

# Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni (\*).

(Del dott. PILO PREDELLA, a Pavia.)

---

Premessi nel § 1 alcuni teoremi del SEGRE sulle omografie degeneri, dimostro, nel § 3 con un metodo che mi pare molto semplice, altri teoremi dovuti pure al SEGRE sulle omografie non degeneri. Nel § 4 indico una generazione geometrica delle figure proiettive e ritorno sopra i teoremi dei §§ 1 e 2 dimostrandoli con considerazioni geometriche semplicissime.

Nei paragrafi seguenti investigo la grande varietà di tutte le omografie possibili nello spazio  $S_n$ , degeneri e non degeneri.

Nel § 5, scegliendo convenientemente i vertici di riferimento, trovo che la causa essenziale del complicarsi dello studio analitico delle omografie, dipende dal fatto geometrico semplicissimo che alcuni spazii fondamentali vengono a sovrapporsi (\*\*), entrando l'uno nell'altro e confondendosi nello spazio fondamentale di maggiori dimensioni; considerando quegli spazii sovrapposti come infinitamente vicini, vengo a ridurre lo studio di tutte le omografie, allo studio delle omografie generali; e mostro come l'omografia sia completamente caratterizzata dai numeri  $h$  esprimenti le dimensioni degli spazii fondamentali distinti o sovrapposti.

Ne segue una classificazione delle omografie degeneri e non degeneri, in classi e sottoclassi, che ha un fondamento geometrico molto semplice.

Una classificazione delle omografie non degeneri, fondata sulla considera-

---

(\*) Dissertazione presentata per la laurea in Matematica nella R. Università di Pavia. Luglio 1888.

(\*\*) Dico *sovrapposti* due spazii che giacciono l'uno nell'altro.

*Annali di Matematica*, tomo XVII.

zione dei numeri  $e$  (esponenti dei divisori elementari) venne fatta dal SEGRE (\*); ma i numeri  $e$  non hanno uno spiccato significato geometrico, benchè siano coi numeri  $h$  in una relazione semplice.

Nei §§ 7 e 8 dimostro dei teoremi tendenti ad analizzare gli elementi uniti essenziali di una omografia; di questi teoremi sono notevoli specialmente quelli del § 8.

Il SEGRE ha dimostrato (\*\*) (appoggiandosi al teorema di WEIERSTRASS sulle forme bilineari) che date due omografie appartenenti alla stessa sottoclasse, l'una in  $S_n$ , l'altra in  $S'_n$ , si può stabilire fra i due spazi  $S_n$  ed  $S'_n$  una tale corrispondenza omografica, da passare da una omografia all'altra. Ma questa corrispondenza fra i due spazi è determinata, o si possono fissare arbitrariamente alcuni elementi corrispondenti? E ad ogni modo, come si fissano gli elementi corrispondenti fra i due spazi per passare da un'omografia all'altra? Tale questione è risolta completamente nel § 9, dove dimostro che fissata fra i due spazi una coppia di punti corrispondenti, scelti arbitrariamente, e un certo numero di coppie di spazi corrispondenti, scelti pure arbitrariamente in certe totalità, la corrispondenza fra i due spazi che serve a passare dall'una all'altra omografia è determinata. In quel paragrafo dò anche la costruzione di un'omografia qualunque; la quale, benchè abbia qualche punto di contatto colla notevole costruzione del prof. BERTINI (\*\*\*), è però molto più semplice.

Nel § 10 deduco dal teorema del § 9 il teorema di WEIERSTRASS sulle forme bilineari, indicando quanta arbitrarietà ci sia nella scelta dei coefficienti delle sostituzioni per le quali si passa dalla prima coppia di forme bilineari alla seconda.

Nel § 11 mostro che i coefficienti delle relazioni omografiche per le quali si passa da una ad altra omografia appartenenti alla stessa sottoclasse, soddisfano ad un sistema di equazioni lineari, e concludo che fra essi se ne possono scegliere arbitrariamente  $n + \sum h(h-1)$  dove i numeri  $h-1$  sono le dimensioni degli spazi fondamentali, distinti o sovrapposti, dell'una o dell'altra omografia.

(\*) SEGRE, *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*. Mem. della R. Accad. dei Lincei. Anno 1883-84.

(\*\*) SEGRE, Memoria cit.

(\*\*\*) BERTINI, *Costruzione delle omografie di uno spazio lineare qualunque*. Rend. del R. Istituto Lombardo, Serie II, Vol. XX.



delle prime:

$$\left. \begin{aligned} u_{n-h+2} &= \lambda'_1 u_1 + \dots + \lambda'_{n-h+1} u_{n-h+1} \\ &\dots \dots \dots \} \dots \dots \dots \\ u_{n+1} &= \lambda_1^{(n-h)} u_1 + \dots + \lambda_{n-h+1}^{(n-h)} u_{n-h+1}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Ad ogni punto di  $S'_{h-1}$  (la relazione [1] essendo soddisfatta identicamente) corrisponde un punto qualunque di  $S_n$ , ad ogni punto fuori di  $S'_{h-1}$  corrisponde un punto  $x$  le cui coordinate sono date dalle [2]; ma fra i secondi membri delle [2] avendo luogo le relazioni ( $\alpha$ ), le stesse relazioni avranno luogo fra i primi membri, cioè:

$$\left. \begin{aligned} x_{n-h+2} &= \lambda'_1 x_1 + \dots + \lambda'_{n-h+1} x_{n-h+1} \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= \lambda^{(n-h)}_1 x_1 + \dots + \lambda^{(n-h)}_{n-h+1} x_{n-h+1}, \end{aligned} \right\} \quad (\beta)$$

le quali determinano un  $S_{n-h}$ .

Per trovare il punto corrispondente di un punto qualunque di  $S_{n-h}$  basta trovare i valori di  $y_1 \dots y_{n+1}$  che soddisfano le [2] che si possono scrivere anche così:

$$\frac{u_1}{x_1} = \dots = \frac{u_{n-h+1}}{x_{n-h+1}} = \frac{u_{n-h+2}}{x_{n-h+2}} = \dots = \frac{u_{n+1}}{x_{n+1}},$$

ma dall' $n - h + 1^{\text{esimo}}$  in poi i numeratori e i denominatori di quei rapporti sono le stesse combinazioni lineari rispettivamente dei numeratori e denominatori dei primi  $n - h + 1$  rapporti, quindi basterà trovare i valori di  $y_1 \dots y_{n+1}$  che soddisfano le equazioni:

$$\frac{u_1}{x_1} + \dots + \frac{u_{n-k+1}}{x_{n-k+1}} =$$

che sono le equazioni di un  $S'_h$  passante per  $S'_{h-1}$ .

Ad ogni punto  $x$  di  $S_{n-h}$  corrisponde dunque un  $S'_h$  passante per  $S'_{h-1}$ .

Osservando poi che  $x_1 \dots x_{n-h+1}$  determinano colle  $(\beta)$  un punto di  $S_{n-h}$  e si possono quindi prendere come coordinate di un punto di  $S_{n-h}$ , ed osservando che (potendosi sempre le equazioni di un  $S'_h$  qualunque passante per  $S'_{h-1}$  mettere sotto la forma  $\frac{u_1}{x_1} = \dots = \frac{u_{n-h+1}}{x_{n-h+1}}$ ) le  $x_1 \dots x_{n-h+1}$  si possono anche prendere come coordinate di un  $S'_h$  passante per  $S'_{h-1}$ , si conclude che con questi sistemi di coordinate, le coordinate di un punto qualunque di  $S_{n-h}$

sono identiche a quelle del  $S'_h$  corrispondente. I punti di  $S_{n-h}$  e gli  $S'_h$  corrispondenti sono dunque in relazione omografica.

Per cui riepilogando:

(1) *Esistono due spazi singolari di punti  $S'_{h-1}$  e  $S_{n-h}$  l'uno in  $S'_n$  l'altro in  $S_n$ ; ad ogni punto di  $S'_{h-1}$  corrisponde un punto qualunque di  $S_n$ ; ad ogni punto fuori di  $S'_{h-1}$  corrisponde un punto di  $S_{n-h}$ ; e viceversa ad un punto di  $S_{n-h}$  corrisponde un  $S'_h$  passante per  $S'_{h-1}$ ; i punti di  $S_{n-h}$  e gli  $S'_h$  corrispondenti sono in relazione omografica. Lo spazio  $S'_{h-1}$  è determinato dai secondi membri delle [2] eguagliati a zero.*

Correlativamente, ragionando sulla [1]" ed invertendo in conseguenza le due figure ricaviamo:

(1') *Esistono due spazi singolari di piani  $\Sigma_{h-1}$  e  $\Sigma'_{n-h}$  l'uno in  $S_n$  l'altro in  $S'_n$ ; ad ogni piano di  $\Sigma_{h-1}$  corrisponde un piano qualunque di  $S'_n$ , ad ogni piano fuori di  $\Sigma_{h-1}$  corrisponde un piano di  $\Sigma'_{n-h}$ ; e viceversa ad un piano di  $\Sigma'_{n-h}$  corrisponde un  $\Sigma_h$  contenente  $\Sigma_{h-1}$ ; i piani di  $\Sigma'_{n-h}$  e i  $\Sigma_h$  corrispondenti sono in relazione omografica.*

(2) *Come  $S'_{h-1}$  è dato dai secondi membri delle [2] eguagliati a zero così  $\Sigma_{h-1}$  è determinato dai secondi membri delle [3] eguagliati a zero. Il sostegno di  $\Sigma_{h-1}$  è  $S_{n-h}$  e il sostegno di  $\Sigma'_{n-h}$  è  $S'_{h-1}$ .*

Infatti moltiplicando le [2] rispettivamente per le coordinate  $\xi_1 \dots \xi_{n+1}$  di un piano di  $\Sigma_{h-1}$  e addizionando nei secondi membri per colonne abbiamo:

$$x_1 \xi_1 + \dots + x_{n+1} \xi_{n+1} = 0.$$

Analogamente si dimostra che  $S'_{h-1}$  è il sostegno di  $\Sigma'_{n-h}$ . Un'omografia degenere si riduce quindi ad una relazione omografica non degenere fra due spazi ad  $n - h$  dimensioni, l'uno di punti, l'altro di  $S'_h$  passanti per  $S'_{h-1}$ .

## § 2.

Per scrivere le [2] basta conoscere  $(n+1)(n+1) - 1 = n(n+2)$  coefficienti. Diamo questi teoremi:

(3) *Se fissiamo che ad  $n+2$  punti di  $S'_n$ , i quali ad  $n+1$  ad  $n+1$  sono indipendenti (\*), corrispondano rispettivamente  $n+2$  punti di  $S_n$ , i quali*

---

(\*) Dico che  $p$  spazi  $S', S'', \dots S^{(p)}$  sono indipendenti quando  $S''$  non sega  $S'$ ,  $S'''$  non sega lo spazio a cui appartengono  $S'$  ed  $S''$ ,  $S''''$  non sega lo spazio a cui appartengono  $S', S'', S'''$  ecc.

pure ad  $n+1$  ad  $n+1$  sono indipendenti, l'omografia fra i due spazi resta determinata e non è degenera.

(4) Se fissiamo che ad  $n+2$  punti di  $S'_n$ , i quali ad  $n+1$  ad  $n+1$  sono indipendenti, corrispondano: rispettivamente ai primi  $h$  ogni punto di  $S_n$  ed agli altri rispettivamente  $n-h+2$  punti i quali ad  $n-h+1$  ad  $n-h+1$  sono indipendenti, ma che costituiscono un  $S_{n-h}$  di  $S_n$ , l'omografia fra i due spazi è determinata ed è degenera di caratteristica  $n-h+1$ .

