DI UNA NOTA DEL BARONE PLANA.

CASI PARTICOLARI DEL MOTO DEI LIQUIDI.

1. In una *Nota* relativa a tre pagine degli *Opuscula Analytica* d'Eulero ([1]), il Barone Plana risponde ad alcune delle censure fattegli nella mia Memoria *Sopra una formola di Lagrange spettante al moto dei liquidi ne'vasi* ([2]). Le osservazioni che seguono faran conoscere queste risposte e ne mostreranno l'insufficienza.

Il Plana essendo giunto nel Vol. XVI, serie 2ª. dell'Accad. di Torino, pag. 103, alla formola

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{e^u+e^{-u}}{e^\pi-e^{-\pi}}=\frac{1}{2}-\frac{\cos u}{1^2+1}+\frac{\cos 2u}{2^2+1}-\frac{\cos 3u}{3^2+1}+\dots,$$

pareva supporre che essa fosse nuova e che solamente Fourier ne avesse data un'altra da cui potesse venir dedotta mediante una differenziazione; mentre per ottenerla basta fare $x=1$, $\pi-\theta=u$ nella formola (t), num. 131, del *Trattato degl'integrali definiti* del Piola ([3]), oppure fare $x=1$, $b=\pi$, $a=u$ nella prima delle formole (ii), num. 136, dello stesso *Trattato* ([4]), formole dovute a Legendre: ommetto altre citazioni che mi sarebbero somministrate dalle opere di Poisson e di Cauchy. Ora egli vuol mostrare che quella formola appartiene ad Eulero, ma i mezzi usati sembrano poco acconci giacchè ricorre ad una trasformazione non breve e ad una sostituzione immaginaria senza riguardo alle condizioni a cui la formola d'Eulero è soggetta.

Se non fa difficoltà il passaggio dal reale all'immaginario, non occorre veruna altra trasformazione avendo Eulero trovata una equazione che è la prima delle (ff), num. 135, del *Trattato* del Piola ([5]) e che si cambia nella proposta al solo farvi $x=1$, $a=u\sqrt{-1}$, $b=\pi\sqrt{-1}$.

Ma un'altra formola diede Eulero non menzionata dal Plana, la quale è assai

---

([1]) Torino, Stamperia Reale.

([2]) Annali di scienze matematiche e fisiche, 1857, pag. 396 e segg. Sono corsi in questa Memoria alcuni errori di stampa di cui noterò i principali: a pag. 401, equazione (7) il limite inferiore del Σ dev'essere $i=1$; a pag. 404, formola (10), nei limiti inferiori del residuo $\mathcal{E}$ deve sostituirsi $(-\pi)$ in luogo di (π); a pag. 113, lin. 14, si cangi x_1 in x_2, lin. 16 si cangi x, in x_1; a pag. 421, lin. 9 si legga *vaso* in luogo di *caso*.

([3]) Opuscoli matematici e fisici. Milano 1834. T. II, p. 112.

([4]) Ivi pag. 117.

([5]) Ivi pag. 116.

assai più feconda benchè bisognevole di correzione, e che ho già ricordata nella mia *Nota intorno ad alcune formole sommatorie*, num. 13 ([1]), cioè

$$y = \int X dx + 2\sum_{r=1}^{r=\infty}(\cos 2r\pi x \int X dx \cos 2r\pi x + \text{sen}\ 2r\pi x \int X dx\ \text{sen}\ 2r\pi x) \ ,$$

dove X denota il termine generale d'una serie, x il suo indice, e y la somma della serie arrestata al termine X: la correzione da farsi sta nel termine $+\frac{1}{2}$ X che conviene aggiungere al secondo membro. Chiamato k un numero intero, e X_0, X_k i valori di X corrispondenti ad $x = 0$, $x = k$, si avrà

$$\sum_{x=1}^{x=k} X = \frac{X_k - X_0}{2} + \int_0^k X dx + 2\sum_{r=1}^{r=\infty}\int_0^k X dx \cos 2r\pi x \, .$$

facciamo $X = \dfrac{\cos px}{1+x^2}$, $k = \infty$: sarà

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\frac{\cos px}{1+x^2} = -\frac{1}{2} + \int_0^\infty \frac{\cos px\, dx}{1+x^2} + \sum_{r=1}^{r=\infty}\int_0^\infty\left(\frac{\cos(2r\pi+p)x + \cos(2r\pi-p)x}{1+x^2}\right)dx,$$

e se p sia compreso tra zero e 2π, sostituendo agl'integrali definiti i loro noti valori, troveremo

$$\frac{1}{2} + \sum_{x=1}^{x=\infty}\frac{\cos px}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\left[e^{-p} + \sum_{r=1}^{r=\infty}(e^{-(2r\pi+p)} + e^{-(2r\pi-p)})\right] = \frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{-p}}{1-e^{-2\pi}} + \frac{e^p}{e^{2\pi}-1}\right],$$

onde posto $\pi - p = u$, risulta la formola che il Plana vuol dimostrare.

