

539. 4. 019 : 539. 386

表面に集中衝撃せん断荷重を受ける半無限体*

神 宮 利 夫**, 土 田 栄 一 郎***
Toshio JINGU, Eichiro TSUCHIDA

1. 緒 言

一般に、衝撃荷重を受ければ応力が波動として物体内を伝ばするために、静荷重による応力解析では予想できない部分が破壊することがある。それゆえ、衝撃荷重を受ける場合の物体の各部における応力の時間的変動および最大応力と、それが生ずる位置を明らかにすることは衝撃破壊を解明する上で重要である。

それにはまず基本的な衝撃荷重を受ける問題を明らかにすることが必要であろう。半無限体表面に垂直に集中衝撃荷重あるいは等分布衝撃荷重を受ける軸対称問題は、H. Lamb⁽¹⁾を始め幾人かの研究者^{(2)~(5)}によって解析されてきた。最近では、渋谷・中原⁽⁶⁾が応力関数とラプラス変換を用い、表面にステップ関数状に変動する集中荷重を受ける半無限体の問題を厳密に解析し、応力波の伝ばならびに半無限体内の各点の応力の大きさとその時間的変動を詳細に示している。これに対して表面に集中衝撃せん断荷重を受ける半無限体の問題は非軸対称問題となり、解析はさらに困難になる。集中せん断荷重が半無限体あるいは厚板の表面に作用

する問題は C. C. Chao⁽⁷⁾ が半無限体について、A. Pytel⁽⁸⁾ が厚板について解析しているが、前者については半無限体表面の応答に注目して物体内部の波動の伝ばについては明らかにしていない。後者は定常振動における応答を示したものである。N. Davids⁽⁹⁾ も厚板問題を扱っている。また大好ら⁽¹⁰⁾は半無限体表面に有限幅に縦せん断衝撃荷重を受ける場合を解析している。本論文は渋谷・中原の解法⁽⁶⁾を非軸対称問題に拡張したもので、三次元動弾性理論に基づいて、表面にステップ関数状に変動する集中衝撃せん断荷重を受ける半無限体の問題を厳密に解析したものである。

解析においては3種の応力関数 $\varphi_0, \lambda_2, \lambda_3$ で解を表示し、ラプラス逆変換においては渋谷・中原⁽⁶⁾と同様直接 B_r 積分路に沿って積分を行った。そして理論解に基づき数値計算を行い、荷重点近傍の変位および応力の時間的変動を明らかにした。

2. 解 析 法

いま円柱座標 (r, θ, z) 方向の変位を (u_r, v_θ, w_z) 、時間を t とすれば慣性項を含む三次元動弾性基礎方程式は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} &= 0, & \nabla^2 v_\theta + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{r \partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} &= 0 \\ \nabla^2 w_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、

$$\nabla^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \quad c_s^2 = \frac{Gg}{\gamma}$$

であり、 G は横弾性係数、 ν はポアソン比、 γ は比重、 g は重力の加速度である。式 (1) を満足する解は応力関数 $\varphi_0, \lambda_2, \lambda_3$ を用いて次のように表せる⁽¹¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} - \cos \theta \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta}, & 2Gv_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} - \frac{\partial \lambda_3}{\partial r} \\ 2Gw_z &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \cos \theta \frac{\partial \lambda_2}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

* 昭和 55 年 4 月 2 日 第 57 期通常総会講演会において論文講演として講演，原稿受付 昭和 54 年 10 月 4 日。

** 正員，群馬大学工学部（〒376 桐生市天神町 1-5-1）。

*** 正員，埼玉大学工学部。

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} - \cos \theta \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta} \\
 \sigma_\theta &= \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \theta^2} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta} \\
 \sigma_z &= \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + \cos \theta \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial r \partial z} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \theta \partial z} \\
 \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \left(\sin \theta \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial r \partial z} - \cos \theta \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \theta \partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_3}{\partial r} - \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial \theta^2} \right) \\
 \tau_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \theta \partial z} + \frac{\sin \theta}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_2}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\cos \theta}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial r \partial z} \\
 \tau_{rz} &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r \partial z} + \frac{\sin \theta}{2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial r \partial \theta} \right) + \frac{\cos \theta}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda_3}{r \partial \theta \partial z}
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで,

$$\nabla^2 \varphi_0 = 0, \quad \nabla^2 \lambda_2 = 0, \quad \nabla^2 \lambda_3 = 0 \quad (4)$$

$$\nabla^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$c_1^2 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{G_g}{\gamma}$$

である.

式(4)はいずれも波動方程式であり, その解はそれぞれ c_1 または c_2 の速度をもつ波動を表す. 図1(a)のように時間 $t=0$ で半無限体が静止しているとすれば, すべての変位が零にならなければならない. したがって応力関数 $\varphi_0, \lambda_2, \lambda_3$ に対する初期条件は

$$(\varphi_0)_{t=0} = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \right)_{t=0} = 0, \quad (\lambda_2)_{t=0} = \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial t} \right)_{t=0} = 0, \quad (\lambda_3)_{t=0} = \left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right)_{t=0} = 0$$

この条件の下で式(4)をラプラス変換すれば,

$$\nabla^2 \bar{\varphi}_0 - \alpha_1^2 \bar{\varphi}_0 = 0, \quad \nabla^2 \bar{\lambda}_2 - \alpha_2^2 \bar{\lambda}_2 = 0, \quad \nabla^2 \bar{\lambda}_3 - \alpha_2^2 \bar{\lambda}_3 = 0 \quad (5)$$

ここで,

$$\alpha_1 = \frac{p}{c_1}, \quad \alpha_2 = \frac{p}{c_2}, \quad (\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) = \int_0^\infty (\varphi_0, \lambda_2, \lambda_3) e^{-pt} dt$$

である.

図1(a)のように, 半無限体表面 $z=0$ の半径 a の円形領域に等分布せん断荷重 p_0 が作用し, これがステップ関数状に変化する場合, $H(t)$ をヘビサイドのステップ関数として次の境界条件を満たさねばならない.