Dimostriamo quest'ultimo teorema che comprende l'altro come caso particolare quando  $h=0$ . Indichiamo con  $\beta'_1 \dots \beta'_{n+1}$  uno degli  $n+2$  punti dati di  $S'_n$ , e con  $\alpha^{(r)}_1 \dots \alpha^{(r)}_{n+1}$  il suo corrispondente. Per determinare i coefficienti delle [2] abbiamo il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} 0 &= a_{1s} \beta'_1 + \dots + a_{n+1s} \beta'_{n+1} \\ &\dots, \dots \\ 0 &= a_{1s} \beta^{(h)}_1 + \dots + a_{n+1s} \beta^{(h)}_{n+1} \\ \rho^{(h+1)} \alpha^{(h+1)}_s &= a_{1s} \beta^{(h+1)}_1 + \dots + a_{n+1s} \beta^{(h+1)}_{n+1} \\ &\dots \dots \dots (s = 1 \dots n+1) \\ \rho^{(n+1)} \alpha^{(n+1)}_s &= a_{1s} \beta^{(n+1)}_1 + \dots + a_{n+1s} \beta^{(n+1)}_{n+1} \\ \rho^{(n+2)} \alpha^{(n+2)}_s &= a_{1s} \beta^{(n+2)}_1 + \dots + a_{n+1s} \beta^{(n+2)}_{n+1}, \end{aligned}$$

dove le  $\rho$  sono arbitrarie. Indichiamo con  $B$  il determinante delle  $\beta$  nelle prime  $n+1$  equazioni, e con  $B'_r$  il complemento algebrico del termine  $\beta_r$ . Siccome i punti  $\beta' \dots \beta^{(n+1)}$  sono indipendenti,  $B$  è diverso da zero. Moltiplichiamo la prima equazione per  $\frac{B'_r}{B}$  e la  $(n+1)^{\text{esima}}$  per  $\frac{B'_r}{B}$  ed addizioniamo. Si trova:

$$a_{rs} = \sum_{p=h+1}^{p=n+1} \rho^{(p)} \alpha^{(p)}_s \frac{B'_r}{B}.$$

Per determinare  $a_{rs}$  restano da determinare ancora le  $\rho$ ; per questo si sostituisca l'espressione di  $a_{rs}$  nella equazione  $n+2^{\text{esima}}$  troviamo:

$$\rho^{(n+2)} \alpha^{(n+2)}_s = \sum_{r=1}^{r=n+1} \sum_{p=h+1}^{p=n+1} \rho^{(p)} \alpha^{(p)}_s \frac{B'_r}{B} \beta_r^{(n+2)} \quad (s = 1 \dots n+1),$$

ovvero:

$$\rho^{(n+2)} \alpha^{(n+2)}_s = \sum_{p=h+1}^{p=n+1} \rho^{(p)} \alpha^{(p)}_s \sum_{r=1}^{r=n+1} \beta_r^{(n+2)} \frac{B'_r}{B}.$$

Poniamo:

$$\sum_{r=1}^{n+1} \beta_r^{(n+2)} \frac{B_r^{(p)}}{B} = B_p,$$

che è il determinante che si ottiene da  $B$  sostituendo in luogo della  $p^{esima}$  riga la riga  $\beta_1^{(n+2)} \dots \beta_{n+1}^{(n+2)}$ . I determinanti  $B_p$  sono tutti diversi da zero, perchè i punti  $\beta$  sono ad  $n+1$  indipendenti.

L'ultima relazione diventa:

$$\rho^{(n+2)} \alpha_s^{(n+2)} = \sum_{p=h+1}^{n+1} \alpha_s^{(p)} B_p \rho^{(p)} \quad (s = 1 \dots n+1).$$

Siccome poi i punti  $\alpha$  sono in un  $S_{n-h}$  avremo:

$$\rho^{(n+2)} \alpha_s^{(n+2)} = \sum_{p=h+1}^{n+1} \lambda_p \alpha_s^{(p)},$$

dove le  $\lambda$  sono tutte diverse da zero, perchè gli  $n-h+2$  punti  $\alpha$  sono ad  $n-h+1$  ad  $n-h+1$  indipendenti. Confrontando le ultime due relazioni scritte troviamo:

$$\lambda_p = B_p \rho^{(p)};$$

per cui finalmente:

$$a_{rs} = \sum_{p=h+1}^{n+1} \frac{\lambda_p}{B_p} \alpha_s^{(p)} \frac{B_r^{(p)}}{B}.$$

Si vede subito che il determinante  $|a_{rs}|$  è di caratteristica  $n-h+1$ .

La dimostrazione sarebbe riuscita più semplice supponendo che i punti  $\beta' \dots \beta^{(n+1)}$  fossero i vertici della piramide di riferimento, il che non avrebbe tolto nulla alla generalità della dimostrazione.

### § 3.

Se i due spazi  $S_n$  ed  $S'_n$  sono indipendenti, il punto può essere di natura tutt'affatto diversa nei due spazi; perchè in sostanza abbiamo relazioni fra gruppi di  $n+1$  parametri, i quali possono rappresentare in  $S_n$  un ente geometrico e in  $S'_n$  un altro ente geometrico; ma quando i due spazi sono sovrapposti, o il punto di  $S_n$  è della stessa natura del punto di  $S'_n$ , ovvero è della stessa natura del piano di  $S'_n$ ; nel primo caso gli spazi si dicono più particolarmente omografici, nel secondo correlativi.







$S_{h-1}$  e  $\Sigma_{h-1}$  (corrispondenti alla radice  $r'$ ) dell'omografia data; quindi intanto: Ad un punto qualunque  $y$  corrisponde un punto  $x$  nella omografia data ed un punto  $z (z = x - r'y)$  allineato con  $x$  e  $y$  nella omografia degenerare rappresentata dalle [5] e [6]; e gli spazi fondamentali  $S_{h-1}$  e  $\Sigma_{h-1}$  dell'omografia data, sono gli spazii singolari dell'omografia degenerare. Allora siccome ad un  $S'_h$  di punti  $y$  passante per  $S_{h-1}$  corrisponde nell'omografia degenerare un punto  $z$  del sostegno di  $\Sigma_{h-1}$  [teorema (1)] (\*), e nell'omografia data un  $S_h$  passante per  $S_{h-1}$ , i punti corrispondenti di  $S'_h$  e di  $S_h$  sono allineati con  $z$ , cioè:

(6) *Ad ogni  $S'_h$  passante per  $S_{h-1}$  corrisponde un  $S_h$  prospettivo, il centro  $z$  di prospettiva è situato nel sostegno  $S_{n-h}$  dello spazio  $\Sigma_{h-1}$  coniugato. Fra gli  $S'_h$  passanti per  $S_{h-1}$  e i punti  $z$  di  $S_{n-h}$  c'è una relazione omografica. E ancora:*

(7) *La retta che unisce due punti corrispondenti  $x$  e  $y$  taglia i sostegni di tutti gli spazii fondamentali di piani nei punti  $x - r'y, x - r''y, \dots x - r^{(\sigma)}y$ .*

Immaginiamo l' $S_h$  passante per  $S_{h-1}$  e per un punto qualunque  $z$  di un altro spazio fondamentale; in questo  $S_h$  resta determinata un'omografia subordinata, che è un'omologia di cui  $z$  è il centro. Il punto  $z$  deve giacere quindi in  $S_{n-h}$  cioè:

(8) *Il sostegno  $S_{n-h}$  di  $\Sigma_{h-1}$  contiene tutti gli spazii fondamentali di punti, meno il coniugato che può contenere o non contenere come vedremo.*

Sono ovvie le considerazioni correlative che si fanno ragionando sopra le [3] e le [6]. Bisogna però notare che nelle [3] e [6] sono scambiate le due figure.

Consideriamo la punteggiata:

$$x, \quad y, \quad x - r'y, \dots \quad x - r^{(\sigma)}y,$$

e il fascio:

$$\eta, \quad \xi, \quad \eta - r'\xi, \dots \quad \eta - r^{(\sigma)}\xi.$$

dove  $x$  e  $y$  sono due punti corrispondenti, e  $x - r'y \dots x - r^{(\sigma)}y$ , come abbiamo visto, i punti dove la loro congiungente taglia i sostegni degli spazii fondamentali di piani  $\Sigma_{h-1} \dots \Sigma_{h^{(\sigma)}-1}$ ; e correlativamente  $\eta$  e  $\xi$  due piani corrispondenti e  $\eta - r'\xi, \dots$  i piani che proiettano dalla loro intersezione gli spazii fondamentali di punti  $S_{h-1} \dots$ ; si deduce subito:

---

(\*) Il teorema (1) dice appunto che ad un  $S'_h$  corrisponde nell'omografia degenerare un punto  $z$  di  $S_{n-h}$  che è poi per il teorema (2) il sostegno di  $\Sigma_{h-1}$ .

(9) *Le punteggiate formate da due punti corrispondenti e dai punti dove la loro congiungente taglia i sostegni degli spazii fondamentali, sono omografiche fra loro e omografiche ai fasci formati da due piani corrispondenti (scambiate però le due figure) e dai piani che dalla loro intersezione proiettano gli spazii fondamentali di punti rispettivamente coniugati (\*)*.

#### § 4.

Immaginiamo in un  $S_{n+k+1}$  un  $S_n$  ed un  $S_k$ . Proiettare da  $S_k$  i punti di  $S_n$  significa immaginare tutti gli  $S_{k+1}$  passanti per  $S_k$  e rispettivamente per i singoli punti di  $S_n$ .  $S_n$  lo chiameremo la sezione della stella di  $S_k$ . Se  $S_k$  sega  $S_n$  in un  $S_{h-1}$  l'operazione del proiettare o segare la diremo degenerare. Chiameremo proiettivi due sistemi che si ottengono con un numero finito di operazioni; di cui al più una degenerare; prospettivi nel caso particolare che le operazioni siano ridotte a due o ad una.

Supponiamo dapprima che  $S_k$  seghi  $S_n$  in un  $S_{h-1}$ . Prendiamo in  $S_{h-1}$  gli  $h$  vertici (1 2...  $h$ ) della piramide di riferimento di  $S_n$ , e prendiamo per elementi di riferimento  $h+1$ ...  $n+1$  e per elemento unità della stella di sostegno  $S_k$ , rispettivamente quegli  $S_{k+1}$  che proiettano da  $S_k$  i vertici  $h+1$ ...  $n+1$  e il punto unità della piramide di riferimento di  $S_n$ . La corrispondenza proiettiva fra la stella  $S_k$  e il sistema punteggiato  $S_n$  (indicando con  $x_1$ ...  $x_{n+1}$  le coordinate degli  $S_{k+1}$  della stella e con  $y_1$ ...  $y_{n+1}$  le coordinate dei punti di  $S_n$ ) potrà essere rappresentata dalle relazioni:

$$rx_1 = 0 \dots \quad rx_h = 0, \quad rx_{h+1} = y_{h+1} \dots \quad rx_{n+1} = y_{n+1}.$$

Le quali relazioni mostrano che fra la stella  $S_k$  e il sistema punteggiato  $S_n$  abbiamo una relazione omografica degenerare di caratteristica  $n-h+1$ .

Se  $S_k$  non sega  $S_n$  allora prendendo per elementi di riferimento 1...  $n+1$  e per elemento unità della stella  $S_k$ , rispettivamente quegli  $S_{k+1}$  che proiettano da  $S_k$  i vertici 1...  $n+1$  e il punto unità della piramide fondamentale di  $S_n$ , la corrispondenza proiettiva fra la stella  $S_k$  e il sistema punteggiato  $S_n$  potrà

---

(\*) I teoremi (6) (7) (8) (9) la cui importanza per lo studio delle omografie è manifesta sono dovuti al SEGRE (veggasi SEGRE, Memoria citata, e SEGRE, *Gli spazii fondamentali di un'omografia*. R. Acc. dei Lincei, Vol. II, Serie IV), che li dimostra separatamente con metodi meno semplici. Qui nascono tutti dalla considerazione dell'omografia degenerare [5] [6].

essere rappresentata dalle relazioni:

$$rx_1 = y_1 \dots \quad rx_{n+1} = y_{n+1}.$$

Le quali mostrano che fra la stella  $S_k$  e il sistema punteggiato  $S_n$  esiste una relazione omografica non degenera. Si deduce subito che:

(10) *Due sistemi proiettivi sono omografici; e se fra le operazioni che servono a passare dall'uno all'altro, c'è un'operazione degenera, l'omografia è pure degenera.*

Ora passiamo al teorema inverso e premettiamo il lemma:

*Date  $n + 1$  rette indipendenti cioè appartenenti ad un  $S_{2n+1}$ , per un punto qualunque di  $S_{2n+1}$ , passa uno ed un solo  $S_n$  che le incontra tutte (\*).*

Infatti siano  $\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}$  le rette ed  $A$  il punto. Gli spazii

$$S'_{2n} = A \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n+1}$$

$$S''_{2n} = A \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{n+1}$$

$$S_{2n}^{(n+1)} = A \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n,$$

hanno un  $S_n$  in comune che passa per  $A$  e incontra tutte le rette  $\alpha$ ; inoltre è il solo, perchè un  $S_n$  che passa per  $A$  e incontra le  $\alpha$  deve appartenere necessariamente agli spazii  $S'_{2n}, S''_{2n}, \dots S_{2n}^{(n+1)}$ , esso è quindi il loro spazio d'intersezione.

Ora dimostrerò che:

(11) *Due spazii di punti  $S_n$  ed  $S'_n$  omografici ed indipendenti sono prospettivi.*

Supponiamo dapprima che l'omografia non sia degenera.

Assunti  $n + 2$  punti di  $S_n$  che ad  $n + 1$  ad  $n + 1$  siano indipendenti, conduciamo le rette  $\alpha_1 \dots \alpha_{n+2}$  che li uniscono ai punti corrispondenti di  $S'_n$ . Per un punto di  $\alpha_1$  conduciamo l' $S''_n$  che taglia  $\alpha_2 \dots \alpha_{n+2}$ ; proiettando da  $S''_n$  l' $S'_n$  sopra  $S_n$  otteniamo i due spazii omografici dati [teorema (3)] (\*\*).