Molte altre conseguenze notevoli si possono similmente ricavare dalla formola generale d'Eulero testè riferita: se per esempio prendiamo

$$X = \frac{\cos px}{1+x^4}, \quad k = \infty \ ,$$

ricordando che l'integrale definito $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax\, dx}{1+x^4}$ se a è positivo eguaglia

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\text{sen}\frac{a}{\sqrt{2}} + \cos\frac{a}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}$$

ossia la parte reale dell'espressione

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{-1})\ e^{\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}} \cdot e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}},$$

([1]) Annali di sc. mat. e fis. 1855, pag. 108.

onde si ha

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\, dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2}\, ie^{-ai}$$

fatto $\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = i$, e rigettata la parte immaginaria del secondo membro; troveremo sotto la medesima condizione, e per $0 < p < 2\pi$,

$$\frac{1}{2} + \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{\cos px}{1+x^4} = \frac{\pi}{2}\, i\left(e^{-pi} + \sum_{r=1}^{r=\infty}\left(e^{-(2r\pi+p)i} + e^{-(2r\pi-p)i}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\, i\left(\frac{e^{-pi}}{1-e^{-2\pi i}} + \frac{e^{pi}}{e^{2\pi i}-1}\right)$$

Posto $\pi - p = u$ ed eseguite le riduzioni opportune, resterà

$$\frac{1}{2} - \frac{\cos u}{1^4+1} + \frac{\cos 2u}{2^4+1} - \frac{\cos 3u}{3^4+1} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\, \frac{1}{e^{\pi\sqrt{2}} - 2\cos\pi\sqrt{2} + e^{-\pi\sqrt{2}}} \left\{ e^{\frac{u+\pi}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{u-\pi}{\sqrt{2}} - \operatorname{sen}\frac{u-\pi}{\sqrt{2}}\right)\right.$$

$$+ e^{-\frac{u+\pi}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{u-\pi}{\sqrt{2}} + \operatorname{sen}\frac{u-\pi}{\sqrt{2}}\right) - e^{\frac{u-\pi}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{u+\pi}{\sqrt{2}} + \operatorname{sen}\frac{u+\pi}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left. - e^{-\frac{u-\pi}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{u+\pi}{\sqrt{2}} - \operatorname{sen}\frac{u+\pi}{\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

Accennerò anche una dimostrazione che si otterrebbe svolgendo pei coseni degli archi θ, 2θ, 3θ, ecc. il primo membro della formola trovata dallo stesso signor Plana nel 1816:

$$\int_0^\infty dt\, \frac{(e^t - e^{-t})\operatorname{sen} ht}{e^t + 2\cos\theta + e^{-t}} = \pi.\frac{e^{h\theta} + e^{-h\theta}}{e^{h\pi} - e^{-h\pi}};$$

ma converrebbe ammettere l' equazione $\int_0^\infty dt \operatorname{sen} ht = \frac{1}{h}$, che non è vera in modo assoluto benchè possa valere come formola di limite. L'integrazione indefinita mostra che $\int_0^\infty dt \operatorname{sen} ht$ è quantità indeterminata, nè mi persuade il contrario l'opinione del signor Raabe [1], che ricorre a differenziazione sotto il vincolo integrale e ad altri mezzi non sempre legittimi. Del pari mi sembra indeterminato l'integrale definito che fu trattato dal Plana, e credo che alla sua formola si debba sostituire la seguente

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + 2\cos\theta + e^{-t}}\right) dt \operatorname{sen} ht = \pi.\frac{e^{h\theta} + e^{-h\theta}}{e^{h\pi} - e^{-h\pi}} - \frac{1}{h},$$

---

[1] *Mathematische Mittheilungen*, Zurigo, 1857 e 1858.

onde si potrà immediatamente dedurre quella che abbiam rammentata al principio di questo articolo.

Il Barone Plana dando questa formola aveva ommesso nel primo membro il divisore 2 : egli attribuisce una tale mancanza ad un *errore tipografico* , ma a torto perchè quell'errore, come ho notato nella mia Memoria, num. 8 ([1]), si è trasfuso in altre due formole derivate dalla prima e vi ha recato un indebito coefficiente 2 ; e questa trasfusione non può certo esser opera del tipografo. Del resto non diamo alcuna importanza a così fatte inavvertenze : era assai più strana quella che il Plana commetteva quando per eseguire una moltiplicazione algebrica in luogo di sommare gli esponenti li moltiplicava ([2]). Ma gli errori di calcolo non sono una grave colpa, essendovene ben altri per testimonianza di Eulero *in quos etiam exercitatis incidere contingit,* e noi li mentovamo soltanto per conchiudere che molta misericordia si vuol avere per essi.