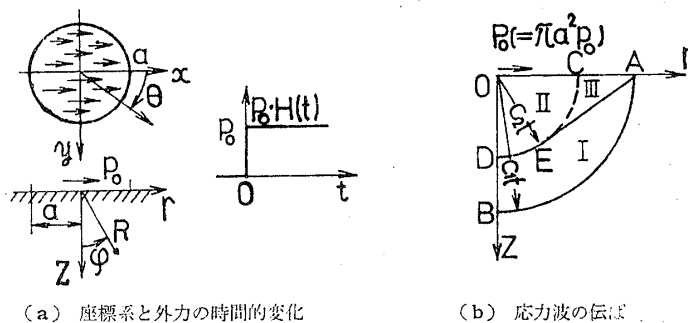
$$\left. \begin{aligned}
 (\sigma_z)_{z=0} &= 0 \quad (0 \leq r) & (\tau_{\theta z})_{z=0} &= \begin{cases} p_0 H(t) \sin \theta & (0 \leq r < a) \\ 0 & (a \leq r) \end{cases} \\
 (\tau_{rz})_{z=0} &= \begin{cases} -p_0 H(t) \cos \theta & (0 \leq r < a) \\ 0 & (a \leq r) \end{cases}
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(6)をラプラス変換すれば

$$\left. \begin{aligned}
 (\bar{\sigma}_z)_{z=0} &= 0 \quad (0 \leq r) & (\bar{\tau}_{\theta z})_{z=0} &= \begin{cases} p_0 \sin \theta / p & (0 \leq r < a) \\ 0 & (a \leq r) \end{cases} \\
 (\bar{\tau}_{rz})_{z=0} &= \begin{cases} -p_0 \cos \theta / p & (0 \leq r < a) \\ 0 & (a \leq r) \end{cases}
 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

さて, 式(7)を満足する解を求めるため, 無限遠方ですべての応力が消失しなければならないこと, また境界面の応力が $\cos \theta, \sin \theta$ に比例することを考慮して, ラプラス変換された応力関数を次のようにおく.

$$\bar{\varphi}_0 = \int_0^\infty A(\lambda) J_1(\lambda r) e^{-n_1 z} \cos \theta d\lambda, \quad \bar{\lambda}_2 = \int_0^\infty B(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-n_2 z} d\lambda, \quad \bar{\lambda}_3 = \int_0^\infty C(\lambda) J_1(\lambda r) e^{-n_2 z} \sin \theta d\lambda \quad (8)$$



(a) 座標系と外力の時間的变化

(b) 応力波の伝ば

図 1

ここで, $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ は境界条件より決定される未知関数であり, $n_1 = \sqrt{\lambda^2 + \alpha_1^2}$, $n_2 = \sqrt{\lambda^2 + \alpha_2^2}$ である.

また $J_n(\lambda r)$ は n 次の第一種ベッセル関数である. 式 (8) を式 (2), (3) のラプラス変換形に代入すれば, ラプラス変換された変位, 応力は次のようになる. ただし, A , B , C はそれぞれ $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ を J_0 , J_1 はそれぞれ $J_0(\lambda r)$, $J_1(\lambda r)$ を表すものとする.

$$\left. \begin{aligned} 2G\bar{u}_r &= \int_0^\infty \left[(A\lambda e^{-n_1 z} + Bn_2 e^{-n_2 z}) J_0 - (Ae^{-n_1 z} - Ce^{-n_2 z}) \frac{J_1}{r} \right] \cos \theta d\lambda \\ 2G\bar{v}_\theta &= - \int_0^\infty \left[(Bn_2 + C\lambda) e^{-n_2 z} J_0 + (Ae^{-n_1 z} - Ce^{-n_2 z}) \frac{J_1}{r} \right] \sin \theta d\lambda \\ 2G\bar{w}_z &= - \int_0^\infty [An_1 e^{-n_1 z} + B\lambda e^{-n_2 z}] J_1 \cos \theta d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \int_0^\infty \left[-(Ae^{-n_1 z} - Ce^{-n_2 z}) \frac{\lambda J_0}{r} - \left\{ A \left(n_1^2 - \frac{\alpha_2^2}{2} - \frac{2}{r^2} \right) e^{-n_1 z} + \left(Bn_2 \lambda + \frac{2C}{r^2} \right) e^{-n_2 z} \right\} J_1 \right] \cos \theta d\lambda \\ \bar{\sigma}_\theta &= \int_0^\infty \left[(Ae^{-n_1 z} - Ce^{-n_2 z}) \frac{\lambda J_0}{r} - \left\{ A \left(n_1^2 - \frac{\alpha_2^2}{2} + \frac{2}{r^2} - \lambda^2 \right) e^{-n_1 z} - \frac{2C}{r^2} e^{-n_2 z} \right\} J_1 \right] \cos \theta d\lambda \\ \bar{\sigma}_z &= \int_0^\infty \left[A \left(\frac{\alpha_2^2}{2} + \lambda^2 \right) e^{-n_1 z} + Bn_2 \lambda e^{-n_2 z} \right] J_1 \cos \theta d\lambda \\ \bar{\tau}_{r\theta} &= \int_0^\infty \left[-(Ae^{-n_1 z} - Ce^{-n_2 z}) \frac{\lambda J_0}{r} + \left\{ \frac{2A}{r^2} e^{-n_1 z} + \frac{1}{2} \left(Bn_2 \lambda + C\lambda^2 - \frac{4C}{r^2} \right) e^{-n_2 z} \right\} J_1 \right] \sin \theta d\lambda \\ \bar{\tau}_{\theta z} &= \int_0^\infty \left[(Bn_2 + C\lambda) \frac{n_2}{2} e^{-n_2 z} J_0 + \left\{ An_1 e^{-n_1 z} + \frac{1}{2} (B\lambda - Cn_2) e^{-n_2 z} \right\} \frac{J_1}{r} \right] \sin \theta d\lambda \\ \bar{\tau}_{zr} &= \int_0^\infty \left[- \left\{ An_1 \lambda e^{-n_1 z} + \frac{B}{2} (n_2^2 + \lambda^2) e^{-n_2 z} \right\} J_0 + \left\{ An_1 e^{-n_1 z} + \frac{1}{2} (B\lambda - Cn_2) e^{-n_2 z} \right\} \frac{J_1}{r} \right] \cos \theta d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