Se i due spazii sono omografici degeneri, sia  $S'_{h-1}$  lo spazio singolare di  $S'_n$  e  $S_{n-h}$  quello singolare di  $S_n$ ; ai punti di  $S'_{h-1}$  corrisponde un punto qualunque di  $S_n$ , e ad un punto di  $S_{n-h}$  corrisponde un  $S'_h$  passante per  $S'_{h-1}$ . Assunti  $n - h + 2$  punti di  $S_n$  che ad  $n - h + 1$  siano indipendenti, condu-

(\*) Questo lemma è un caso particolare di un teorema dovuto al prof. BERTINI, Veggasi il § 1 della Nota citata

(\*\*)  $S''_n$  non può tagliare  $S_n$  e nemmeno  $S'_n$ ; perchè per esempio con  $S_n$  determina uno spazio che è anche determinato dalle rette  $\alpha$  cioè un  $S_{2n+1}$ .

ciamo le rette  $\alpha_1 \dots \alpha_{n-h+2}$  che li uniscono rispettivamente ad  $n-h+2$  punti corrispondenti che godono della stessa proprietà, di essere cioè ad  $n-h+1$  ad  $n-h+1$  indipendenti. Per un punto di  $\alpha_1$  conduciamo l' $S''_{n-h}$  che taglia  $\alpha_2 \dots \alpha_{n-h+2}$  (\*). Proiettando dallo spazio  $S''_n$ , determinato da  $S'_{h-1}$  e  $S''_{n-h}$ , lo spazio  $S'_n$  sopra  $S_n$ , otteniamo i due spazii omografici dati [teorema (4)].

Se  $S_n$  ed  $S'_n$  non sono indipendenti, prendiamo un  $S''_n$  indipendente dall'uno e dall'altro e in relazione omografica non degenerare con  $S_n$ ; allora  $S_n$  ed  $S'_n$  essendo omografici ad  $S''_n$  sono altresì proiettivi ad  $S''_n$ , e quindi proiettivi fra di loro; anzi sono deducibili con due proiezioni e due sezioni di cui al più una degenerare.

Prendendo in esame i due sistemi in relazione omografica degenerare  $S_n$  ed  $S'_n$ , sezioni della stessa stella di sostegno  $S''_n$  poco più sopra considerati, si ricava il teorema (1) già dimostrato analiticamente. Ad ogni punto di  $S'_{h-1}$  corrisponde un punto qualunque di  $S_n$ ; ad ogni punto fuori di  $S'_{h-1}$  corrisponde un punto di  $S_{n-h}$  che è la sezione dello spazio determinato da  $S''_n$  e  $S'_n$  collo spazio  $S_n$ ; e viceversa ad un punto di  $S_{n-h}$  corrisponde un  $S'_h$  passante per  $S'_{h-1}$ ; i punti di  $S_{n-h}$  e gli  $S'_h$  corrispondenti sono in relazione omografica, perchè il sistema dei punti di  $S_{n-h}$  e il sistema degli  $S'_h$  corrispondenti sono le sezioni della stessa stella di  $S''_{n+1}$  passanti per  $S''_n$ . Correlativamente, osservando che ad ogni piano di  $S_n$  passante per  $S_{n-h}$  corrisponde un piano qualunque di  $S'_n$ , e che ad ogni piano di  $S_n$  non passante per  $S_{n-h}$  corrisponde un piano determinato di  $S'_n$  passante per  $S'_{h-1}$ , si ricava il teorema correlativo. Per completare il teorema (11) enunciamo quest'altro:

(12) *Due spazii omografici non degeneri che hanno nel loro spazio di intersezione  $S_{h-1}$  uno spazio di tutti i punti uniti sono prospettivi.*

Intanto due spazii  $S_h$  ed  $S'_h$  omografici che hanno nel loro spazio d'intersezione  $S_{h-1}$  uno spazio di tutti i punti uniti sono prospettivi; perchè una retta di  $S_h$  e la corrispondente di  $S'_h$  si tagliano in un punto di  $S_{h-1}$  e sono prospettive; se dal centro  $T$  di prospettiva proiettiamo  $S'_h$  sopra  $S_h$  otteniamo i due spazii omografici dati. Ora passiamo al caso generale. Assumiamo in  $S_n$ ,  $n-h+1$   $S_h$  arbitrarii passanti per  $S_{h-1}$ , che saranno prospettivi ai loro corrispondenti di  $S'_n$ . Per gli  $n-h+1$  centri di prospettiva conduciamo un  $S_{n-h}$ ; proiettiamo da  $S_{n-h}$ ,  $S'_n$  sopra  $S_n$  ed otterremo i due spazii omografici dati (\*\*).

(\*)  $S''_{n-h}$  non può tagliare nè  $S_n$  nè  $S'_n$ ; perchè per es. con  $S_n$  determina uno spazio che è anche determinato da  $S_n$  e dalle rette  $\alpha$ ; cioè un  $S_{2n-h+1}$ .

(\*\*) I teoremi (11) e (12) furono comunicati nell'ottobre del 1877 al SEGRE, il quale già li conosceva, non sono stati però ch'io sappia ancora pubblicati.

(13) *Ad ogni  $S_h$  passante per  $S_{h-1}$  corrisponde un  $S'_h$  prospettivo; il centro  $T$  di prospettiva giace in  $S_{n-h}$ ; lo spazio ad  $n-h$  dimensioni dei punti  $T$  e lo spazio ad  $n-h$  dimensioni degli  $S_h$  passanti per  $S_{h-1}$  sono prospettivi, perchè sono le sezioni di una stessa stella di  $S_{n-1}$  di sostegno  $S'_n$ , l'uno con  $S_{n-h}$  l'altro con  $S_n$ .*

Adesso dimostreremo geometricamente i teoremi fondamentali dell'omografia (6), (7), (8).

Supponiamo che gli spazii omografici dati  $S_n$  ed  $S'_n$  siano sovrapposti ed abbiano un  $S_{h-1}$  fondamentale; prendiamo  $n-h+2$  punti arbitrari di  $S_n$ :  $A, B, C, \dots$  e gli  $n-h+2$  corrispondenti di  $S'_n$   $A', B', C', \dots$ ; e supponiamo che al variare di un parametro  $t$  i punti  $A', B', C', \dots$ , determinando sempre con  $S_{h-1}$  uno spazio ad  $n$  dimensioni, escano da  $S'_n$  descrivendo linee arbitrarie in un  $S_{2n-h+1}$  passante per  $S_n$ . Le successive posizioni di questo spazio ad  $n$  dimensioni si possono considerare come successive posizioni dello spazio  $S'_n$ . Tutti gli altri punti di  $S'_n$  supporremo che si muovano in modo che il sistema  $S'_n$  nelle sue diverse posizioni sia sempre omografico ad  $S_n$ , essendo  $S_{h-1}$  uno spazio di tutti punti uniti e  $AA', BB', CC', \dots$  punti corrispondenti. Immaginiamo di rimettere a posto il sistema  $S'_n$  facendo descrivere ai suoi punti le stesse linee descritte prima; in ogni sua posizione, per quanto prossima alla iniziale,  $S'_n$  sarà con  $S_n$  la sezione di una stessa stella che avrà per sostegno uno spazio  $S_{n-h}$  (12); ad ogni  $S_h$  passante per  $S_{h-1}$  di  $S_n$  corrisponderà in  $S'_n$  un  $S'_h$  prospettivo secondo un punto  $T$  situato in  $S_{n-h}$ , e fra i punti  $T$  e gli  $S_h$  passanti per  $S_{h-1}$  esisterà una relazione omografica (13). Al limite  $S_{n-h}$  cadrà nello spazio  $S_n$ ; e poichè fuori del limite ogni  $S_{2n-h}$  della stella di sostegno  $S_{n-h}$  taglia  $S_n$  ed  $S'_n$  in due piani corrispondenti, al limite ogni piano passante per  $S_{n-h}$  sarà un piano unito; tutti questi piani costituiscono un  $\Sigma_{h-1}$ ; onde concludiamo:

*Dati due spazii omografici sovrapposti se esiste un  $S_{h-1}$  fondamentale di punti esiste anche un  $\Sigma_{h-1}$  fondamentale di piani di sostegno  $S_{n-h}$ . Ad ogni  $S_h$  passante per  $S_{h-1}$  corrisponde un  $S'_h$  prospettivo; il centro  $T$  di prospettiva è situato nel sostegno di  $\Sigma_{h-1}$ ; gli  $S_h$  passanti per  $S_{h-1}$  e i punti  $T$  di  $S_{n-h}$  sono in relazione omografica ecc. E correlativamente.*

Questa dimostrazione dà, mi pare, la ragione geometrica di questi teoremi e ravvicina un'omografia qualunque ad un'omologia.

Diamo di questi teoremi un'altra dimostrazione geometrica.

Abbiansi due spazii omografici sovrapposti  $S_n$  ed  $S'_n$  con un  $S_{h-1}$  fondamentale. Facciamo passare per  $S_{h-1}$  un  $S''_n$  arbitrario, determinante quindi

con  $S_n$  uno spazio  $S_{2n-h+1}$ . Prendiamo  $n-h+2$  punti di  $S_n$  ( $A, B, C, \dots$ ) fuori di  $S_{h-1}$ , che ad  $n-h+1$  siano indipendenti, e i loro corrispondenti  $A', B', C', \dots$  in  $S'_n$ ; e prendiamo ancora  $n-h+2$  punti di  $S''_n$  ( $A'', B'', C'', \dots$ ) pure ad  $n-h+1$  indipendenti. Poniamo fra  $S''_n$  ed  $S_n$  una corrispondenza omografica in modo che  $S_{h-1}$  sia uno spazio di tutti punti uniti ed  $AA'', BB'', \dots$  coppie di punti corrispondenti; e così poniamo fra  $S'_n$  ed  $S''_n$  una corrispondenza omografica in modo che  $S_{h-1}$  sia uno spazio di tutti punti uniti ed  $A'A'', B'B'', \dots$  coppie di punti corrispondenti. Allora  $S_n$  ed  $S'_n$  sono prospettivi secondo un  $S'_{n-h}$  (12) ed  $S'_n$  ed  $S''_n$  prospettivi secondo un  $S''_{n-h}$ . Due punti corrispondenti di  $S_n$  ed  $S'_n$  si ottengono proiettando rispettivamente da  $S'_{n-h}$  ed  $S''_{n-h}$  uno stesso punto di  $S''_n$ ; ovvero due punti di  $S_n$  ed  $S'_n$  sono corrispondenti quando si possono condurre due rette che si tagliano in  $S''_n$  e incontrino rispettivamente  $S'_{n-h}$  ed  $S''_{n-h}$ . In questo modo i due spazii omografici dati si possono ottenere l'uno dall'altro con due proiezioni e due sezioni. Tenendo presente questa generazione dei due spazii omografici dati, le cose che diremo più sotto restano evidenti.

I due spazii  $S'_{n-h}$  ed  $S''_{n-h}$  non si segano; ed infatti supponiamo che abbiano un  $S_p$  in comune; lo spazio  $S''_{p+n+1} = (S_p, S''_n)$  sega  $S_n$  in un  $S_{p+h}$  passante per  $S_{h-1}$  (perchè  $S_{h-1}$  giace in  $S_n$  ed  $S''_n$  e quindi in  $S_n$  ed  $S''_{p+n+1}$ ); questo spazio  $S_{p+h}$  sarebbe uno spazio di tutti punti uniti, contrariamente all'ipotesi che  $S_{h-1}$  sia fondamentale.

Lo spazio  $S_{2n-2h+1} = (S'_{n-h}, S''_{n-h})$  sega  $S_n$  in un  $S_{n-h}$  unito che è il sostegno di uno spazio  $\Sigma_{h-1}$  di tutti piani uniti.

Dall'esame della figura risulta ancora che ad un  $S_h$  di  $S_n$  passante per  $S_{h-1}$ , corrisponde un  $S'_h$  di  $S'_n$  ed un  $S''_h$  di  $S''_n$  passante per  $S_{h-1}$ .  $S_h$  ed  $S'_h$  sono prospettivi secondo un punto  $T'$  di  $S'_{n-h}$ ;  $S'_h$  ed  $S''_h$  prospettivi secondo un punto  $T''$  di  $S''_{n-h}$ . La  $T' T''$  taglia  $S_{n-h}$  in un punto  $T$  che è il centro di prospettiva di  $S_h$  ed  $S'_h$ . Ad ogni  $S_h$  passante per  $S_{h-1}$  viene a corrispondere quindi un punto  $T$  di  $S_{n-h}$ . Se si proietta da  $S''_n$  il punto  $T'$  e poi si sega con  $S_n$  si ottiene  $S_h$ , e se si proietta da  $S''_{n-h}$  lo stesso punto  $T'$  e si sega con  $S_{n-h}$  si ottiene il punto  $T$ ; quindi lo spazio degli  $S_h$  passanti per  $S_{h-1}$  e lo spazio  $S_{n-h}$  dei rispettivi centri  $T$  di prospettiva, sono prospettivi allo spazio  $S'_{n-h}$  dei punti  $T'$ , rispettivamente da  $S''_n$  e  $S''_{n-h}$ . Si deducono subito i teoremi (6) (7) e (8).





Per cercare gli elementi uniti bisogna ricorrere al determinante  $D'(r)$ .