Passando a spiegare i motivi per cui alla dimostrazione di Lagrange preferisce la sua, il Plana biasima Lagrange perchè fa uso d'una relazione che non si verifica per alcun valore finito dell' indice ; ma da un rimprovero consimile non va esente egli stesso che si servì dell'equazione

$$\sum_{m=1}^{m=k}(-1)^m\, m^{2\lambda}=0$$

non vera per alcun valor finito di k e assurda, anzi *orribile* secondo Abel, per $k=\infty$. Pretende nondimeno di giustificarla con nuove ragioni; è accennata la trasformazione euleriana di quella somma infinita nel polinomio

$$\frac{1}{2}\cdot 1^{2\lambda}-\frac{1}{2^2}\,\Delta.1^{2\lambda}+\frac{1}{2^3}\,\Delta^2.\,1^{2\lambda}-\ldots+\frac{1}{2^{2\lambda+1}}\,\Delta^{2\lambda}.\,1^{2\lambda}\,,$$

che non è rigorosamente esatta, poichè si ha sempre un resto che non può trascurarsi, sembra concedere che la spiegazione da lui data sia la medesima che indicò Eulero a pag. 288 del suo *Calcolo differenziale,* e che la formola da lui suggerita per comprovare generalmente la induzione di Eulero non si confaccia ad un tale intento; poscia rammenta la formola

$$\frac{1-x^2}{1+2x\cos\theta+x^2}=1-2x\cos\theta+2x^2\cos 2\theta-2x^3\cos 3\theta+\text{ecc.}\,,$$

sostituisce $\cos m\theta=1-\frac{m^2\theta^2}{1.2}+\text{ecc.}$, fa $x=1$, e dal coefficiente di $\theta^{2\lambda}$ trae

([1]) D[t]. Annali, 1857, pag. 418.

([2]) *Dei congrui di Leonardo Pisano*, pag. 6. Veggasi il *Cimento, Rivista di Scienze* ecc. N.º del 31 ottobre 1855, Torino Tip. Franco, pag. 673, in nota.

$$1^{2\lambda} - 2^{2\lambda} + 3^{2\lambda} - 4^{2\lambda} + \ldots = 0,$$

ch'egli crede aver così dimostrata col mezzo di *serie convergenti.* Basterebbe rispondergli che la prima serie, convergente per x inferiore ad 1, è *divergente* pel limite $x = \pm 1$; ma voglio mostrare a qual conseguenza apertamente erronea guidi lo stesso metodo. Se in luogo di fare $x = 1$ si pone $x = -1$, si annulla ancora per infiniti valori di θ il primo membro della formola precedente, e quindi bisognerà eguagliare a zero il coefficiente di ciascuna potenza di θ nel secondo membro: il coefficiente di $\theta^{2\lambda}$ darà

$$1^{2\lambda} + 2^{2\lambda} + 3^{2\lambda} + 4^{2\lambda} + \ldots = 0,$$

equazione che senza dubbio anche il signor Plana rifiuterebbe.

Ecco un nuovo esempio a conferma della proposizione di Abel che asseriva potersi con le serie divergenti dimostrare tutto ciò che si vuole, il vero e il falso, il possibile e l'impossibile. I progressi e la dignità della scienza non soffrono più l'uso di mezzi tanto inesatti che può solamente rivelare l'imperizia di chi non sa prescinderne; bisogna che si possa render ragione d'ogni parte d'una dimostrazione algebrica come si fa per le geometriche, e che le trasformazioni analitiche siano liberate affatto da quell'oscurità per cui un arguto geometra torinese le assomigliava ad un giuoco di bussolotti. Conviene in una parola seguir la via aperta dall'illustre Cauchy, che nel 1821 scriveva (1): « Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communement admises, surtout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités que'elles renferment. »

Anche Abel fu da principio meno rigoroso e a questo periodo di tempo appartengono le formole trovate inesatte dal signor Bertrand (2), ma poscia ebbe a dire: « enfin mes yeux se sont dessillés d'une manière frappante, » e si pose sulle tracce di Cauchy del quale scriveva: « M. Cauchy est celui des mathématiciens qui sait le mieux comment les mathémetiques pour le moment doivent être traitées ... L'excel-

(1) *Analyse algébrique,* pag- ij. (*Introduction*).
(2) Annali di matematica, 1858, pag. 156.

lent ouvrage de M. Cauchy, *Cours d'analyse de l'école polytechnique* doit être lu par tout analyste qui aime la rigueur dans les recherches mathématiques ([1]). »

L'autorità del signor Plana potendo servire a generare o radicare falsi concetti sopratutto nelle menti de'giovani, ci ha determinati a non tacere alcuni suoi abbagli, e godiamo di citare una sentenza giustissima che a proposito d'una inavvertenza del medesimo astronomo piemontese proferisce l'Arago: « Les inexactitudes, quand elles proviennent de sources aussi élevées, ne doivent pas être laissées à l'écart, et sans réfutation ([2]). »