式 (10) を境界条件式 (7) に代入し, それぞれ J_0 , J_1 の係数を等置すると以下の関係式が得られる.

$$A \left(\frac{\alpha_2^2}{2} + \lambda^2 \right) + Bn_2 \lambda = 0 \dots\dots\dots (11)$$

$$An_1 + B \frac{\lambda}{2} - C \frac{n_2}{2} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$\int_0^\infty \left(B \frac{n_2^2}{2} + C \frac{n_2 \lambda}{2} \right) J_0 d\lambda = \begin{cases} p_0/p & (0 \leq r < a) \\ 0 & (a \leq r) \end{cases} \dots\dots\dots (13)$$

$$\int_0^\infty \left(An_1 \lambda + B \frac{n_2^2}{2} + B \frac{\lambda^2}{2} \right) J_0 d\lambda = \begin{cases} p_0/p & (0 \leq r < a) \\ 0 & (a \leq r) \end{cases} \dots\dots\dots (14)$$

式 (13), (14) にハンケル逆変換を施すと

$$B \frac{n_2^2}{2\lambda} + C \frac{n_2}{2} = \frac{p_0}{p} \frac{a}{\lambda} J_1(\lambda a) \dots\dots\dots (15)$$

$$An_1 + B \frac{n_2^2}{2\lambda} + B \frac{\lambda}{2} = \frac{p_0}{p} \frac{a}{\lambda} J_1(\lambda a) \dots\dots\dots (16)$$

ステップ関数状に変動する集中せん断荷重 P_0 を受ける場合には, $\pi a^2 p_0 = P_0$ として a を無限小とすれば式 (15), (16) の右辺は $\lim_{a \rightarrow 0} (p_0/p)(a/\lambda) J_1(\lambda a) = (P_0/2\pi)(1/p)$ となる. 式 (11), (15), (16) より未知関数 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ を求めれば

$$\left. \begin{aligned} A(\lambda) &= -\frac{P_0}{2\pi} \frac{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 + \alpha_2^2}}{\lambda^4 F(\lambda)} \frac{1}{p}, & B(\lambda) &= \frac{P_0}{2\pi} \frac{\lambda(\lambda^2 + \alpha_2^2/2)}{\lambda^4 F(\lambda)} \frac{1}{p} \\ C(\lambda) &= \frac{P_0}{2\pi} \frac{\lambda^2(\lambda^2 + \alpha_2^2/2) - 2\lambda^2 n_1 n_2}{n_2 \lambda^4 F(\lambda)} \frac{1}{p} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ここで,

$$\lambda^4 F(\lambda) = \left(\lambda^2 + \frac{\alpha_2^2}{2} \right)^2 - \lambda^2 \sqrt{\lambda^2 + \alpha_1^2} \sqrt{\lambda^2 + \alpha_2^2}$$

である.

式 (17) は式 (12) を自動的に満足する. 式 (17) を式 (9), (10) に代入してラプラス逆変換を行えば, 変

位および応力は 17 個の積分 I_i ($i=1\sim 17$) を用いて次のように表される.

$$\frac{4\pi G}{p_0 \cos \theta} u_r = -I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad \frac{4\pi G}{p_0 \sin \theta} v_\theta = -I_2 + I_3 + I_4 - I_5, \quad \frac{4\pi G}{p_0 \cos \theta} = I_6 - I_7 \dots\dots\dots(18)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\pi}{p_0 \cos \theta} \sigma_r &= \frac{1}{r} (I_1 - 2I_3 - 2I_4 + I_5) + I_8 - \frac{1}{2} I_9 - I_{10} \\ \frac{2\pi}{p_0 \cos \theta} \sigma_\theta &= -\frac{1}{r} (I_1 - 2I_3 - 2I_4 + I_5) + I_8 - \frac{1}{2} I_9 - I_{11}, \quad \frac{2\pi}{p_0 \cos \theta} \sigma_z = -\frac{1}{2} I_9 + I_{10} - I_{11} \\ \frac{2\pi}{p_0 \sin \theta} \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r} (I_1 - 2I_3 - 2I_4 + I_5) + \frac{1}{2} (I_{10} + I_{12}) \\ \frac{2\pi}{p_0 \sin \theta} \tau_{\theta z} &= -\frac{1}{r} I_6 + \frac{1}{2} (I_{13} + I_{14}) + I_{15}, \quad \frac{2\pi}{p_0 \cos \theta} \tau_{zr} = -\frac{1}{r} I_6 + I_{15} + I_{16} - I_{17} \end{aligned} \right\} \dots\dots(19)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{e^{pt}}{p} dp \int_0^\infty \frac{\lambda^3 n_2}{\lambda^4 F(\lambda)} J_0(\lambda r) e^{-n_1 z} d\lambda \\ I_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{e^{pt}}{p} dp \int_0^\infty \frac{\lambda n_2 (\lambda^2 + \alpha_2^2/2)}{\lambda^4 F(\lambda)} J_0(\lambda r) e^{-n_2 z} d\lambda \\ I_3 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{e^{pt}}{p} dp \int_0^\infty \frac{\lambda^2 n_2}{\lambda^4 F(\lambda)} \frac{J_1(\lambda r)}{r} e^{-n_1 z} d\lambda \\ I_4 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{e^{pt}}{p} dp \int_0^\infty \frac{\lambda^2 (\lambda^2 + \alpha_2^2/2) - 2\lambda^2 n_1 n_2}{n_2 \lambda^4 F(\lambda)} \frac{J_1(\lambda r)}{r} e^{-n_2 z} d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

(以下省略)

である.

積分 I_i ($i=1\sim 17$) は, いずれも λ に関する無限積分と p に関するラプラス逆変換積分からなる二重積分である. そこで $p=c_2\lambda s$, $\tau=c_2t$ において変数 p を s に変換すれば I_i は次のように表され, λ に関する積分が可能になる.