Essendo  $a$  radice  $\lambda^{\text{esima}}$  di  $D(r)$ , sarà radice  $\lambda - h^{\text{esima}}$  di  $D'(r)$  e renderà  $D'(r)$  di caratteristica  $p+1$ . Corrispondentemente si avrà uno spazio (singolare se l'omografia è degenere) fondamentale di punti  $S_{k-1}$  ( $p+k=l$ ), al quale sarà coniugato uno spazio fondamentale di piani (piani di  $S_l$ )  $\sum_{k-1}$  di sostegno  $S_p$ ; scegliendo i vertici  $1 \dots p+1$  della piramide di riferimento in  $S_p$ , il determinante  $D'(r)$ , per le ragioni più sopra esposte riguardo a  $D(r)$  diventa:

$$D'(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r \dots & a_{p+1,1} & a_{p+2,1} \dots & a_{l+1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,p+1} \dots & a_{p+1,p+1} - r & a_{p+2,p+1} \dots & a_{l+1,p+1} \\ 0 \dots & 0 & a - r \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots & 0 & 0 \dots & a - r \end{vmatrix} = (a - r)^k D''(r),$$

e l'omografia in  $S_p$  è data dalle relazioni:

$$\begin{aligned} r x_1 &= a_{11} y_1 + \dots + a_{p+1,1} y_{p+1} \\ &\dots \\ r x_{p+1} &= a_{1,p+1} y_1 + \dots + a_{p+1,p+1} y_{p+1}, \end{aligned}$$

e il determinante che dà gli elementi uniti di questa omografia è  $D''(r)$ .

E così continuando,  $a$  sarà radice  $(\lambda - h - k)^{\text{esima}}$  di  $D''(r)$  e renderà il determinante  $D''(r)$  di caratteristica  $q+1$ ; corrispondentemente vi sarà uno spazio fondamentale (singolare se  $a=0$ )  $S_{m-1}$  ( $m+q=p$ ) al quale sarà coniugato un  $\sum_{m-1}$  di sostegno  $S_q$ ; scegliendo i vertici  $1 \dots q+1$  della piramide fondamentale in  $S_q$ ,  $D''(r)$  diventa:

$$D''(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r \dots & a_{q+1,1} & a_{q+2,1} \dots & a_{p+1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,q+1} \dots & a_{q+1,q+1} - r & a_{q+2,q+1} \dots & a_{p+1,q+1} \\ 0 \dots & 0 & a - r \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots & 0 & 0 \dots & 0 \end{vmatrix} = (a - r)^m D'''(r),$$

dove  $D'''(r)$  è il determinante che dà gli elementi uniti della omografia in  $S_q$ . Così proseguiremo finchè  $\lambda - h - k - m - \text{ecc.}$  si ridurrà a zero.

Se  $\lambda - h = 0$  lo spazio  $S_{h-1}$  lo chiameremo spazio fondamentale semplice. Noi supporremo  $\lambda - h - k - m = 0$  cioè supporremo che  $a$  non sia radice di  $D''(r)$ ; nulla toglieremo per questo alla generalità del ragionamento.

Possiamo intanto concludere, se  $a = 0$  cioè se l'omografia è degenera, che abbiamo uno spazio singolare  $S_{h-1}$  a cui è coniugato un  $\sum_{h-1}$  di sostegno  $S_l$ ; in cui abbiamo un'omografia degenera, con uno spazio singolare  $S_{k-1}$  (contenuto in  $S_{h-1}$  come vedremo) a cui è coniugato uno spazio di piani (piani di  $S_l$ ) di sostegno  $S_p$ ; nel quale abbiamo ancora un'omografia degenera con uno spazio singolare  $S_{m-1}$  a cui è coniugato uno spazio di piani (piani di  $S_p$ ) di sostegno  $S_q$ ; nel quale abbiamo un'omografia non degenera i cui spazi fondamentali sono dati da  $D'''(r)$ .

Tornando al caso generale, vediamo che scelti i vertici della piramide di riferimento come abbiamo detto, il determinante  $D(r)$  si riduce alla forma:

$$D(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r \dots & a_{q+1,1} & a_{q+2,1} \dots & a_{p+1,1} & a_{p+2,1} \dots & a_{l+1,1} & a_{l+2,1} \dots & a_{n+1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,q+1} \dots & a_{q+1,q+1} - r & a_{q+2,q+1} \dots & a_{p+1,q+1} & a_{p+2,q+1} \dots & a_{l+1,q+1} & a_{l+2,q+1} \dots & a_{n+1,q+1} \\ 0 \dots & 0 & a - r \dots & 0 & a_{p+2,q+2} \dots & a_{l+1,q+2} & a_{l+2,q+2} \dots & a_{n+1,q+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots & 0 & 0 \dots & a - r & a_{p+2,p+1} \dots & a_{l+1,p+1} & a_{l+2,p+1} \dots & a_{n+1,p+1} \\ 0 \dots & 0 & 0 \dots & 0 & a - r \dots & 0 & a_{l+2,p+2} \dots & a_{n+1,p+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \dots & a - r & a_{l+2,p+1} \dots & a_{n+1,l+1} \\ 0 \dots & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \dots & 0 & a - r \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \dots & a - r \end{vmatrix}$$

E questo era il nostro scopo, di semplificare cioè le relazioni omografiche.

Consideriamo l'omografia il cui  $D(r)$  è:

$$(\alpha) \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{q+1,1} & a_{q+2,1} & a_{p+1,1} & a_{p+2,1} & a_{l+1,1} & a_{l+2,1} & a_{n+1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,q+1} & a_{q+1,q+1} - r & a_{q+2,q+1} & a_{p+1,q+1} & a_{p+2,q+1} & a_{l+1,q+1} & a_{l+2,q+1} & a_{n+1,q+1} \\ 0 & 0 & a'' - r & 0 & a_{p+2,q+2} & a_{l+1,q+2} & a_{l+2,q+2} & a_{n+1,q+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & a' - r & a_{p+2,p+1} & a_{l+1,p+1} & a_{l+2,p+1} & a_{n+1,p+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a - r & 0 & a_{l+2,p+2} & a_{n+1,p+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a' - r & a_{l+2,l+1} & a_{n+1,l+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a - r & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a - r \end{vmatrix},$$

che non differisce dal primo se non in alcune delle  $a$  che furono cambiate in  $a''$  ed  $a'$ .

In questa omografia in luogo dello spazio fondamentale  $S_{h-1}$  abbiamo tre spazii fondamentali semplici  $S_{h-1}$ ,  $S_{k-1}$ ,  $S_{m-1}$  corrispondenti rispettivamente alle radici  $a$ ,  $a'$ ,  $a''$ . Ed infatti si vede subito che ponendo  $r = a$  il determinante si riduce di caratteristica  $n - h + 1$ , ponendo  $r = a'$  di caratteristica  $n - k + 1$  e ponendo  $r = a''$  di caratteristica  $n - m + 1$ . Facendo tendere  $a''$  ad  $a'$  ed  $a'$  ad  $a$  questa seconda omografia tende alla data, e i tre spazii semplici vengono a sovrapporsi costituendo lo spazio fondamentale unico  $S_{h-1}$  (\*). È ovvio che questi spazii semplici  $S_{k-1}$  e  $S_{m-1}$ , i quali vengono a sovrapporsi

(\*) Per uno spazio fondamentale semplice  $S_{h-1}$  la radice di  $D(r) = 0$  a cui esso corrisponde è radice  $h'^{\text{esima}}$  di  $D(r)$ ,  $h' - 1^{\text{esima}}$  di tutti i minori d'ordine  $n$  di  $D(r)$ ,  $h' - 2^{\text{esima}}$  di tutti quelli di ordine  $n - 1$  ecc., è radice semplice dei minori di ordine  $n - h' + 2$ . Un'omografia che ha tutti i suoi spazii fondamentali semplici (omografia generale) si studia assai facilmente, per questa ragione principale che tutti gli spazii fondamentali  $S_{h-1} \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$  essendo  $h' + h'' + \dots + h^{(\sigma)} = n + 1$  appartengono e determinano tutto  $S_n$  (5); e il sostegno dello spazio coniugato di uno spazio fondamentale qualunque  $S_{h-1}$ , oltre contenere tutti gli altri spazii fondamentali (8)  $S_{h'-1} \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$ , è da essi determinato.

ad  $S_{h-1}$ , si identificano al limite con quegli spazi  $S_{k-1}$  e  $S_{m-1}$  dell'omografia data che furono già trovati analiticamente (\*).

(14) *Ogni spazio fondamentale che non è semplice si può considerare come il limite di un gruppo di spazii fondamentali semplici che vengono a sovrapporsi; lo chiameremo spazio fondamentale multiplo.*

Come abbiamo operato sopra  $D(r)$  immaginiamo di operare sopra  $D''(r)$  per rispetto successivamente alle altre radici; verremo così a considerare un'omografia in cui tutti gli spazii fondamentali sono semplici. Ricaviamo immediatamente:

(15) *Ogni omografia con spazii fondamentali multipli si può considerare come il limite di un'omografia a spazii fondamentali semplici.*

Vale a dire possiamo sempre scrivere le equazioni di una certa omografia a spazii fondamentali semplici, e poi immaginare che i coefficienti di questa omografia variino in modo da dare successivamente omografie che, essendo sempre a spazii fondamentali semplici, si accostano però indefinitamente all'omografia a spazii multipli data.

In virtù di questo teorema possiamo ricondurre lo studio delle omografie a spazii fondamentali multipli allo studio delle omografie a spazii semplici, potendosi sempre pensare un'omografia a spazii fondamentali multipli come un'omografia a spazii semplici, alcuni dei quali sono infinitamente vicini.

Il (15) permette di dare ad alcuni teoremi una forma più determinata; per es. si può dire:

(16) *In un'omografia qualunque esistono  $\sigma$  spazii fondamentali di punti  $S_{h'-1} \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$ , e  $\sigma$  spazii fondamentali di piani  $\Sigma_{h'-1} \dots \Sigma_{h^{(\sigma)}-1}$ , reali o immaginari, tutti distinti o a gruppi sovrapposti singolari o no, ed è*

$$h' + \dots + h^{(\sigma)} = n + 1.$$

Altri teoremi diventano evidenti, per es. quello dovuto al SEGRE (veggasi nota, in fin di pagina) che lo spazio  $S_{h-1}$  sega il sostegno  $S_l$  dello spazio coniugato in  $S_{k-1}$  che sega alla sua volta  $S_p$  in  $S_{m-1}$  ecc.

Dipendendo poi due spazii coniugati come  $S_{h-1}$  e  $\Sigma_{h'-1}$  dalla stessa radice,

---

(\*) È  $h \cong k \cong m$ ; perchè se fosse  $h < k$  la radice  $a$  renderebbe il determinante  $D(r)$  di caratteristica  $n - k + 1$ , contrariamente all'ipotesi che  $a$  renda il determinante di caratteristica  $n - h + 1$ . Facendo tendere  $a''$  ad  $a'$   $S_{m-1}$  cade in  $S_{k-1}$ , e poi  $S_{k-1}$  insieme ad  $S_{m-1}$  in  $S_{h-1}$ ; cioè nell'omografia data  $S_{h-1}$  contiene  $S_{k-1}$ , che contiene  $S_{m-1}$ ; e quindi  $S_{h-1}$  sega  $S_l$  in  $S_{k-1}$ , e  $S_{k-1}$  sega  $S_p$  in  $S_{m-1}$ ; teorema dovuto al SEGRE: *Teoria e classificazione delle omografie.*

se alcuni spazii fondamentali di punti vengono a sovrapporsi, vengono pure a sovrapporsi i coniugati spazii di piani e quindi anche i loro sostegni.

Ogni retta che unisce due punti corrispondenti  $x$  e  $y$ , taglia i sostegni dei  $\sigma$  spazii fondamentali di piani in  $\sigma$  punti, di cui alcuni possono essere coincidenti; la punteggiata:

$$x, \quad y, \quad x - r' y, \dots \quad x - r^{(\sigma)} y,$$

formata da questi punti, è omografica a tutte le analoghe che si ottengono facendo variare i due punti corrispondenti; perchè è omografica alla serie dei parametri

$$0, \quad \infty, \quad r', \dots \quad r^{(\sigma)}.$$

I  $(\sigma - 1)$  rapporti anarmonici,

$$\frac{r''}{r'}, \dots \quad \frac{r^{(\sigma)}}{r'},$$

che si possono formare con quei  $\sigma + 2$  numeri (dove  $r$  è scelto fra le radici diverse da zero) sono invarianti assoluti dell'omografia. Alcuni di quei rapporti anarmonici possono essere eguali fra di loro o all'unità, o anche uguali a zero, quando ci sono spazii singolari (\*); giova però considerarli come  $\sigma - 1$  invarianti distinti; cioè rappresentanti proprietà proiettive distinte; perchè il fatto dell'essere eguali tra loro o all'unità rappresenta l'esistenza degli spazii multipli, e il fatto dell'essere uguali a zero rappresenta l'esistenza degli spazii singolari.

Ma veniamo ad una classificazione delle omografie.

Due omografie che hanno lo stesso numero di spazii fondamentali rispettivamente collo stesso numero di dimensioni, siano questi spazii reali o immaginari, distinti o a gruppi sovrapposti singolari o no, diremo che appartengono alla stessa *classe*.