II. La Nota del Barone Plana mi offre l'occasione di fare qualche aggiunta a ciò che dissi nella Memoria sopra ricordata intorno alle ricerche fatte per una determinazione rigorosa del moto dei liquidi. Debbo innanzi tutto riparare ad una ommissione nominando fra i geometri italiani che trattarono dell'indicato argomento i professori Brighenti, Bruschetti, Amici, Tardy, Padula, Betti: principalmente mi corre obbligo di menzionare le diligenti indagini e discussioni storiche del Tardy ([3]), che in modo assai più preciso e pieno ch'io non ho fatto dichiarò la parte avuta nella trattazion del problema da Lagrange e Dalembert. Anche il prof. Brioschi ne diede una storia ordinata ed esattissima che premise alla Memoria postuma del Piola sul moto delle acque ([4]).

In secondo luogo richiamerò pel moto ne'vasi conici alcune soluzioni diverse da quella del Venturoli ch'era stata proposta come la sola possibile. Tali soluzioni già venute in parte additate dal prof. Bellavitis ([5]), e si deducono dagli stessi calcoli del prof. Turazza benchè questi abbia inteso di provare che non poteva soddisfarsi al problema fuorchè con quella del Venturoli; questa sola trovò pure il Tardy mediante il *calcolo dei differenziali a indice fratto* supponendo un differenziale esatto il trinomio della velocità, quantunque altre ne indicasse pel caso in cui la stessa condizione non s'adempia ([6]): così gli esempi del Bellavitis e gli altri che recherò mostrerebbero per avventura che le formole somministrate dal calcolo dei differenziali a indice fratto non godono di tutta la desiderabile generalità.

Prese le coordinate ortogonali x, y, z, abbiasi un vaso generato dalla rotazione d'una curva piana intorno all'asse delle z, e si faccia $r = \sqrt{x^2 + y^2}$: le velocità secondo z e secondo r eguaglieranno le derivate parziali $\frac{d\psi}{dz}$ e $\frac{d\psi}{dr}$, se assumesi per

([1]) *Oeuvres d'Abel*, tom. 2, pag. 266 e 269; tom. 1, pag. 68.

([2]) *Comptes rendus*, tom. 23, pag. 746.

([3]) Sopra alcuni punti della teorica del moto dei liquidi. Firenze, 1847.

([4]) Memorie dell'Istituto Lombardo, Vol. III. Milano, 1852.

([5]) Sul movimento di un liquido che discende in modo perfettamente simmetrico rispetto ad un asse verticale (Venezia, 1845), num. 25, pag. 20. — *Observationes de quibusdam solutionibus analyticis problematum ad liquidorum motum pertinentium* (Bologna, 1847, num. 36, pag. 26—27.)

([6]) Annali di sc. mat. e fisiche 1850.

ψ l'espressione usata dal Turazza e dal Tardy

$$\psi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{d}\theta \left[\varphi(z + \cos r\, \theta\sqrt{-1}) + \varphi(z - r\cos\theta\sqrt{-1}) \right],$$

che per mezzo del teorema di Taylor si risolve nella serie

$$\psi = \frac{\pi}{2}\left[\varphi(z) - \frac{r^2}{2^2}\varphi''(z) + \frac{r^4}{2^2.4^2}\varphi^{\mathrm{iv}}(z) - \frac{r^6}{2^2.4^2.6^2}\varphi^{\mathrm{vi}}(z) + \ldots\ldots\right]:$$

dinotiamo con φ, φ', φ'', ... una funzione arbitraria e le sue derivate successive. Ricavandone le velocità, si avrà per l'equazione differenziale d'ogni trajettoria

$$\varphi'(z) - \frac{r^2}{2^2}\varphi'''(z) + \frac{r^4}{2^2.4^2}\varphi^{\mathrm{v}}(z) - \ldots.$$

$$= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\left[-\frac{r}{2}\varphi''(z) + \frac{r^3}{2^2.4}\varphi^{\mathrm{iv}}(z) - \frac{r^5}{2^2.4^2.6}\varphi^{\mathrm{vi}}(z) + \ldots\right]$$

e si dovrà determinare φ in modo che questa comprenda anche l'equazione delle pareti del vaso. Ora pei vasi conici l'equazione delle pareti è $z = \alpha r$ con α costante: sostituendo e facendo $\varphi'(z) = z^k$, si ottiene

$$1 - \frac{k(k-1)}{2^2.\alpha^2} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2^2.4^2.\alpha^4} - \ldots$$

$$= -\frac{k}{2} + \frac{k(k-1)(k-2)}{2^2.4.\alpha^2} - \frac{k(k-1)\ldots(k-4)}{2^2.4^2.6.\alpha^4} + \ldots,$$

ossia

$$(k+2)\left[\frac{1}{2} - \frac{k(k-1)}{2^2.4.\alpha^2} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2^2.4^2.6.\alpha^4} - \ldots\right] = 0,$$

che si risolve nelle due

$$k + 2 = 0\,, \quad \frac{1}{2} - \frac{k(k-1)}{2^2.4\alpha^2} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2^2.4^2 6\alpha^4} - \ldots = 0\,.$$