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{\sqrt{1+s^2}}{sF(s)} ds \int_0^\infty J_0(\lambda r) \exp \{-\lambda(z\sqrt{1+\kappa^2 s^2}-s\tau)\} d\lambda \\ I_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{(1+s^2/2)\sqrt{1+s^2}}{sF(s)} ds \int_0^\infty J_0(\lambda r) \exp \{-\lambda(z\sqrt{1+\kappa^2 s^2}-s\tau)\} d\lambda \\ I_3 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{\sqrt{1+s^2}}{sF(s)} ds \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda r)}{\lambda r} \exp \{-\lambda(z\sqrt{1+\kappa^2 s^2}-s\tau)\} d\lambda \\ I_4 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{1+s^2/2-2\sqrt{1+\kappa^2 s^2}\sqrt{1+s^2}}{\sqrt{1+s^2}F(s)} ds \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda r)}{\lambda r} \exp \{-\lambda(z\sqrt{1+\kappa^2 s^2}-s\tau)\} d\lambda \\ I_5 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{1+s^2/2-2\sqrt{1+\kappa^2 s^2}\sqrt{1+s^2}}{\sqrt{1+s^2}F(s)} ds \int_0^\infty J_0(\lambda r) \exp \{-\lambda(z\sqrt{1+\kappa^2 s^2}-s\tau)\} d\lambda \\ I_6 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{\sqrt{1+\kappa^2 s^2}\sqrt{1+s^2}}{sF(s)} ds \int_0^\infty J_1(\lambda r) \exp \{-\lambda(z\sqrt{1+\kappa^2 s^2}-s\tau)\} d\lambda \\ I_7 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{1+s^2/2}{sF(s)} ds \int_0^\infty J_1(\lambda r) \exp \{-\lambda(z\sqrt{1+\kappa^2 s^2}-s\tau)\} d\lambda \\ I_8 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{(1+\kappa^2 s^2)\sqrt{1+s^2}}{sF(s)} ds \int_0^\infty \lambda J_1(\lambda r) \exp \{-\lambda(z\sqrt{1+\kappa^2 s^2}-s\tau)\} d\lambda \\ I_9 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{s^2\sqrt{1+s^2}}{sF(s)} ds \int_0^\infty \lambda J_1(\lambda r) \exp \{-\lambda(z\sqrt{1+\kappa^2 s^2}-s\tau)\} d\lambda \\ I_{10} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{(1+s^2/2)\sqrt{1+s^2}}{sF(s)} ds \int_0^\infty \lambda J_1(\lambda r) \exp \{-\lambda(z\sqrt{1+\kappa^2 s^2}-s\tau)\} d\lambda \\ I_{11} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{\sqrt{1+s^2}}{sF(s)} ds \int_0^\infty \lambda J_1(\lambda r) \exp \{-\lambda(z\sqrt{1+\kappa^2 s^2}-s\tau)\} d\lambda \\ I_{12} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{1+s^2/2-2\sqrt{1+\kappa^2 s^2}\sqrt{1+s^2}}{\sqrt{1+s^2}F(s)} ds \int_0^\infty \lambda J_1(\lambda r) \exp \{-\lambda(z\sqrt{1+\kappa^2 s^2}-s\tau)\} d\lambda \\ I_{13} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{(1+s^2/2)(1+s^2)}{sF(s)} ds \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r) \exp \{-\lambda(z\sqrt{1+\kappa^2 s^2}-s\tau)\} d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots(21)$$

$$\begin{aligned}
I_{14} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{1+s^2/2-2\sqrt{1+\kappa^2 s^2}\sqrt{1+s^2}}{sF(s)} ds \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r) \exp\{-\lambda(z\sqrt{1+s^2}-s\tau)\} d\lambda \\
I_{15} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{\sqrt{1+\kappa^2 s^2}\sqrt{1+s^2}}{sF(s)} ds \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda r)}{r} \exp\{-\lambda(z\sqrt{1+s^2}-s\tau)\} d\lambda \\
I_{16} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{\sqrt{1+K^2 s^2}\sqrt{1+s^2}}{sF(s)} ds \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r) \exp\{-\lambda(z\sqrt{1+\kappa^2 s^2}-s\tau)\} d\lambda \\
I_{17} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{(1+s^2/2)^2}{sF(s)} ds \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r) \exp\{-\lambda(z\sqrt{1+s^2}-s\tau)\} d\lambda
\end{aligned}$$

ここで,

$$F(s) = \left(1 + \frac{s^2}{2}\right)^2 - \sqrt{1+\kappa^2 s^2} \sqrt{1+s^2}, \quad \kappa^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

である.

3. 積 分 計 算

式 (21) の被積分関数の特異点を求めるとこれは文献 (6) と同じになる. まず $sF(s)=0$ とおけば式 (21) の被積分関数は $s=0$ で 3 位の極, $s=\pm i\eta_1$ で 1 位の極をもつ. $F(s)=0$ の 1 位の極を与える η_1 は

$$\eta_1^6 - 8\eta_1^4 + 16\left(\frac{3}{2} - \kappa^2\right)\eta_1^2 - 16(1-\kappa^2) = 0$$

の正根である. この根は半無限体を伝ばするローレーの表面波の速度 c_R とせん断波の速度 c_2 の比 c_R/c_2 を与える. また $1+s^2=0$ より $s=\pm i\eta_2$, および $1+\kappa^2 s^2=0$ より $s=\pm i\eta_3$ が分岐点となり, η_2, η_3 はそれぞれ $1-\eta_2^2=0, 1-K^2\eta_3^2=0$ の正根である. 一方式 (21) を λ で積分すると, たとえば I_1 については,

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{\sqrt{1+s^2}}{sF(s)\sqrt{r^2+(z\sqrt{1+\kappa^2 s^2}-s\tau)^2}} ds$$

となるから, $r^2+(z\sqrt{1+\kappa^2 s^2}-s\tau)^2=0$ の根を $s_1=\xi_4+i\eta_4, s_2=\xi_4-i\eta_4$ とすればこの点は分岐点となる. 他の積分についても同様に調べれば, 結局

$$s_{1,2}=\xi_4\pm i\eta_4=\frac{z\sqrt{\tau^2-l^2(r^2+z^2)}\pm ir\tau}{\tau^2-l^2z^2}$$