Due omografie appartenenti alla stessa classe hanno lo stesso numero di invarianti assoluti i quali si corrispondono uno ad uno.

Due omografie che appartengono alla stessa classe diremo che appartengono anche alla stessa *sottoclasse*, quando gli invarianti assoluti corrispondenti nelle due omografie sono eguali.

Se uno spazio è multiplo o singolare per l'una, il suo corrispondente è multiplo o singolare anche per l'altra.

---

(\*) Naturalmente se ci sono spazii singolari, non possono essere che sovrapposti, perchè corrispondono alla stessa radice zero.

Come si vede per la distinzione in sottoclassi non si tien conto della posizione rispettiva degli spazii fondamentali fra di loro e per riguardo ad una coppia di punti corrispondenti; di questo si tien conto per la distinzione in sottoclassi.

Fra le sottoclassi di una stessa classe sono maggiormente degne di studio quelle che hanno spazii multipli; e devono essere studiate a parte quelle che hanno uno spazio singolare multiplo o no.

Dimostreremo in seguito che due omografie appartenenti alla stessa sottoclasse sono identiche a meno di una trasformazione di coordinate, cioè sono identiche dal punto di vista proiettivo.

Uno spazio fondamentale multiplo formato dagli spazii fondamentali  $S_{h_1-1}, \dots, S_{h_p-1}$  che vengono a sovrapporsi lo indicheremo con  $(h_1-1, \dots, h_p-1)$ , e se è singolare con  $(\overline{h_1-1}, \dots, \overline{h_p-1})$ , che chiameremo *gruppo caratteristico* relativo a quello spazio.

L'unione dei gruppi caratteristici relativi agli spazii di un'omografia chiameremo *caratteristica dell'omografia*.

La somma dei numeri costituenti la caratteristica aumentati di un'unità è eguale ad  $n+1$ .

L'analisi fatta a pag. 130 e 131 dimostra che a qualunque caratteristica corrisponde un'omografia.

Il prof. BERTINI nella Nota citata ha mostrato geometricamente che si può sempre costruire un'omografia corrispondente a qualunque caratteristica. E noi lo mostreremo nel § 9.

### Caratteristiche delle omografie.

Nella retta:

Classe unica:  $[00]$ ,  $[\bar{0}0]$ ,  $[(00)]$ .

Nel piano:

Classe 1.<sup>a</sup>  $[000]$ ,  $[\bar{0}00]$ ;  $[(00)0]$ ,  $[(\bar{0}\bar{0})0]$ ,  $[(00)\bar{0}]$ ,  $[(000)]$ ,  $[(\bar{0}\bar{0}\bar{0})]$ ;

Classe 2.<sup>a</sup>  $[10]$ ,  $[\bar{1}0]$ ,  $[1\bar{0}]$ ;  $[(10)]$ ,  $[(\bar{1}\bar{0})]$ .

Nello spazio ordinario:

Classe 1.<sup>a</sup>  $[0000]$ ,  $[\bar{0}000]$ ;  $[(00)00]$ ,  $[(\bar{0}\bar{0})00]$ ,  $[(00)\bar{0}\bar{0}]$ ;  $[(00)(00)]$ ,  $[(\bar{0}\bar{0})(00)]$ ;  $[(000)0]$ ,  $[(\bar{0}\bar{0}\bar{0})0]$ ,  $[(000)\bar{0}]$ ;  $[(0000)]$ ,  $[(\bar{0}\bar{0}\bar{0}\bar{0})]$ .

Classe 2.<sup>a</sup>  $[100]$ ,  $[\bar{1}00]$ ,  $[1\bar{0}0]$ ;  $[(10)0]$ ,  $[(\bar{1}\bar{0})0]$ ,  $[(10)\bar{0}]$ ;

$[1(00)]$ ,  $[\bar{1}(00)]$ ,  $[1(\bar{0}\bar{0})]$ ,  $[1(0\bar{0})]$ ,  $[(\bar{1}\bar{0}\bar{0})]$ ;

Classe 3.<sup>a</sup>  $[11]$ ,  $[\bar{1}1]$ ,  $[(11)]$ ,  $[(\bar{1}\bar{1})]$ ;

Classe 4.<sup>a</sup>  $[20]$ ,  $[\bar{2}0]$ ,  $[2\bar{0}]$ ,  $[(20)]$ ,  $[(\bar{2}\bar{0})]$ .

Queste notazioni mi pare che riescano assai comode, perchè dànno subito una idea della natura della omografia; e del come sono disposti gli spazii uniti, senza bisogno di calcoli. La notazione per es.  $[\bar{1}(00)]$  rappresenta l'omografia che ha un raggio fondamentale singolare e una coppia di punti uniti coincidenti.

Concependo uno spazio multiplo come il complesso di spazii fondamentali semplici infinitamente vicini e sempre indipendenti si vengono a considerare degli spazii fondamentali che nel § 3 non si erano ancora presentati. Ed invero se per esempio ad una radice corrisponde lo spazio multiplo  $(h_1 - 1, h_2 - 1 \dots h_r - 1 \dots h_p - 1)$   $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_p$ , nel § 3 non si sarebbe presentato che lo spazio  $S_{h_1-1}$ . Prima di finire questo studio sugli spazii multipli vogliamo vedere come si modifica il teorema (6) colla considerazione degli altri spazii  $S_{h_2-1} \dots S_{h_r-1} \dots S_{h_p-1}$ . Siccome a tutti gli  $S_{h_r}$  passanti per  $S_{h_1-1}$  e giacenti in uno stesso  $S_{h_1}$  passante per  $S_{h_1-1}$ , corrispondono rispettivamente degli  $S'_{h_r}$  prospettivi secondo uno stesso punto  $T$  di  $S_{n-h_1}$ , sostegno dello spazio coniugato di  $S_{h_1-1}$ , e siccome  $S_{n-h_1}$  è contenuto in  $S_{n-h_r}$ , sostegno dello spazio coniugato di  $S_{h_r-1}$ , concludiamo:

(6') *Ad ogni  $S_{h_r}$  passante per  $S_{h_1-1}$ , corrisponde un  $S'_{h_r}$  prospettivo secondo un punto  $T$  di  $S_{n-h_r}$ . La stella degli  $S_{h_r}$  e i punti  $T$  sono in corrispondenza omografica degenera. Lo spazio singolare della stella di  $S_{h_r}$  è lo spazio ad  $h_1 - h_r - 1$  dimensioni di  $S_{h_r}$  giacenti in  $S_{h_1-1}$ ; e il sostegno dello spazio singolare in  $S_{n-h_r}$  è  $S_{n-h_1}$ . E correlativamente.*

## § 6.

Come applicazione del teorema (15) dimostriamo che due omografie appartenenti alla stessa sottoclasse sono proiettive. E cominciamo a dimostrare che:

(17) *Se di un'omografia generale, sono dati gli spazii fondamentali e gli invarianti assoluti la corrispondenza è determinata.*

Infatti siano  $S_{h_1-1} \dots S_{h_r-1}$  gli spazii fondamentali.

Fissiamo  $n + 1$  punti in  $S_n$  di cui  $h_1$  in  $S_{h_1-1}$ ,  $h_2$  in  $S_{h_2-1}$  ecc.  $h_\sigma$  in  $S_{h_\sigma-1}$ . Per trovare il corrispondente di un punto  $M$ , dallo spazio determinato da quegli  $n + 1$  punti esclusi due appartenenti a spazii fondamentali diversi, proiettiamo rispettivamente questi due punti e il punto  $M$ ; otterremo tre piani; ed al piano che proietta il punto  $M$  dovrà corrispondere un piano formante coi tre un rapporto anarmonico dato [che è un invariante dell'omografia (6)], cioè un piano determinato.

Escludendo altri due punti e proiettando dai rimanenti  $n - 1$  rispettivamente i due punti esclusi e il punto  $M$  ecc. e ripetendo l'operazione convenientemente  $n + 1$  volte, otterremo  $n + 1$  piani nei quali deve trovarsi il punto  $M'$ , il quale resta così completamente determinato (\*).

Il teorema dimostrato si può esprimere anche così:

*Due omografie generali aventi gli stessi spazii fondamentali, se hanno anche gli stessi invarianti assoluti coincidono. Ovvero: Due omografie generali appartenenti alla stessa sottoclasse sono proiettive; e in questa proiettività una coppia di punti corrispondenti resta completamente arbitraria; perchè basta passare dagli spazii fondamentali dell'una agli spazii fondamentali dell'altra.*

Ora passiamo al caso di due omografie qualunque non degeneri appartenenti alla stessa sottoclasse, l'una nello spazio  $S_n$  l'altra nello spazio  $S'_n$  che supporremo indipendenti.

Ripetiamo nell'una e nell'altra l'analisi fatta a pag. 130 131 mettendo in luogo delle  $a$  ecc le stesse  $a'$  ed  $a''$  ecc.; otterremo due omografie generali appartenenti alla stessa sottoclasse; le quali saranno proiettive, anzi prospettive secondo un certo  $S''_n$ , ed è arbitraria in questa proiettività una coppia di punti corrispondenti  $AA'$ . Ora immaginiamo che nell'una e nell'altra omografia  $a'$  tenda ad  $a$ , allora lo spazio fondamentale  $S_{h-1}$  (\*\*) corrispondente alla radice  $a'$  tenderà a cadere con legge determinata nell'una e nell'altra omografia nello spazio  $S_{h-1}$ , corrispondente alla radice  $a$ ;  $S''_n$  varierà tendendo a prendere una posizione determinata, e le due omografie sono sempre prospettive e lo saranno anche al limite. Così immaginando che  $a''$  tenda ad  $a$  ecc. concludiamo che le due omografie date sono prospettive secondo un  $S''_n$ ; ed una

(\*) Il procedimento si può abbreviare (quando  $h_1 - 1 \dots h_\sigma - 1$  non sono tutti nulli) osservando che la retta  $MM'$  deve incontrare tutti i sostegni degli spazii coniugati di  $S_{h_1-1} \dots S_{h_\sigma-1}$ , che sono poi gli spazii  $S_{n-h_1} \dots S_{n-h_\sigma}$  determinati da tutti gli spazii fondamentali, meno rispettivamente  $S_{h_1-1} \dots S_{h_\sigma-1}$ . Cioè  $M'$  deve trovarsi nel  $S_{n-h_1+1}$  determinato da  $M$  e  $S_{n-h_1}$ , nel  $S_{n-h_2+1}$  determinato da  $M$  e  $S_{n-h_2}$  ecc., e quindi nel loro spazio comune che è un  $S_{\sigma-1}$ .

(\*\*) Adopero le stesse notazioni adoperate a pag. 130 e 131.



coppia di punti corrispondenti resta fissata arbitrariamente. Ma si vede che l'arbitrarietà non è limitata alla coppia di punti  $AA$ ; poichè ridotte le due omografie date a due omografie generali, basta passare dagli spazii fondamentali dell'una agli spazii fondamentali dell'altra, e quindi fissati nella prima omografia  $h_1$  punti in  $S_{h_1-1}$ , ecc.,  $h_s$  in  $S_{h_s-1}$  dove  $S_{h_1-1} \dots S_{h_s-1}$  sono gli spazii fondamentali di questa omografia, per passare dall'una omografia all'altra basta scegliere i corrispondenti in  $S'_n$  in modo che  $h_1$  siano in  $S'_{h_1-1}$ , ecc.,  $h_s$  in  $S'_{h_s-1}$ , dove  $S'_{h_1-1}$  ecc.  $S'_{h_s-1}$  sono gli spazii fondamentali della seconda. Passando al limite questa arbitrarietà si deve necessariamente sentire; ma di questo faremo un'analisi rigorosa nel § 9.

Il teorema inverso che due omografie dedotte con un numero finito di operazioni appartengono alla stessa sottoclasse è evidente; perchè le due omografie avranno lo stesso numero di spazii fondamentali rispettivamente collo stesso numero di dimensioni e gli stessi invarianti assoluti.

I determinanti  $D(r)$  e  $D(\rho)$ , pag. 120 e 121, essendo identici con uno scambio delle colonne nelle righe, la corrispondenza omografica fra i punti della prima figura e i punti della seconda, è identica alla corrispondenza omografica fra i piani della seconda figura e i piani della prima, a meno di una trasformazione delle  $x$  nelle  $\eta$  e della stessa trasformazione delle  $y$  nelle  $\xi$  cioè a meno di una correlazione.

Questo teorema è del SEGRE che l'ha dedotto da quello di WEIERSTRASS appoggiandosi ad un teorema di SIACCI sui determinanti.

L'inversa di un'omografia è un'omografia che appartiene alla stessa classe ed ha gli invarianti assoluti reciproci della data. Ne viene che un'omografia che ha gli invarianti assoluti uguali ad 1 o a  $-1$  (un'omografia per esempio con un unico spazio unito multiplo) è omografica alla sua inversa, correlativa di sè stessa e della sua inversa,

## § 7.

Sia l'omografia  $[(h_1 - 1, h_2 - 1, \dots, h_q - 1, \dots, h_p - 1) \dots]$  nella quale sono sovrapposti i  $p$  spazii fondamentali di punti  $S_{h_1-1} \dots S_{h_p-1}$  e quindi sono sovrapposti anche i coniugati  $p$  spazii fondamentali di piani  $\Sigma_{h_1-1} \dots \Sigma_{h_q-1} \dots \Sigma_{h_p-1}$ ; cioè  $\Sigma_{h_1-1}$  contiene  $\Sigma_{h_2-1}$  ecc.