La prima porge $k = -2$, che corrisponde alla soluzione del Venturoli: la seconda è un equazione di grado infinito rispetto a k, e chiamate k_1, k_2, k_3, ... le sue radici, si potrà prendere

$$\varphi'(z) = az^{-2} + a_1 z^{k_1} + a_2 z^{k_2} + a_3 z^{k_3} + \ldots,$$

con $a, a_1, a_2, \ldots$ costanti arbitrarie. Si riconosceranno facilmente l'esistenza e i limiti d'alcune di tali radici, ponendo nel primo dell'equazione successivamente $k=1$, 2, 3, 4 ..., il che lo ridurrà a

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4\alpha^2},\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2.4\alpha^2},\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2^2\alpha^2} + \frac{1}{2^2.4\alpha^4},\ \frac{1}{2} - \frac{5}{2^2\alpha^2} + \frac{5}{2^2.4\alpha^4},\ldots.$$

Così per $k = 1$ quel primo membro sarà positivo, per $k = 2$ sarà negativo se α è $< \frac{1}{2}$, nullo se $\alpha = \frac{1}{2}$, positivo se $\alpha > \frac{1}{2}$; per $k=3$ sarà negativo se α è $< \frac{1}{2}\sqrt{3}$, nullo se $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, positivo se $\alpha > \frac{1}{2}\sqrt{3}$; per $k=4$ sarà positivo se α è $< \frac{1}{2}\sqrt{3-\sqrt{7}}$ e se $\alpha > \frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{7}}$, negativo se α è compreso tra questi due valori, nullo se α eguaglia l'uno o l'altro; per $k = 5$ sarà positivo se α è $< \frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{15}}$ ovvero $> \frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{15}}$, negativo se α è compreso tra questi due valori, nullo se uguaglia l'uno o l'altro. Da ciò si vedrà che se α è $< \frac{1}{2}$ l'equazione ha una radice k_1 compresa tra 1 e 2; nel caso di $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}\sqrt{3}$ l'ha tra 2 e 3, nel caso di $\frac{1}{2}\sqrt{3} < \alpha < \frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{7}}$ l'ha tra 3 e 4, e nel caso di $\frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{7}} < \alpha < \frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{15}}$ l'ha tra 4 e 5; se α è $< \frac{1}{2}\sqrt{3-\sqrt{7}}$ l'equazione avrà una radice k_1 tra 1 e 2, e una radice k_2 tra 2 e 4; e se α è $< \frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{15}}$ essa avrà una radice k_1 tra 1 e 3, e una radice k_2 tra 3 e 5; se poi α eguaglia uno dei valori $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3\pm\sqrt{7}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{5\pm\sqrt{15}}$, una radice sarà $k_1 = 2, 3, 4, 5$. Nel caso di $\alpha = \frac{1}{2}$, divisa l'equazione per $k - 2$, resta

$$-\frac{k+1}{4} + \frac{k(k-1)(k-3)}{2.^2 6} - \frac{k(k-1)(k-3)(k-4)(k-5)}{6^2.8} + \text{ecc.} = 0$$

il cui primo membro per $k = 4$ è negativo e per $k = 5$ diventa positivo; onde v'ha un'altra radice k_2 compresa fra 4 e 5.

Con queste soluzioni tutte le trajettorie risultano curvilinee, eccetto quelle dell' asse e della parete, come mostrò il Bellavitis, ed è chiaro così che la determinazione delle funzioni arbitrarie fatta per tutta la mole fluida non rende le trajettorie interne identiche per natura a quelle della parete, contro all'opinione ripetuta anche nell'ultimo suo scritto dal signor Brighenti [1]. Alla medesima conseguenza si può giungere anche pel moto a due coordinate, considerando che se il solo fluido è contenuto dalle due rette $y = 0$, $y = x \tang \omega$, la funzione $F(s)$ del Venturoli può generalmente determinarsi per la formola

$$F(s) = \frac{1}{s}\varphi\left(s^{\frac{\pi}{\omega}}\right),$$

ove φ denota una funzione arbitraria. Il prof. Tardy recò altresì l'esempio del velo terminato dalla iperbola $yx = \alpha$ e dalla retta $y = \beta x$, e trovò per le trajettorie interne

$$xy - \alpha = H\left(x^2 - y^2 - \frac{\alpha}{\beta} + \alpha\beta\right):$$

questa equazione si riduce a quella delle due pareti per valori particolari della co-

---

[1] Intorno ad una Memoria postuma di Gabrio Piola (Bologna, 1854), pag. 10.

stante H, ma non intendo con qual fondamento il signor Brighenti assuma che le tre equazioni debbano *sussistere insieme* e così la terza non rappresenta altre linee che quelle delle pareti.