が分岐点となる. ただし, I_i ($i=1, 3, 6, 8, 9, 11, 16$) では $l^2=K^2$, I_i ($i=2, 4, 5, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 17$) では $l^2=1$ である. これらの特異点は文献 (6) の図 2 に示されたものと同じである. 一般に, 動的結果は $S=0$ の特異点から得られる静的な結果を中心にして振動し, 静的結果を除けば, 積分値は時間が経過するとき零に収束することに注目し, 積分の収束性を高めるために, 被積分関数の原点まわりのローラン展開により静的結果⁽¹²⁾を被積分関数より分離し, λ に関する積分を実行すれば積分 $I_1\sim I_{17}$ は次のようになる.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{1}{R} \left\{ -(1+\kappa^4) - 2\kappa^2(1-\kappa^2) \frac{z^2}{R^2} + 2(1-\kappa^2)\tau^2 \frac{2z^2-r^2}{R^4} \right\} + L_1 \\
I_2 &= \frac{1}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{1}{R} \left\{ (1-2\kappa^2-\kappa^4) - 2(1-\kappa^2) \frac{z^2}{R^2} + 2(1-\kappa^2)\tau^2 \frac{2z^2-r^2}{R^4} \right\} + L_2 \\
I_3 &= \frac{1}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{1}{R} \left\{ -(1+\kappa^4) \frac{R}{R+z} - 2\kappa^2(1-\kappa^2) \frac{z}{R+z} + 2(1-\kappa^2)\tau^2 \frac{1}{R^2} \right\} + L_3 \\
I_4 &= \frac{1}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{1}{R} \left\{ (3-6\kappa^2+5\kappa^4) \frac{R}{R+z} + 2(1-\kappa^2) \frac{z}{R+z} - 2(1-\kappa^2)\tau^2 \frac{1}{R^2} \right\} + L_4 \\
I_5 &= \frac{1}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{1}{R} \left\{ (3-6\kappa^2+5\kappa^4) + 2(1-\kappa^2) \frac{z^2}{R^2} - 2(1-\kappa^2)\tau^2 \frac{2z^2-r^2}{R^4} \right\} + L_5 \\
I_6 &= \frac{1}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{r}{R} \left\{ (-1+2\kappa^2-3\kappa^4) \frac{1}{R+z} - 2\kappa^2(1-\kappa^2) \frac{z}{R^2} + 6(1-\kappa^2)\tau^2 \frac{z}{R^4} \right\} + L_6 \\
I_7 &= \frac{1}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{r}{R} \left\{ -(1+\kappa^4) \frac{1}{R+z} - 2(1-\kappa^2) \frac{z}{R^2} + 6(1-\kappa^2)\tau^2 \frac{z}{R^4} \right\} + L_7 \\
I_8 &= \frac{1}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{r}{R^3} \left\{ (-1+4\kappa^2-5\kappa^4) - 6\kappa^2(1-\kappa^2) \frac{z^2}{R^2} + 6(1-\kappa^2)\tau^2 \frac{4z^2-r^2}{R^4} \right\} + L_8 \\
I_9 &= \frac{2}{1-\kappa^2} \frac{r}{R^3} + L_9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{10} &= \frac{1}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{r}{R^3} \left\{ (1-2\kappa^2-\kappa^4) - 6(1-\kappa^2) \frac{z^2}{R^2} + 6(1-\kappa^2) \tau^2 \frac{4z^2-r^2}{R^4} \right\} + L_{10} \\
I_{11} &= \frac{1}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{r}{R^3} \left\{ -(1+\kappa^4) - 6\kappa^2(1-\kappa^2) \frac{z^2}{R^2} + 6(1-\kappa^2) \tau^2 \frac{4z^2-r^2}{R^4} \right\} + L_{11} \\
I_{12} &= \frac{1}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{r}{R^3} \left\{ (3-6\kappa^2+5\kappa^4) + 6(1-\kappa^2) \frac{z^2}{R^2} - 6(1-\kappa^2) \tau^2 \frac{4z^2-r^2}{R^4} \right\} + L_{12} \\
I_{13} &= \frac{1}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{z}{R^3} \left\{ (3-4\kappa^2-\kappa^4) - 2(1-\kappa^2) \frac{2z^2-r^2}{R^2} + 6(1-\kappa^2) \tau^2 \frac{2z^2-3r^2}{R^4} \right\} + L_{13} \\
I_{14} &= \frac{1}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{z}{R^3} \left\{ (1-4\kappa^2+5\kappa^4) + 2(1-\kappa^2) \frac{2z^2-r^2}{R^2} - 6(1-\kappa^2) \tau^2 \frac{2z^2-3r^2}{R^4} \right\} + L_{14} \\
I_{15} &= \frac{1}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{1}{R} \left\{ (-1+2\kappa^2-3\kappa^4) \frac{1}{R+z} - 2(1-\kappa^2) \frac{z}{R^2} + 6(1-\kappa^2) \tau^2 \frac{z}{R^4} \right\} + L_{15} \\
I_{16} &= \frac{1}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{z}{R^3} \left\{ (-1+2\kappa^2-3\kappa^4) - 2\kappa^2(1-\kappa^2) \frac{2z^2-r^2}{R^2} + 6(1-\kappa^2) \tau^2 \frac{2z^2-3r^2}{R^4} \right\} + L_{16} \\
I_{17} &= \frac{1}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{z}{R^3} \left\{ (1-2\kappa^2-\kappa^4) - 2(1-\kappa^2) \frac{2z^2-r^2}{R^2} + 6(1-\kappa^2) \tau^2 \frac{2z^2-3r^2}{R^4} \right\} + L_{17}
\end{aligned} \tag{22}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
R &= \sqrt{r^2+z^2}, \quad Q_1 = \sqrt{r^2+(z\sqrt{1+\kappa^2s^2}-s\tau)^2}, \quad Q_2 = \sqrt{r^2+(z\sqrt{1+s^2}-s\tau)^2} \\
Q_3 &= \sqrt{r^2+(z-s\tau)^2}, \quad f(s) = \frac{1}{s^2} \left\{ \left(1 + \frac{s^2}{2} \right)^2 - \sqrt{1+\kappa^2s^2} \sqrt{1+s^2} \right\}
\end{aligned}$$

である.