(18) In ogni piano  $S_{n-1}$  di  $\Sigma_{h_q-1}$  che non è però un piano di  $\Sigma_{h_{q+1}-1}$  abbiamo un'omografia subordinata di punti, e quindi di  $S_{n-2}$  (che sono i piani

di  $S_{n-1}$ ), di caratteristica

$$[(h_1 - 1, h_2 - 1, \dots, h_q - 2, \dots, h_p - 1) \dots].$$

Se  $h_q - 1 = 0$ , invece di mettere  $h_q - 2$  si sopprime  $h_q - 1$ .

E correlativamente:

(19) Intorno ad ogni punto di  $S_{h_q-1}$  che non è però un punto di  $S_{h_q+1-1}$ , abbiamo un'omografia subordinata di  $S_{n-1}$  e quindi anche di  $S_1$  di caratteristica

$$[(h_1 - 1, h_2 - 2, \dots, h_q - 2, \dots, h_p - 1) \dots].$$

Dimostrerò il (18). Concependo l'omografia data come il limite di un'omografia generale, in un piano qualunque passante per lo spazio  $S_{n-h_2}$ , determinato da tutti gli spazii fondamentali semplici dell'omografia generale meno  $S_{h_q-1}$ , col tendere dell'omografia generale all'omografia data, avremo sempre un'omografia generale di caratteristica

$$[h_1 - 1, h_2 - 1, \dots, h_q - 2, \dots, h_p - 1, \dots];$$

perchè quel piano passando per  $S_{n-h_2}$  contiene tutti gli spazii fondamentali meno  $S_{h_q-1}$  che sega in un  $S_{h_q-2}$ .

Al limite  $S_{n-h_2}$  (che è sempre fuori del limite nell'omografia generale il sostegno dello spazio coniugato di  $S_{h_q-1}$ ) diventa il sostegno dello spazio fondamentale di piani  $\sum_{h_q-1}$ , e nel limite di  $S_{n-1}$  avremo un'omografia subordinata di caratteristica

$$[(h_1 - 1, h_2 - 1, \dots, h_q - 2, \dots, h_p - 1) \dots] (*).$$

Il teorema (18) permette di determinare la caratteristica dell'omografia subordinata in uno spazio  $S_{n-1}$  unito qualunque; come si vede basta diminuire di un'unità nella caratteristica le dimensioni di un certo spazio fondamentale o sopprimerle addirittura se è un punto. Applicando ad un  $S_{n-2}$  unito qualunque di  $S_{n-1}$  lo stesso teorema ecc. concludiamo facilmente:

(20) In uno spazio lineare unito qualunque abbiamo un'omografia subordinata la cui caratteristica si può ottenere dalla caratteristica dell'omografia data, o sopprimendo alcuni spazii fondamentali, o diminuendone le dimensioni di un certo numero di unità. Resta sempre che la somma dei numeri della caratteristica di queste omografie subordinate, aumentati di un'unità, deve essere uguale alle dimensioni dello spazio più un'unità.

---

(\*) Questo teorema si verifica facilmente sulle forme ridotte; che si ottengono colla regola (33).

Nel sostegno dello spazio  $\sum_{h_2-1}$  avendosi sempre fuori del limite un'omografia generale subordinata di caratteristica

$$[h_1 - 1, h_2 - 1, \dots, h_{q-1} - 1, h_{q+1} - 1 \dots h_p - 1 \dots],$$

al limite si avrà un'omografia la cui caratteristica si potrà ottenere dalla caratteristica dell'omografia data sopprimendo il numero  $h_q - 1$ .

In un'omografia generale tutti i raggi uniti dell'omografia sono quelli che appartengono ad uno spazio fondamentale o che si appoggiano a due spazi fondamentali; quando l'omografia non è generale allora alcuni spazi fondamentali vengono a sovrapporsi, e possono anche sovrapporsi alcuni spazi di raggi uniti. Il teorema (19) ci permette di determinare gli spazi di raggi uniti di un'omografia, uscenti da un punto unito qualunque, e di trovare gli spazi di raggi uniti che vengono a sovrapporsi. Applicando all'omografia dei raggi uniti uscenti da un punto unito lo stesso teorema (19) (poichè gli spazi ad una dimensione di quest'ultima omografia sono spazi a due dimensioni per la data) potremo determinare gli spazi di  $S_2$  uniti passanti per una retta unita qualunque ecc.; il teorema (19) ci permette dunque di determinare gli spazi di  $S_1, S_2, S_3$  ecc. uniti di un'omografia qualunque.

## § 8.

Continuiamo lo studio dello spazio multiplo  $(h_1 - 1, h_2 - 1, \dots, h_p - 1)$  dove  $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_p$ . Abbiamo visto che considerando l'omografia data come il limite di un'omografia generale i  $p$  spazi semplici  $S_{h_1-1}, S_{h_2-1}, \dots, S_{h_p-1}$  che tengono luogo in questa dello spazio multiplo  $(h_1 - 1, \dots, h_p - 1)$ , al limite entrano l'uno nell'altro, gli spazi di dimensioni inferiori in quelli di dimensioni superiori, di modo che  $S_{h_1-1}$  contiene  $S_{h_2-1}$  ecc.  $S_{h_{p-1}-1}$  contiene  $S_{h_p-1}$ . Ora vogliamo vedere come si sovrappongono al limite, gli spazi determinati fuori del limite da gruppi di quei  $p$  spazi fondamentali. Intanto ricordiamo che nello spazio  $S_{k_1+\dots+k_{q-1}}$  (determinato da  $q$  di essi  $S_{k_1-1} \dots S_{k_{q-1}-1}$ ) sempre unito ed unito anche al limite, avremo un'omografia che fuori del limite avrà  $q$  spazi fondamentali semplici, ma che al limite avrà un unico spazio fondamentale multiplo  $(k_1 - 1, \dots, k_q - 1)$ .

Il teorema seguente risolve completamente la questione che ci siamo proposti.

Siano  $S_{k_1-1}, S_{k_2-1}, \dots, S_{k_{q-1}-1}$  ( $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_q$ )  $q$  dei  $p$  spazi fondamentali

$S_{h_1-1} \dots S_{h_p-1}$  che vengono a sovrapporsi; e siano  $S_{l_1-1}, S_{l_2-1}, \dots, S_{l_r-1}$  ( $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_r$ )  $r$  degli stessi  $p$  spazii  $S_{h_1-1}, \dots, S_{h_p-1}$ . Supponiamo  $q \geq r$ . Indichiamo con  $S_{m_1-1}$  ed  $S_{n_1-1}$  rispettivamente della coppia dei due spazii  $S_{h_1-1}$  ed  $S_{l_1-1}$  quello di dimensioni superiori e quello di dimensioni inferiori o indifferentemente l'uno o l'altro se sono di dimensioni eguali. E così indichiamo con  $S_{m_2-1}$  e  $S_{n_2-1}$  della coppia  $S_{h_2-1}$   $S_{l_2-1}$  ecc., ecc., ed indichiamo finalmente (se  $q > r$ ) con  $S_{m_{r+1}-1} \dots S_{m_q-1}$  gli spazii  $S_{h_{r+1}-1} \dots S_{h_q-1}$ .

(21) *I due spazii  $S_{k_1+\dots+k_{r-1}}$  ed  $S_{l_1+\dots+l_{r-1}}$ , che passano rispettivamente per gli spazii infinitamente vicini  $S_{k_1-1}, \dots, S_{k_{r-1}-1}$ , ed  $S_{l_1-1}, \dots, S_{l_{r-1}-1}$ , appartengono allo spazio  $S_{m_1+\dots+m_{r-1}}$  che passa per gli spazii  $S_{m_1-1}, \dots, S_{m_{r-1}-1}$ , e si segano nello spazio  $S_{n_1+\dots+n_{r-1}}$  che passa per gli spazii  $S_{n_1-1}, \dots, S_{n_{r-1}-1}$ .*

In particolare se  $q = r$  e  $k_1 \geq l_1, \dots, k_q \geq l_q$ :

(22) *Lo spazio  $S_{k_1+\dots+k_q-1}$  contiene lo spazio  $S_{l_1+\dots+l_q-1}$ .*

Cominciamo a dimostrare quest'ultimo teorema:

Per  $q = 1$  il teorema è dimostrato; dimostriamolo per  $q = 2$ .

Nell'omografia subordinata nello spazio  $S_{k_1+k_2+l_1-1}$  fuori del limite abbiamo i tre spazii fondamentali distinti  $S_{k_1-1}$ ,  $S_{k_2-1}$ ,  $S_{l_1-1}$  di punti e quelli fondamentali di piani (piani di  $S_{k_1+k_2+l_1-1}$ )  $\Sigma_{k_1-1}$ ,  $\Sigma_{k_2-1}$ ,  $\Sigma_{l_1-1}$  di sostegni  $S_{k_2+l_1-1}$ ,  $S_{k_1+l_1-1}$ ,  $S_{k_1+k_2-1}$ .

I tre spazii fondamentali di punti al limite venendo a sovrapporsi, vengono pure a sovrapporsi i coniugati spazii di piani e quindi anche i loro sostegni; cioè  $S_{k_2+l_1-1}$  giace in  $S_{k_1+k_2-1}$ ; analogamente considerando lo spazio  $S_{k_2+l_1+l_2-1}$  concludiamo che  $S_{l_1+l_2-1}$  giace in  $S_{k_1+l_1-1}$  e quindi in  $S_{k_1+k_2-1}$ .

La dimostrazione è identica per  $q = 3$ .

Si trova, considerando lo spazio  $S_{k_1+k_2+k_3+l_1-1}$  che  $S_{k_1+k_2+k_3-1}$  contiene  $S_{k_2+k_3+l_1-1}$ , il quale contiene  $S_{k_3+l_1+l_2-1}$  che contiene  $S_{l_1+l_2+l_3-1}$  ecc.

(23) *In particolare in un'omografia con un unico punto unito  $n+1^{\text{plo}}$   $a_0$  abbiamo un'unica retta unita  $a_1$  passante per  $a_0$ , limite di tutte le rette che uniscono a due a due gli  $n+1$  punti uniti infinitamente vicini; e così abbiamo un unico spazio a due dimensioni unito  $a_2$  passante per  $a_1$ , limite di tutti gli spazii a due dimensioni che uniscono a tre a tre gli  $n+1$  punti uniti infinitamente vicini ecc.*

Passiamo a dimostrare il teorema (21).

Per il (22) lo spazio  $S_{n_1+\dots+n_{r-1}}$  è contenuto nei due spazii  $S_{k_1+\dots+k_{r-1}}$  ed  $S_{l_1+\dots+l_{r-1}}$  e lo spazio  $S_{m_1+\dots+m_{r-1}}$  li contiene tutti e due.

Basterà dimostrare che lo spazio in cui si segano non è di dimensioni superiori ad  $n_1 + \dots + n_r - 1$  e ne verrà che lo spazio a cui appartengono

sarà di dimensioni  $m_1 + \dots + m_q - 1$  (\*). Nello spazio in cui i due spazii  $S_{k_1+\dots+k_{q-1}}$  ed  $S_{l_1+\dots+l_{r-1}}$  si segano avremo un'omografia, subordinata all'omografia, di  $S_{k_1+\dots+k_{q-1}}$  e all'omografia di  $S_{l_1+\dots+l_{r-1}}$ , che sarà di caratteristica (20)  $(x_1 - 1, \dots, x_s - 1)$  dove  $s \leq r$  e  $x_1 \leq l_1 \dots x_s \leq l_s$  e così  $x_1 \leq k_1 \dots x_1 \leq k_s$ , e quindi  $x_1 \leq n_1 \dots x_s \leq n_s$  da cui  $x_1 + \dots + x_s - 1 \leq n_1 + \dots + n_r - 1$ ; ma lo spazio in cui si segano  $S_{k_1+\dots+k_{q-1}}$  ed  $S_{l_1+\dots+l_r}$  è ad un numero di dimensioni  $x_1 + \dots + x_s - 1$ , quindi il teorema è dimostrato.

Non è inutile forse osservare che gli spazii  $S_{n_1+\dots+n_{r-1}}$   $S_{m_1+\dots+m_{q-1}}$  abbiano omografie subordinate di caratteristica rispettivamente  $(n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_r - 1)$ ,  $(m_1 - 1, \dots, m_q - 1)$ .