Bensì convengo col signor prof. Brighenti nel credere che le soluzioni del Venturoli, di cui fu egli il primo ad impugnare l'esattezza [1], non siano rigorose ma ipotetiche, non argomentandosi la loro asserita generalità fuorchè dalla supposta perfezione de'metodi analitici che le aveano procurate, e che si scorge non essere abbastanza generali. E parmi ancora che a ragione egli consigli nuove osservazioni e nuovi studi pratici onde si raccolgano le condizioni fisiche occorrenti alla piena risoluzione de'problemi idrodinamici.

Ora farò qualche esame delle formole ottenute dal prof. Tardy col suo calcolo dei differenziali a indice fratto. Adoperando gl'integrali definiti si ha per l'equazione differenziale delle trajettorie ne'vasi di rivoluzione

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \left[\varphi'(z + r\cos\theta\sqrt{-1}) + \varphi'(z - r\cos\theta\sqrt{-1}) \right]$$

$$= \frac{dz}{dr}\sqrt{-1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \cos\theta \left[\varphi'(z + r\cos\theta\sqrt{-1}) - \varphi'(z - r\cos\theta\sqrt{-1}) \right],$$

e per essere

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1\,, \qquad \int \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \left[\varphi'(z + r\cos\theta\sqrt{-1}) + \varphi'(z - r\cos\theta\sqrt{-1}) \right]$$

$$= -\frac{\varphi(z + r\cos\theta\sqrt{-1}) - \varphi(z - r\cos\theta\sqrt{-1})}{r\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\theta$$

$$+ \int \frac{\varphi(z + r\cos\theta\sqrt{-1}) - \varphi(z - r\cos\theta\sqrt{-1})}{r\sqrt{-1}}\cos\theta\, d\theta,$$

il primo membro si trasforma in

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\theta\, d\theta \left[\varphi'(z + r\cos\theta\sqrt{-1}) + \varphi'(z - r\cos\theta\sqrt{-1}) \right]$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\varphi(z + r\cos\theta\sqrt{-1}) - \varphi(z - r\cos\theta\sqrt{-1})}{r\sqrt{-1}}\cos\theta\, d\theta\,,$$

onde l'equazion precedente sarà soddisfatta se si pone

---

[1] Nota intorno al movimento delle acque a due coordinate (Pesaro, 1828). Debbo alla gentilezza del dottissimo Prof. Gherardi l'aver potuto leggere questo ed altri de'principali opuscoli pubblicati sopra le accennate questioni.

$$\cos^2\theta\left[\varphi'(z+r\cos\theta\sqrt{-1})+\varphi'(z-r\cos\theta\sqrt{-1})\right]$$

$$+\frac{\varphi(z+r\cos\theta\sqrt{-1})-\varphi(z-r\cos\theta\sqrt{-1})}{r\sqrt{-1}}\cos\theta$$

$$=\frac{dz}{dr}\sqrt{-1}\cos\theta\left[\varphi'(z+r\cos\theta\sqrt{-1})-\varphi'(z-r\cos\theta\sqrt{-1})\right].$$

Questa equazione può servire a determinar φ, intendendovi z e r collegati dall'equazione del vaso; pei vasi conici del Venturoli e per gl'iperbolici del Giulio, essa collima pienamente con la formola del Tardy ([1]), e intanto il modo con cui vi siam giunti la fa dipendere dalle premesse come una condizione non già necessaria ma sufficiente. Dividendo per $\cos^2\theta$, e facendo $r\cos\theta\sqrt{-1}=s$, troviamo

$$\varphi'(z+s)+\varphi'(z-s)+\frac{\varphi(z+s)-\varphi(z-s)}{s}=-\frac{rdz}{dr}\cdot\frac{\varphi'(z+s)-\varphi'(z-s)}{s};$$

quindi $\frac{r\,dz}{dr}$ dovrà ridursi ad una funzione $f(z)$ di z, e facendo inoltre

$$\varphi(z+s)-\varphi(z-s)=\mathrm{R},$$

ne trarremo l'equazione a derivate parziali

$$f(z)\frac{d\mathrm{R}}{dz}+s\frac{d\mathrm{R}}{ds}+\mathrm{R}=0,$$

con la quale determineremo f e φ senza l'integrazione d'equazioni a differenze finite e miste prescritta dal Tardy. Posto infatti $e^{\int\frac{dz}{f(z)}}=\mathrm{Z}$, e denotata con F una funzione arbitraria, avremo $\mathrm{R}=\frac{1}{s}\mathrm{F}\left(\frac{s}{\mathrm{Z}}\right)$, e ad un tempo essendo $\frac{r\,dz}{dr}=f(z)$, ne seguirà $\frac{\mathrm{Z}}{r}=\alpha$ per l'equazione del vaso. Preso $\mathrm{Z}=z$, sarà dunque

$$\varphi(z+s)-\varphi(z-s)=\frac{1}{s}\mathrm{F}\left(\frac{s}{z}\right)$$

e fatto $s=z$ ne risulterà

$$\varphi(2z)=\varphi(0)+\frac{\mathrm{F}(1)}{z},$$

che darà la soluzione del Venturoli pei vasi conici, con due costanti arbitrarie $\varphi(0)$, $\mathrm{F}(1)$. Generalmente dovrà essere $\frac{d^2\mathrm{R}}{dz^2}=\frac{d^2\mathrm{R}}{ds^2}$, e sostituendovi l'espressione di R, si