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{1}{s^3 f(s)} \left[\frac{\sqrt{1+s^2}}{Q_1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{f(s)}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{1}{Q_3} \left\{ -(1+\kappa^4)s^2 + 4(1-\kappa^2) - \frac{2\kappa^2(1-\kappa^2)s^2z(z-s\tau)}{Q_3^2} \right\} \right] ds \\
L_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{1}{s^3 f(s)} \left[\frac{(1+s^2/2)\sqrt{1+s^2}}{Q_2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{f(s)}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{1}{Q_3} \left\{ (1-2\kappa^2-\kappa^4)s^2 + 4(1-\kappa^2) - \frac{2(1-\kappa^2)s^2z(z-s\tau)}{Q_3^2} \right\} \right] ds \\
L_3 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{1}{s^3 f(s)} \left[\frac{\sqrt{1+s^2}}{Q_1+z\sqrt{1+\kappa^2s^2}-s\tau} \right. \\
&\quad \left. - \frac{f(s)}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{1}{Q_3+z-s\tau} \left\{ -(1+\kappa^4)s^2 + 4(1-\kappa^2) - \frac{2\kappa^2(1-\kappa^2)s^2z}{Q_3} \right\} \right] ds \\
L_4 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{1}{s^3 f(s)} \left[\frac{1+s^2/2-2\sqrt{1+\kappa^2s^2}\sqrt{1+s^2}}{(Q_2+z\sqrt{1+s^2}-s\tau)\sqrt{1+s^2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{f(s)}{2(1-\kappa^2)^2} \frac{1}{Q_3+z-s\tau} \left\{ (3-6\kappa^2+5\kappa^4)s^2 - 4(1-\kappa^2) + \frac{2(1-\kappa^2)s^2z}{Q_3} \right\} \right] ds
\end{aligned} \tag{23}$$

(以下省略)

式 (23) の複素積分 L_i ($i=1\sim 17$) に対しては文献 (6) と同様の理由により, B_r 積分路に沿って直接積分を行うことにする. この場合分岐点 $\xi_4 \pm i\eta_4$ を左側に完全に含むように c を定めて $s=c+i\eta$ において次のように実積分に直して積分を実行した.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} f(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(c+i\eta) d\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_e\{f(c+i\eta)\} d\eta \tag{24}$$

4. 数 値 結 果

半無限体の表面に集中せん断荷重 P_0 が衝撃的に作用すれば c_1 の速度をもつ縦波と, $c_2 (< c_1)$ の速度をもつせん断波が生じ, これらは衝撃点を中心にして放射状に伝ばする. 衝撃後, 時間が t だけ経過したときのこれらの応力波が占める領域は図 1 (b) に示すとおりである. すなわち領域 I には縦波のみが存在し, 領域 II および領域 III には縦波とせん断波が存在する. また式 (22) のうち $\bar{\varphi}_0$ から得られるもの I_i ($i=1, 3, 6, 8, 9, 11$,

16) が縦波による成分であり, $\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$ によるものがせん断波による成分である. 変位および応力を求めるためには, まず積分 L_i を計算しなければならない. この積分は弾性体内の座標 r, z と衝撃後の時間 $\tau (=c_2 t)$ を与えれば求められる. ここでは $R=0.5, 1.0$ で $\varphi=0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ に相当する各点について, シンプソンの 3/8 の公式を用いて電子計算機 (東京大学大型計算機センター・HITAC 8700/8800) によって数値積分した. この際ポアソン比 $\nu=0.3, c-\xi_4=5.0$ とし, 後に示す図 8 ではさらに多くの位置に対して計算した. 図 2~4 は $R=0.5, 1.0$ で $\varphi=0^\circ, 30^\circ$,

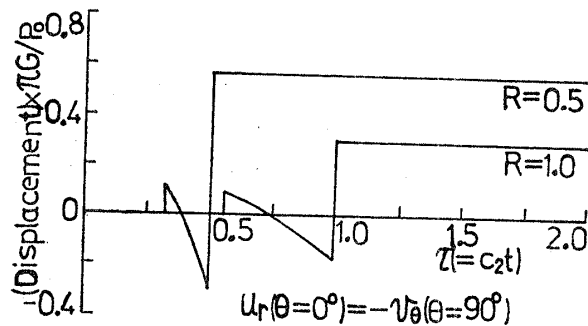
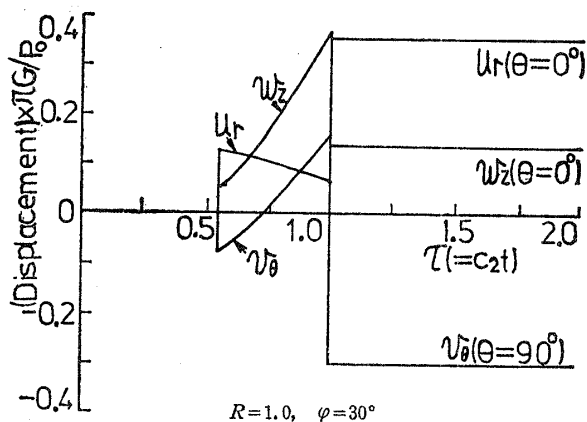
図 2 変位の時間的変動 ($\varphi=0^\circ$)

図 3 変位の時間的変動

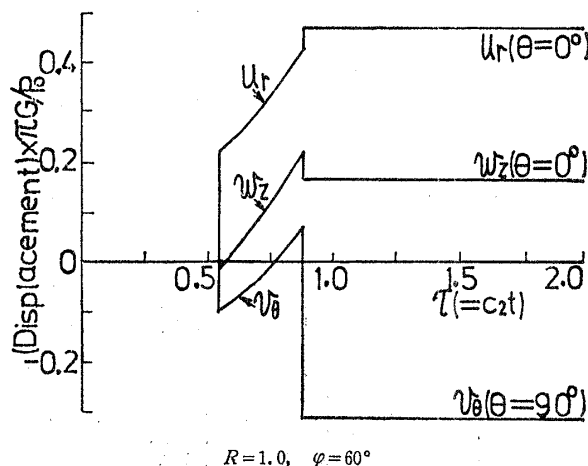


図 4 変位の時間的変動

60° の位置における変位の時間的変動を示したものである.