Per esempio nell'omografia [(100)]; la retta fondamentale è tagliata dalla retta che unisce i due punti uniti infinitamente vicini in un punto, e in quest'ultima retta abbiamo un'omografia subordinata [(00)]. Le due rette determinano un piano in cui si ha l'omografia [(10)]. Nell'omografia in uno spazio  $S_7$  con un unico spazio multiplo [(2110)], lo spazio  $S_3$  (che passa per i due spazii fondamentali infinitamente vicini  $S_2$  ed  $S_0$ ) e lo spazio  $S'_3$  (che passa per i due spazii fondamentali infinitamente vicini  $S_4$  ed  $S'_4$ ) si segano in un  $S'_2$  in cui si ha l'omografia [(10)], ed appartengono ad un  $S_5$  in cui si ha l'omografia [(210)]. Sopra uno spazio multiplo qualunque

$$(h_1 - 1, h_2 - 1, \dots, h_q - 1, \dots, h_p - 1),$$

dimostriamo quest'altro teorema:

(24) *Per ogni punto  $\alpha_0$  di  $S_{h_2-1}$ , ma non di  $S_{h_2+1-1}$  passa una totalità  $h_1 - 1$  volte infinita di  $S_1$  uniti con un solo punto unito, una totalità  $h_1 - 1 + h_2 - 1$  volte infinita di  $S_2$  uniti con un solo punto unito ecc. una totalità  $h_1 - 1 + \dots + h_{q-1} - 1$  volte infinita di  $S_{q-1}$  uniti con un solo punto unito. Gli  $S_{q-1}$  uniti con un solo punto unito, sono gli spazii di massime dimensioni passanti per  $\alpha_0$ ; cioè per  $\alpha_0$  non passa alcun  $S_q$  unito con un unico punto unito.*

(a) Sia dapprima  $\alpha_0$  un punto di  $S_{h_1-1}$  ma non di  $S_{h_1+1-1}$ . Intorno ad  $\alpha_0$  abbiamo (19) un'omografia subordinata di  $S_1$  di caratteristica  $(h_1 - 2, h_2 - 1, h_3 - 1, \dots)$ . Siano  $S'_{h_1-2}$ ,  $S'_{h_2-1}$ ,  $S'_{h_3-1} \dots$  gli spazii fondamentali (di raggi) di questa omografia. Gli  $S'_i$  della totalità lineare  $S'_{h_1-2}$  [totalità che contiene tutte le altre  $S'_{h_2-1}$ ,  $S'_{h_3-1} \dots$  (\*\*)] costituiscono tutti gli  $S_1$  uniti passanti per

(\*) Perché se due spazii  $S_\alpha$  ed  $S_\beta$  si segano in un  $S_\gamma$  ed appartengono ad un  $S_\delta$  si ha;  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ .

(\*\*) Perché avendo supposto che  $\alpha_0$  sia un punto di  $S_{h_1-1}$  ma non di  $S_{h_2-1}$  ne viene che  $h_1 - 1 > h_2 - 1$  e quindi  $h_1 - 2 \geq h_2 - 1$ .

$\alpha_0$  e sono gli  $S_1$  che passano per  $\alpha_0$  e giacciono in  $S_{h_1-1}$ ; perchè questi  $S_1$  costituiscono appunto una totalità lineare  $h_1 - 2$  volte infinita. Per  $\alpha_0$  non passa adunque alcun  $S_1$  unito con un solo punto unito.

(b) Sia  $\alpha_0$  un punto di  $S_{h_2-1}$  ma non di  $S_{h_3-1}$ . Intorno ad  $\alpha_0$  abbiamo un'omografia subordinata di  $S_1$  di caratteristica  $(h_1 - 1, h_2 - 2, h_3 - 1 \dots)$ . Siano  $S'_{h_1-1}, S'_{h_2-2}, S'_{h_3-1} \dots$  gli spazii fondamentali (di raggi) di questa omografia. Gli  $S_1$  della totalità lineare  $S'_{h_1-1}$  (totalità che contiene tutte le altre  $S'_{h_2-2}, S'_{h_3-1}, \dots$ ) costituiscono tutti gli  $S_1$  uniti passanti per  $\alpha_0$ , e sono  $S_1$  uniti con un solo punto unito (se si eccettuano quelli che passano per  $\alpha_0$  e giacciono in  $S_{h_1-1}$ , i quali costituiscono una totalità  $h_1 - 2$  volte infinita). Applicando il teorema (a) a questa omografia di raggi, siccome gli  $S_1$  di questa omografia di raggi sono  $S_2$  per l'omografia data, si conclude che per ciascun  $S_1$  di  $S'_{h_1-1}$  non passa alcun  $S_2$  unito con un solo punto unito. Ora ogni  $S_2$  unito con un solo punto unito passante per  $\alpha_0$  conterrebbe una retta unita passante per  $\alpha_0$ , quindi concludiamo che per  $\alpha_0$  non passa alcun  $S_2$  unito con un unico punto unito.

(c). Supponiamo che  $\alpha_0$  sia un punto di  $S_{h_3-1}$  ma non di  $S_{h_4-1}$ . Intorno ad  $\alpha_0$  abbiamo un'omografia subordinata di  $S_1$  di caratteristica  $(h_1 - 1, h_2 - 1, \dots, h_3 - 2, \dots)$ . Siano  $S'_{h_1-1}, S'_{h_2-1}, S'_{h_3-1}, \dots$  gli spazii fondamentali di raggi di questa omografia. Gli  $S_1$  della totalità lineare  $S'_{h_1-1}$  sono  $S_1$  uniti con un solo punto unito se si eccettuano quelli che giacciono in  $S_{h_1-1}$ . Per ogni  $S_1$  della totalità  $S'_{h_1-1}$ , che non è un  $S_1$  della totalità  $S'_{h_2-1}$ , non passa [teorema (a)] alcun  $S_2$  unito con un unico punto unito; per ogni  $S_1$  della totalità  $S'_{h_2-1}$  passa [per il teorema (b) applicato a questa omografia di raggi] una totalità  $h_1 - 1$  volte infinita di  $S_2$  uniti con quel solo  $S_1$  unito e quindi con un solo punto unito. Gli  $S_2$  passanti per  $\alpha_0$  costituiscono quindi una totalità  $h_1 - 1 + h_2 - 1$  volte infinita. Per gli  $S_1$  di  $S'_{h_3-1}$  non passa alcun  $S_3$  unito, ancora per il teorema (b), con un solo  $S_1$  unito; per  $\alpha_0$  non passa quindi alcun  $S_3$  unito con un solo punto unito, perchè quel  $S_3$  avrebbe una retta unita con un solo punto unito che dovrebbe essere una retta di  $S'_{h_1-1}$  ecc.

Il ragionamento si può continuare senza difficoltà e ammesso il teorema vero per  $q = 1, q = 2, \dots, q = r$  per tutte le omografie, si dimostra col ragionamento (c) che è vero per  $q = r + 1$ .

A complemento del teorema (24) diamo il seguente:

(25) *Se da ciascun punto di un certo numero di punti indipendenti fissati in  $S_{h_1-1}$  immaginiamo condotto uno spazio unito con un solo punto unito, tutti questi spazii sono pure indipendenti.*

Infatti siano  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \dots$  punti indipendenti fissati in  $S_{h_1-1}$ , e siano  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  degli spazii uniti con un solo punto unito passanti rispettivamente per  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \dots$ .

Dico che  $\alpha, \beta, \gamma$  sono indipendenti. Infatti se  $\alpha$  e  $\beta$  si segassero, avrebbero almeno un punto unito in comune, ed allora  $\beta_0$  dovrebbe coincidere con  $\alpha_0$ . Nello spazio a cui  $\alpha$  e  $\beta$  appartengono, i soli punti uniti sono i punti della retta  $\alpha_0 \beta_0$ ; se quindi  $\gamma$  segasse questo spazio, allora  $\gamma$  avrebbe con questo spazio almeno un punto unito in comune e  $\gamma_0$  dovrebbe giacere nella retta  $\alpha_0 \beta_0$  contrariamente all'ipotesi ecc.

Ai teoremi (24) e (25) aggiungo questa osservazione di cui farò uso nel paragrafo seguente. Essa è relativa ancora allo spazio multiplo  $(h_1 - 1, \dots, h_p - 1)$ . Fissiamo arbitrariamente in  $S_{h_1-1}$   $h_1$  punti indipendenti

$$a'_0 \dots a_0^{h_1},$$

dei quali i primi  $h_p$  in  $S_{h_p-1}$  i primi  $h_{p-1}$  in  $S_{h_{p-1}-1}$  ecc. i primi  $h_2$  in  $S_{h_2-1}$ .

Sia  $\alpha_0$  uno qualunque di quei punti ed  $\alpha_0$  appartenga ad  $S_{h_q-1}$  ma non ad  $S_{h_{q+1}-1}$ . Sia  $\alpha_{q-1}$  uno spazio a  $q-1$  dimensioni passante per  $\alpha_0$  unito e con l'unico punto unito  $\alpha_0$ . Allora  $\alpha_{q-1}$  (24) è uno degli spazii di massime dimensioni (unito e con un unico punto unito  $\alpha_0$ ) passante per  $\alpha_0$ ; è un punto cioè  $\alpha_0$  stesso, se  $\alpha_0$  è uno degli ultimi  $h_1 - h_2$  punti  $a$ ; è una retta se  $\alpha_0$  ecc.; è uno spazio a  $p-1$  dimensioni se  $\alpha_0$  è uno dei primi  $h_p$  punti  $a$ . Si può scegliere  $\alpha_{q-1}$  in una totalità  $h_1 - 1 + h_2 - 1 + \dots + h_{q-1} - 1$  volte infinita (24) quando è fissato  $\alpha_0$ ; ma il punto  $\alpha_0$  è scelto in  $S_{h_q-1}$  cioè in una totalità  $h_q - 1$  volte infinita; introducendo dunque l'arbitrarietà della scelta di  $\alpha_0$  in quella di  $\alpha_{q-1}$ , lo spazio  $\alpha_{q-1}$  è scelto in una totalità  $h_1 - 1 + \dots + h_q - 1$  volte infinita. Scelto lo spazio  $\alpha_{q-1}$  resta determinato il punto  $\alpha_0$  che è il punto unito nell'omografia subordinata in  $\alpha_{q-1}$ .

Per ciascuno dei punti  $a'_0 \dots a_0^{h_1}$  immaginiamo uno spazio  $\alpha$  di massime dimensioni unito e con un unico punto unito, analogo ad  $\alpha_{q-1}$ ; tutti gli spazii  $\alpha$  sono indipendenti (25), e di questi  $h_1 - h_2$  sono punti,  $h_2 - h_3$  sono rette, ecc.,  $h_p$  sono spazii a  $p-1$  dimensioni; introducendo l'arbitrarietà della scelta dei punti  $a$  in quella degli spazii  $\alpha$ , possiamo dire che il gruppo degli  $h_1$  spazii  $\alpha$  si può scegliere in una totalità

$$\begin{aligned} & (h_1 - h_2)(h_1 - 1) + (h_2 - h_3)(h_1 - 1 + h_2 - 1) + \\ & + (h_3 - h_4)(h_1 - 1 + h_2 - 1 + h_3 - 1) + \dots \\ & \dots + h_p(h_1 - 1 + h_2 - 1 + \dots + h_p - 1) \text{ volte infinita,} \end{aligned}$$

cioè in una totalità:

$$h_1(h_1 - 1) + h_2(h_2 - 1) + \dots + h_p(h_p - 1) \text{ volte infinita.}$$

Concludiamo:

(26) *In uno spazio  $S_{h_1+h_2+\dots+h_p-1}$  in cui abbiamo un'omografia  $(h_1 - 1, h_2 - 1, \dots, h_p - 1)$  possiamo sempre immaginare un gruppo di  $h_1$  spazii  $\alpha$  uniti e con un unico punto unito, che si possono ottenere fissando i punti  $a'_0 \dots a'_{h_1}$  e poi immaginando per ciascuno di essi uno spazio unito con un unico punto unito di massime dimensioni. Questi spazii  $\alpha$ , dei quali  $h_1 - h_2$  sono punti  $h_2 - h_3$  rette, ecc. ed  $h_p$  sono spazii a  $p - 1$  dimensioni, sono tutti indipendenti e quindi determinano tutto  $S_{h_1+h_2+\dots+h_p-1}$ . Il loro complesso si può scegliere in una totalità  $h_1(h_1 - 1) + \dots + h_p(h_p - 1)$ .*

Immaginiamo ora un'omografia qualunque di caratteristica:

$$[(h'_1 - 1, \dots, h'_{p'} - 1)(h''_1 - 1, \dots, h''_{p'} - 1) \dots (h^{(\sigma)}_1 - 1, \dots, h^{(\sigma)}_{p'} - 1)]. \quad [1]$$

Indico con  $S' = S_{h'_1+h'_2+\dots+h'_{p'}-1}$  lo spazio che passa per gli spazii fondamentali infinitamente vicini  $S_{h'_1-1}, \dots, S_{h'_{p'}-1}$  costituenti lo spazio multiplo  $(h'_1 - 1, \dots, h'_{p'} - 1)$ ; così indico con  $S''$  lo spazio  $S_{h''_1+\dots+h''_{p'}-1}, \dots$  e con  $S^{(\sigma)}$  lo spazio  $S_{h^{(\sigma)}_1+\dots+h^{(\sigma)}_{p'}-1}$ . Gli spazii  $S', S'', \dots, S^{(\sigma)}$  sono spazii uniti indipendenti (\*) e determinano  $S_n$  (\*\*).