([1]) Memoria già citata, pag. 20 e 21.

troverà che la funzione F deve soddisfare all'equazione

$$-\frac{F'}{Z^2}Z''+\frac{F''s}{Z^4}Z'^2-2\frac{F'}{Z^3}Z'^2=\frac{2F}{s^3}-\frac{2F'}{s^2Z}+\frac{F''}{sZ^2}$$

dove gli apici indicano le derivate al modo di Lagrange. Scrivendo poi $\frac{s}{Z}=t$, otterremo

$$-F'ZZ''+Z'^2(tF''+2F')=\frac{2F}{t^3}-\frac{2F'}{t^2}+\frac{F''}{t},$$

il primo membro sarà indipendente da z come il secondo, talchè differenziando rispetto a z si avrà

$$-F'(Z'Z''+ZZ''')+2Z'Z''(tF''+2F')=0,$$

se ne dedurrà $\frac{ZZ'''}{Z'Z''}$ indipendente da z e però costante. Adunque $\frac{Z'''}{Z''}=m\frac{Z'}{Z}$, e integrando

$$Z''=aZ^m\,,\quad Z'^2=\frac{2a}{m+1}Z^{m+1}+b\,;$$

inoltre

$$2\left(t\frac{F''}{F'}+2\right)=m+1\,,$$

ossia

$$2\frac{F''}{F'}=\frac{m-3}{t}\,,$$

integrando

$$F'=ct^{\frac{m-3}{2}},\qquad F=\frac{2c}{m-1}t^{\frac{m-1}{2}}+C\,.$$

Con questi valori l'equazione di condizione diverrà

$$bc\frac{m+1}{2}t^{\frac{m+3}{2}}=2C+2c\left(\frac{2}{m-1}-1+\frac{m-3}{4}\right)t^{\frac{m-1}{2}},$$

che dovrà riuscir identica; laonde sarà primieramente

$$\frac{2}{m-1}-1+\frac{m-3}{4}=0\,,$$

m avrà uno dei valori 3 e 5, indi ne deriverà $b=0$ e $C=0$. Al valore $m=3$ corrisponderà $F=ct$, e perciò

$$\varphi(z+s)-\varphi(z-s)=\frac{c}{Z},$$

dove $\frac{c}{Z}$ sarà sempre nullo essendo tale quando $s = 0$, e così avrassi

$$\varphi(z+s) = \varphi(z-s)\ ,$$

e φ sarà costante, il perchè niun moto si produrrà; al valore $m = 5$ corrisponderà

$$\mathrm{F} = \frac{c}{2}t^2\ , \quad \mathrm{Z}'^2 = \frac{a}{3}\mathrm{Z}^6\ , \qquad \text{onde} \qquad \frac{\mathrm{Z}'}{\mathrm{Z}^3} = \sqrt{\frac{a}{3}}\,,$$

e quindi

$$\frac{1}{\mathrm{Z}^2} = \mathrm{A} + \mathrm{B}z\ , \qquad \varphi(z+s) - \varphi(z-s) = \frac{c}{2}s\,(\mathrm{A}+\mathrm{B}z)\ :$$

avremo così

$$\varphi(2z) - \varphi(0) = \frac{c}{2}z(\mathrm{A}+\mathrm{B}z)\ ,$$

ossia

$$\varphi(z) = \varphi(0) + \frac{c}{4}z\left(\mathrm{A} + \frac{1}{2}\mathrm{B}z\right),$$

e l'equazione del vaso sarà

$$r^2(\mathrm{A}+\mathrm{B}z) = \frac{1}{\alpha^2}\cdot$$

Questo è il vaso iperbolico del prof. Giulio, e il Tardy lo presenta come un esempio dei casi in cui il suo metodo conduce a calcoli complicatissimi e la soluzione sarebbe arrestata dalle gravi difficoltà delle integrazioni.

Ho tacitamente supposto che Z'' non sia nullo : l'ipotesi contraria ci riporta al vaso conico del Venturoli. Due soli adunque sono i casi che vengono offerti dalle formole sopra riferite.