変位 u_r は縦波が到達すると不連続的に正の向きに立ち上がり, $\varphi=0^\circ, 30^\circ$ では時間とともに減少し, $\varphi=60^\circ$ では時間とともに増大する. せん断波が到達すると正の向きに不連続的に変動し, 時間の経過とともに急速に静的結果に近づく. 変位 v_θ はいずれの点でも縦波の到達により不連続的に負の向きに立ち上がり, せん断波到達直前まで時間の経過とともに増大し正の値となる. せん断波が到達すると不連続的に負となって静的結果に近づく. 変位 w_z は縦波が到達すると $\varphi=30^\circ$ では正の向きに, $\varphi=60^\circ$ では負の向きに不連続的に変動し, 時間の経過とともに増大し正の値となる. 続いてせん断波の到達によって負の向きに不連続的に変動して静的結果に近づく. 変位 u_r, v_θ は動的结果より静的結果の方が絶対値は大きく, w_z はこの逆となっている.

また $R=0.5$ の場合は $R=1.0$ よりも荷重点に近いために変位の絶対値はいずれも $R=1.0$ の場合より大きい. 図 5~7 は $R=0.5, 1.0$ で $\varphi=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$

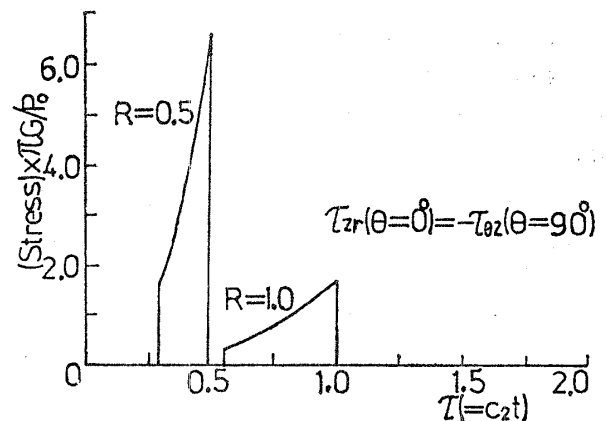
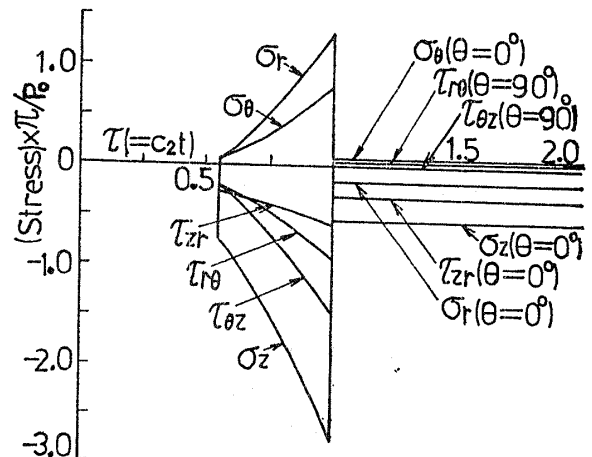
図 5 応力の時間的変動 ($\varphi=0^\circ$)

図 6 応力の時間的変動

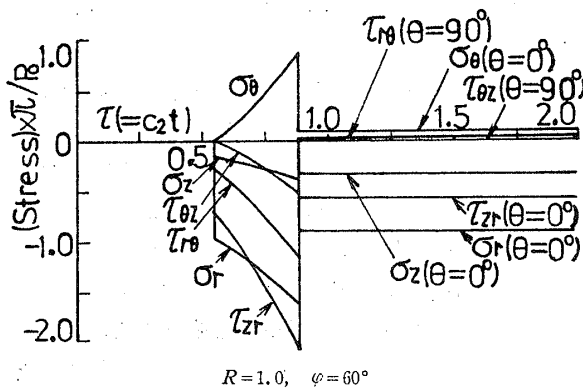


図7 応力の時間的変動

の位置における応力の時間的変動を示したものである。応力 σ_r は初めは $\varphi=30^\circ$ では常に引張応力, $\varphi=60^\circ$ では圧縮応力であるが, せん断波の到達によって不連続的に変動し $\varphi=30^\circ, 60^\circ$ のいずれの位置でも圧縮応力となって時間の経過とともに静的結果に近づく。応力 σ_θ は $\varphi=60^\circ$ での縦波到達直後を除いて常に引張応力であり, 時間の経過とともに増大し, せん断波到達直前に最大となる。続いてせん断波の到達により不連続的に変動して静的結果に近づく。応力 $\sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$ は $\varphi=60^\circ$ での縦波到達直後の $\tau_{\theta z}$ を除いて圧縮応力あるいは負の応力であり, 時間的変動の傾向はよく似ている。すなわち縦波の到達によって不連続的に負の向きに立ち上がり, せん断波が到達するまで負の応力状態で増大する。そしてせん断波到達直前に最大となり, せん断波が到達した後は σ_z, τ_{rz} は圧縮応力あるいは負の応力のまま, また $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$ は正の応力となり, 時間の経過とともに静的結果に近づく。結局せん断波到達直前でこれらの応力の絶対値は最大であり, その値は静的結果より大きい。 $R=0.5$ の場合の応力は変位の場合と同様にその絶対値はいずれも $R=1.0$ より大きい。

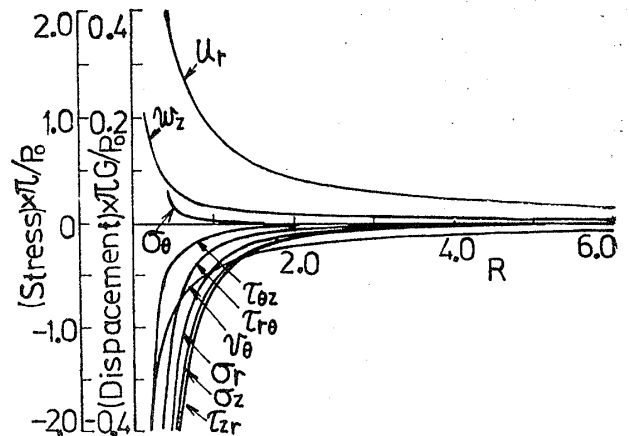
図8は縦波到達直後における変位と応力が荷重点から遠ざかるにつれて減衰する程度を示したものである。

