\epsilon_{90} = -\nu\epsilon_0$ と仮定すれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E\epsilon_0 \\ \tau &= G\{(1-\nu)\epsilon_0 - 2\epsilon_{45}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (ii)$$

となる。本報では $\epsilon_{90} = -\nu\epsilon_0$ の仮定の妥当性を実験的に確認した後、式(i)によってひずみの測定値から応力 σ と τ を求め、得られた σ と τ を式(28)と式(29)に用いて $\sigma_{\max}$ 、 $\tau_{\max}$ を算出した。

〔質問〕 小林 節夫〔日本発條(株)〕

(1) 図8では外径側と内径側の最大主応力が $\alpha \approx 10^\circ$ で等しくなっている。この交点に相当するピッチ角は、ばね指数 $c(=2r/d)$ や有効巻数 n の値に左右されるものと思われる。計算が膨大で大変であろうが、その傾向をグラフ化されれば、読者に益するところが大きいと思う。

(2) 貴論文を読者が実用する場合、 6×12 の行列 A および B の要素がわかっていると便利である。紙幅が許せばお示し願えないか。

(3) 式(15)、(16)の P^{-1} を定義されたい。

(4) 式(16)の A' および A は、それぞれ B' 、 B の誤記ではないか。

(付1) 鷺津ほか、有限要素ハンドブック I 基礎編、(昭56)、13、培風館。

〔回答〕 (1) 貴重な助言を感謝する。ご指摘のように内径側と外径側の最大主応力が等しくなるピッチ角がばね指数および有効巻数に依存してどのように変わるかを知ることは実用上有益だと思われるので、検討を行ってみたい。

(2) 行列 A 、 B の要素をすべて記するには、相当の紙幅を必要とするが、少し工夫して再整理したところ付表のようになり簡潔になったので、参考にしていただけたらと思う。

(3) P^{-1} なる表記法についてはやや説明不足であった。 $P^{-1} = (P^{-1})' = (P')^{-1}$ の意味で用いている。

(4) ご指摘の通りである。式(16)の A はすべて B と修正する。

〔質問〕 井上 順吉、陣内 靖介

〔九州工業大学〕

はん用性があり精度も良好な解析法興味深く拝読した。

(1) 実験もしくは計算において動的座屈に関する資料が何か得られていたらご教示願いたい。

(2) 動ばね定数を求める際、中心軸方向の力の振幅を加振端でなく固定端からとられたのはどのような理由によるものか。

〔回答〕 (1) 有限要素法によってコイルばねの動的座屈を解析する場合、周期係数を有する多自由度系の運動方程式の解の安定問題を論ずる必要があり、現在この解析方法を検討中なので、動的座屈に関する結果については今しばらくお待ち願いたい。

(2) JIS K 6394-1976 では、加硫ゴムのばね定数を求める場合、試験片の一端に強制変位を与えて、他端はロードセルを介して固定し、試験片に働く荷重を測定する方法を推奨しているので、本報の実験でもその方法に従った。