L'equazione differenziale delle trajettorie espressa in serie si rende integrabile moltiplicandola per r, e si ottiene

$$\frac{r^2}{2}\varphi'(z) - \frac{r^4}{2^2.4}\varphi'''(z) + \frac{r^6}{2^2.4^2.6}\varphi^{\mathrm{v}}(z) - \ldots = \mathrm{H}$$

che rappresenterà curve algebriche ogni qual volta $\varphi'(z)$ sia una funzione intera. Se prendesi

$$\varphi'(z) = \mathrm{A} + \mathrm{B}z + \mathrm{C}z^2,$$

si avranno tutti i casi compresi in una formola che il prof. Amici aveva indicata e che poteva parere molto più generale ([1]). Per dedurne il vaso iperbolico basta pren-

([1]) Amici. Meccanica e Idraulica, Vol. II, pag. 201 (Firenze, 1842). — La formula dell' Amici pe' vasi rotondi (di rivoluzione) può esprimersi con

$$\psi = \mathrm{F}(x+y) + \mathrm{F}(x-y),$$

fatto

dere $\varphi'(z) = z$. Le trajettorie si possono anche rappresentare con l'equazione

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \cos\theta \left[\varphi(z + r\cos\theta\sqrt{-1}) - \varphi(z - r\cos\theta\sqrt{-1}) \right] = \frac{H\sqrt{-1}}{r}$$

ovvero, usando i differenziali a indice fratto con l'altra

$$\int^{\frac{1}{2}} \left[\varphi(z + r\sqrt{a}) - \varphi(z - r\sqrt{a}) \right] da^{\frac{1}{2}} = \frac{H}{r}$$

purchè si faccia da ultimo $a = -1$: ambedue queste equazioni si riducono alla precedente svolgendole in serie, e ricorrendo per la seconda alla formola

$$\int^{\mu} x^n \, dx^{\mu} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\mu+1)} x^{n+\mu}.$$

Quì secondo il metodo del prof. Tardy converrebbe differenziare a indice $\frac{1}{2}$; ma poichè la formola precedente fatto $\mu = -\frac{1}{2}$, e $n = 0$ somministra

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x^0}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}},$$

ne seguirebbe

$$\varphi(z + r\sqrt{a}) - \varphi(z - r\sqrt{a}) = \frac{H}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r\sqrt{a}},$$

$$f(z\sqrt{2} + s\sqrt{-1}) + f(z\sqrt{2} - s\sqrt{-1}) = F(s),$$

e intesa con f una funzione arbitraria; ma dovendo ψ ridursi ad una funzione di $x^2 + y^2$ e z, si avrà

$$x \frac{d\psi}{dy} = y \frac{d\psi}{dx},$$

e quindi

$$xF'(x+y) - xF'(x-y) = yF'(x+y) + yF'(x-y),$$

ossia

$$\frac{F'(x+y)}{x+y} = \frac{F'(x-y)}{x-y},$$

sicchè $\frac{F'(s)}{s}$ non varierà al variare di s. Porremo dunque $\frac{F'(s)}{s} = Z$, e avremo

$$F(s) = Zs^2 + Z_1, \quad \psi = 2Z(x^2 + y^2) + 2Z_1,$$

chiamate Z, Z_1 due funzioni di z. Ma ψ deve soddisfare all'equazione

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dz^2} = 0,$$

che diverrà

$$\frac{d^2Z}{dz^2}(x^2 + y^2) + \frac{d^2Z_1}{dz^2} + 4Z = 0,$$

e si dividerà così nelle due

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2Z_1}{dz^2} + 4Z = 0.$$

Integrando si troverà

$$Z = a + bz, \quad Z_1 = a_1 + b_1 z - 2az^2 - \frac{2}{3} bz^3,$$

che si sostituiranno nell'espressione di ψ. — Il Tardy è giunto in altro modo ad eguali conchiusioni.

*

condizione a cui nessuna funzione può soddisfare restando a indeterminata come si vede ponendo $a=0$. Lascio di cercare a che si giungerebbe supponendo H funzione di a ovvero considerando le *funzioni complementarie* di siffatti differenziali.

Anche l'equazione dianzi ottenuta

$$\begin{aligned}&[\varphi'(z+r\cos\theta\sqrt{-1})+\varphi'(z-r\cos\theta\sqrt{-1})]\cos\theta\\&+\frac{\varphi(z+r\cos\theta\sqrt{-1})-\varphi(z-r\cos\theta\sqrt{-1})}{r\sqrt{-1}}\\&=\frac{dz}{dr}[\varphi'(z+r\cos\theta\sqrt{-1})-\varphi'(z-r\cos\theta\sqrt{-1})]\sqrt{-1}\,,\end{aligned}$$

si rende integrabile moltiplicandola per $rdr\sqrt{-1}$, e l'integrale sarà

$$\varphi(z+r\cos\theta\sqrt{-1})-\varphi(z-r\cos\theta\sqrt{-1})=\frac{\mathrm{H}\sqrt{-1}}{r},$$

chiamata H una costante che potrà contenere l'angolo θ, e lo conterrà effettivamente in ambedue i casi sopra discorsi e risguardanti ai vasi conici ed ai vasi iperbolici.

A. Genocchi.