波面における変位は荷重点からの距離 R にほぼ反比例し, 応力は R^2 にほぼ反比例して減少していることがわかる。

5. 結 言

三次元動弾性理論に基づいて, 半無限体表面にステップ関数状に変動する集中衝撃せん断荷重を受ける非軸対称問題をラプラス変換を用いて厳密に解析する方法を示した。

結果は縦波とせん断波との和によって表され, 各点

図8 波面(縦波)の変位と応力の減衰 ($\varphi=45^\circ$)

における変位および応力の時間的変動を数値的に明らかにした。変位も応力も縦波が到達するとその絶対値は不連続的に増大し, せん断波が到達すると不連続的に増大あるいは減少して静的結果に近づく。変位の中で u_r, w_z は動的結果より静的結果の方がその絶対値は大きく, v_θ はこの逆となる。応力はすべて静的結果より動的結果の方がその絶対値が大きい。せん断波到達後の変位と応力の時間的変動は渋谷・中原⁽⁶⁾の解析した垂直荷重の場合には対称軸 (z 軸) 近傍では比較的単調に変化し, ゆるやかに静的結果に近づくが, 自由表面近傍では複雑に変化して静的結果に近づく。しかしせん断荷重の場合には, 変位と応力はいずれの点でも単調に変化し, せん断波到達後, わずかの時間で静的結果に収束する。この点が垂直荷重とせん断荷重の大きな違いである。

最後に本研究を遂行するにあたり多大なご助言, ご指導をいただいた東京工業大学 中原一郎教授, 松本浩之, 渋谷寿一助教授, さらに群馬大学 町田周郎教授の各位に対して感謝の意を表します。また解析, 計算に惜しみないご協力をいただいた当時埼玉大学学生内山豊美, 植田宗夫両氏に感謝いたします。

文 献

- (1) Lamb, H., *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, 203 (1904), 1.
- (2) Pekeris, C.L., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 41 (1955), 629.
- (3) Garuin, W.W., *Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, 234 (1956-3-6), 528.
- (4) Chao, C.C., *Trans. ASME, Ser. E*, 28-2 (1961-6), 300.
- (5) Huth, J.H., *J. Appl. Mech.*, 21-3 (1954-9), 1191.
- (6) 渋谷・中原, 機論, 34-260 (昭 43-4), 610.
- (7) Chao, C.C., *Trans. ASME, Ser. E*, 27-3 (1960-9), 559.
- (8) Pytel, A. and Davids, N., *Trans. ASME, Ser. E*, 29-1 (1962-3), 33.
- (9) Davids, N., *J. Appl. Mech.*, 26-4 (1959-12), 651.
- (10) 大野・野淵, 機論, 44-384 (昭 53-8), 2604.
- (11) 松本・中原, 機論, 32-237 (昭 41-5), 709.
- (12) 牟岐, 機論, 22-119 (昭 31-7), 468.

討 論

〔質問〕 村上秀徳（防衛大学校）

（１）半無限体がその自由表面の一部に加振を受ける場合、約 2/3 のエネルギーがレーレー波として伝ばすることが知られているので、自由表面での変位応力の計算を示していただきたい。

同様な問題が C.C. Chao⁽⁷⁾ によってすでに Cagniard-de Hoop の方法により解かれているので、著者らが数値計算で求めた自由表面の変位を Chao の結果と比較されてはいかがいか。

（２）数値計算では $r \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$ の漸近解を求めにくいので、これら漸近値に関して解析的な考察を加えられたらこの問題がより体系的に解決されると思う。

〔回答〕 （１）半無限体の自由表面についてはラプラス変換された変位、応力の特異点が虚軸上のみ存在するようになるため、Chao の方法と本方法は同じである。大好氏への回答をご参照いただきたい。

（２）ご指摘のとおりと思う。例えば半無限体表面における変位、応力は式（９）、（１０）において $z=0$ とおき $J_0(\lambda r)$, $J_1(\lambda r)$ の $r \rightarrow \infty$ における漸近値^(付1)

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[A_\nu(z) \cos \left(z - \frac{(2\nu+1)}{4} \pi \right) - B_\nu(z) \sin \left(z - \frac{(2\nu+1)}{4} \pi \right) \right] \quad (|z| \rightarrow \infty)$$

および係数

（付 1）森口・ほか 2 名，数学公式 III，（昭 43），153，岩波書店。

$$A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda), \quad n_1 = \sqrt{\lambda^2 + \alpha_1^2}$$

$$n_2 = \sqrt{\lambda^2 + \alpha_2^2}, \quad \alpha_1 = \frac{p}{c_1}, \quad \alpha_2 = \frac{p}{c_2}$$

については $p \rightarrow 0$ にしたときの漸近式を用い、それらを代入した後ラプラス逆変換して $r \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$ の漸近解を得ることができる。今後これらの漸近解を求め、考察を加えたいと考えている。

〔質問〕 大好直（秋田大学鉱山学部）

半無限体の解析なので、表面の応答に及ぼす影響を調べることが本質的と考えるが、その影響の大きい表面（ $\varphi=90^\circ$ ）もしくは表面にごく近い所の計算結果はないか。またレーレー波による効果は、どのようになるか。

〔回答〕 本研究は衝撃による破壊に注目し、特に物体内を応力波が伝ばすることにより生ずる応力の時間的変動ならびに最大応力とそれが生ずる位置を明らかにした。表面の変位および応力の衝撃応答に関しては、文献（６）との対比を考えていたため計算結果はない。しかしながら、ご指摘のとおり表面の応答を調べることは地震学の分野で重要である。これから表面の変位、応力分布を求めたいと考えている。なお C.C. Chao⁽⁷⁾ は本報と異なる方法で解析し、ポアソン比 $\nu=1/4$ のとき表面の変位が簡単に求められるとし、表面の変位についてのみ数値結果を得ているのでご参照願いたい。