In ciascuno di essi immaginiamo il gruppo degli spazii  $\alpha$ ; questi spazii determinano tutto  $S_n$  e in ciascuno di essi abbiamo omografie subordinate con un unico punto unito. La considerazione degli spazii uniti  $S', S'', \dots, S^{(\sigma)}$  e dei gruppi degli spazii  $\alpha$  in essi contenuti, è una guida sicura nello studio delle omografie; le quali così analizzate nei loro elementi uniti, presentano in modo chiaro le loro notevoli proprietà.

Insieme agli spazii  $S', S'', \dots, S^{(\sigma)}$  è degno di nota lo spazio  $S$  determinato dagli spazii  $S_{h'_1-1}, S_{h''_1-1}, \dots, S_{h^{(\sigma)}_1-1}$ ; in  $S$  abbiamo un'omografia a spazii fondamentali semplici di caratteristica  $[h'_1 - 1, h''_1 - 1, \dots, h^{(\sigma)}_1 - 1]$ . Lo spazio  $S$  taglia gli spazii  $S', S'', \dots, S^{(\sigma)}$  rispettivamente in  $S_{h'_1-1}, S_{h''_1-1}, \dots, S_{h^{(\sigma)}_1-1}$ .

(\*) Sono indipendenti perchè se due di essi per es.  $S'$  ed  $S''$  si segassero in un punto, quel punto sarebbe unito, e quindi sarebbe un punto di  $S_{h'_1-1}$  e di  $S_{h''_1-1}$ ; e allora  $S_{h'_1-1}$  ed  $S_{h''_1-1}$  avrebbero un punto in comune; il che non può essere (5); e così se  $S'''$  segasse lo spazio a cui appartengono  $S'$  ed  $S''$  ecc.

(\*\*) Se  $p' = 1$ ,  $S'$  si riduce allo spazio fondamentale semplice  $S_{h'_1-1}$  e il gruppo degli spazii  $\alpha$  si riduce ad  $h_1$  punti fissati in  $S_{h'_1-1}$ .



(27) *Gli spazii  $S'$ ,  $S''$ , ...  $S^{(\sigma)}$  sono determinati dai rispettivi gruppi di spazii  $\alpha$ ; e lo spazio  $S$  è determinato dai punti uniti degli spazii  $\alpha$  costituenti quei gruppi.*

Ed infatti gli spazii costituenti il gruppo che si trova in  $S'$  escono da  $h'_1$  punti indipendenti di  $S_{h'_1-1}$  (26) che sono i loro punti uniti; questi punti uniti determinano dunque  $S'_{h'_1-1}$ ; analogamente i punti uniti degli spazii  $\alpha$  costituenti i gruppi che si trovano in  $S''$ , ...  $S^{(\sigma)}$  determinano  $S_{h''_1-1}$  ...  $S_{h^{(\sigma)}_1-1}$ ; il che dimostra la seconda parte del teorema; quanto alla prima è inclusa nel teorema (26).

(28) *Date le omografie subordinate in  $S'$ ,  $S''$  ...  $S^{(\sigma)}$  e gli invarianti assoluti l'omografia in  $S_n$  è determinata.*

Infatti l'omografia è determinata in  $S$  (17) e quindi anche in  $S_n$ ; perchè per trovare il piano corrispondente di un piano qualunque  $S_{n-1}$ , basta trovare i corrispondenti degli spazii dove  $S_{n-1}$  taglia  $S'$ ,  $S''$  ...  $S^{(\sigma)}$  ed  $S$ , che costituiscono appunto un  $S'_{n-1}$ .

## § 9.

Date due omografie in  $S_n$  ed  $S'_n$  appartenenti alla stessa sottoclasse abbiamo visto che sono proiettive ed una coppia di punti corrispondenti in questa proiettività si può fissare arbitrariamente.

Proponiamoci questo problema:

Fissata fra i due spazii  $S_n$  ed  $S'_n$  una coppia arbitraria di punti corrispondenti trovare altre  $n+1$  coppie in modo da passare dall'omografia in  $S_n$  a quella in  $S'_n$ .

Considereremo dapprima due omografie con un unico punto unito  $n+1$  plo. Premetterò la costruzione di un'omografia con un unico punto unito multiplo.

Abbiamo già visto (23) che in un'omografia con un unico punto unito  $n+1$  plo  $a_0$ , esiste una sola retta unita  $a_1$  che passa per  $a_0$ , un solo spazio a due dimensioni unito  $a_2$  che passa per  $a_1$ , un solo spazio a tre dimensioni unito  $a_3$  che passa per  $a_2$  ecc. un solo spazio a  $n-1$  dimensioni unito  $a_{n-1}$  che passa per  $a_{n-2}$ .

Siano  $b_0$ ,  $b'_0$  una coppia qualunque di punti corrispondenti di  $a_1$ ,  $c_0$ ,  $c'_0$  una coppia qualunque di punti corrispondenti di  $a_2$ ,  $d_0$ ,  $d'_0$  una coppia di  $a_3$  ecc.  $l_0$ ,  $l'_0$  una coppia qualunque di punti corrispondenti di  $S_n$ .

(29) Queste coppie determinano l'omografia tenendo presente che  $a_0$  deve essere un punto unito  $n + 1^{\text{plo}}$ .

Per  $n = 1$  il teorema è subito dimostrato perchè il corrispondente di  $b_0$  (considerando  $b_0$  come appartenente all'altra figura) è un punto che deve formare coi tre  $a_0$   $b'_0$   $b_0$  un rapporto armonico.

Supponiamo il teorema dimostrato per uno spazio ad  $n - 1$  dimensioni  $a_{n-1}$  e dimostriamolo per lo spazio  $S_n$ . Intorno ad  $a_{n-2}$  abbiamo due fasci proiettivi sovrapposti di piani col solo piano  $a_{n-1}$  unito. Al piano  $a_{n-2}$   $m_0$  corrisponde il piano  $a_{n-2}$   $m'_0$  per cui la corrispondenza fra i piani di questi due fasci è determinata. Per trovare il punto corrispondente di un punto  $M$  basta trovare il piano corrispondente di  $a_{n-2}$   $M$  e la retta corrispondente di  $m_0$   $M$  che è una retta che passa per  $m'_0$  e per il punto corrispondente del punto dove  $m_0$   $M$  taglia  $a_{n-1}$  che è per l'ipotesi determinato.

Da ciò si ricava una costruzione semplicissima di un'omografia con un unico punto unito  $a_0$ . Basterà condurre arbitrariamente per  $a_0$  una retta  $a_1$ , per  $a_1$  uno spazio a due dimensioni  $a_2$  ecc. e poi fissare arbitrariamente in  $a_1$  una coppia di punti corrispondenti  $b_0$   $b'_0$ , in  $a_2$  una coppia  $c_0$   $c'_0$  ecc. in  $S_n$  una coppia  $m_0$   $m'_0$ . Queste coppie determinano l'omografia.

Abbiansi ora due omografie rispettivamente in  $S_n$  ed  $S'_n$  con un unico punto unito  $n + 1^{\text{plo}}$ .

Siano al solito  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  il punto, la retta... lo spazio ad  $n - 1$  dimensioni uniti della prima omografia. Fissiamo in  $S_n$  arbitrariamente il punto  $m'_0$ , a questo punto corrisponde un certo punto  $m_0$ ; la retta  $m'_0$   $m_0$  taglia  $a_{n-1}$  in un punto  $l'_0$  al quale corrisponde  $l_0$ ; la retta  $l'_0$   $l_0$  taglia  $a_{n-2}$  in un punto ecc. verremo così a determinare in  $a_2$  un punto  $d'_0$  al quale corrisponde  $d_0$ , la retta  $d'_0$   $d_0$  taglia  $a_2$  in un punto  $c_0$  al quale corrisponde  $c'_0$ ; la retta  $c_0$   $c'_0$  taglia  $a_1$  in un punto  $b'_0$  al quale corrisponde  $b_0$ . Il punto  $a_0$  unito  $n + 1^{\text{plo}}$  e le coppie  $b_0$   $b'_0$ ,  $c_0$   $c'_0$ ,  $d_0$   $d'_0$ ...  $l_0$   $l'_0$ ,  $m_0$   $m'_0$  determinano l'omografia (26).

In  $S'_n$  ripetiamo le stesse costruzioni indicando i punti ottenuti allo stesso modo colle stesse lettere; cioè fissiamo in  $S'_n$  arbitrariamente un punto  $m'_0$  ecc. Ponendo fra i due spazii  $S_n$  ed  $S'_n$  la corrispondenza

$$(a_0 a_0), \quad (b_0 b_0), \quad (c_0 c_0), \dots \quad (l_0 l_0) \quad (m_0 m_0) \quad (m'_0 m'_0),$$

passeremo dal punto  $l'_0$  al punto  $l'_0$ ,... dal punto  $c'_0$  al punto  $c'_0$ , dal punto  $b'_0$  al punto  $b'_0$  e quindi dalla prima omografia alla seconda.

Nella corrispondenza fra i due spazii la coppia  $m'_0$   $m'_0$  è fissata arbitrariamente, ma le altre ne sono in conseguenza determinate; poichè fissata la

coppia  $m'_0, m'_0$  per passare da un'omografia all'altra bisogna necessariamente passare da  $m_0$  ad  $m_0$ , e quindi da  $l'_0$  ad  $l'_0$ , da  $l_0$  ad  $l_0$  ecc.

Ora consideriamo un'omografia qualunque di caratteristica [1] (pag. 144).

Immaginiamo gli spazii  $S', S'', \dots S^{(\sigma)}$ , (pag. 144) e in ciascuno di essi il gruppo degli spazii  $\alpha$ . Sia  $\alpha_{q-1}$  uno di questi spazii; indichiamo con  $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{q-2}$ , il punto, la retta, ... lo spazio a  $q-2$  dimensioni uniti di  $\alpha_{q-1}$ . Sia  $\beta_0, \beta'_0$  una coppia qualunque di punti corrispondenti di  $\alpha_1$ ,  $\gamma_0, \gamma'_0$  una coppia di  $\alpha_2$  ecc.  $\lambda_0, \lambda'_0$  una coppia di  $\alpha_{q-2}$  e  $\mu_0, \mu'_0$  una coppia di  $\alpha_{q-1}$ . Scelti i punti  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots \lambda_0, \mu_0$  in modo che siano indipendenti, essi determinano  $\alpha_{q-1}$ .

Ripetiamo queste costruzioni in tutti gli spazii  $\alpha_{q-1}$ .

(30) *Le coppie  $(\alpha_0, \alpha_0)$ ,  $(\beta_0, \beta'_0)$ ,  $(\gamma_0, \gamma'_0)$ , ...  $(\lambda_0, \lambda'_0)$   $(\mu_0, \mu'_0)$ , relative a tutti gli spazii  $\alpha$  (\*), insieme alla condizione che gli spazii  $\alpha$  siano uniti con un solo punto unito e insieme agli invarianti assoluti determinano l'omografia.*

E infatti queste coppie determinano l'omografia in tutti gli spazii  $\alpha$  (29) ed anche in tutti gli spazii  $S', S'', \dots S^{(\sigma)}$ ; perchè per trovare il piano corrispondente di un piano qualunque di  $S'$  basta trovare lo spazio corrispondente dello spazio dove quel piano taglia  $S'_{h-1}$  e gli spazii corrispondenti degli spazii dove quel piano taglia gli spazii  $\alpha$  del gruppo che si trova in  $S'$ . Essendo determinata la corrispondenza negli  $S', S'', \dots S^{(\sigma)}$ , gli invarianti assoluti finiscono col determinare la corrispondenza in tutto  $S_n$  (28).

Si ricava una costruzione semplicissima di un'omografia qualunque di caratteristica [1] pag. 144:

(31) *Conduciamo arbitrariamente i  $\sigma$  spazii indipendenti  $S' \dots S^{(\sigma)}$  fissiamo rispettivamente in essi gli spazii  $S'_{h-1} \dots S^{(\sigma)}_{h-1}$ ; conduciamo i gruppi degli spazii  $\alpha$  come è stato indicato (26), fissiamo in ciascuno di essi  $(\alpha_{q-1})$  arbitrariamente la retta  $\alpha_1$  passante per  $\alpha_0$ , lo spazio  $\alpha_2$  passante per  $\alpha_1$  ... lo spazio  $\alpha_{q-2}$  passante per  $\alpha_{q-3}$  e scegliamo finalmente in  $\alpha_1$  arbitrariamente una coppia di punti  $\beta_0, \beta'_0$ , in  $\alpha_2$  una coppia  $\gamma_0, \gamma'_0$  ... in  $\alpha_{q-2}$  una coppia  $\lambda_0, \lambda'_0$  e in  $\alpha_{q-1}$  una coppia  $\mu_0, \mu'_0$ . Queste coppie relative a tutti gli spazii  $\alpha$  insieme agli invarianti assoluti, scelti pure arbitrariamente determinano l'omografia (30).*

Abbiansi ora due omografie qualunque, l'una in  $S_n$  l'altra in  $S'_n$  di caratteristica [1] e cogli stessi invarianti assoluti; due omografie quindi appartenenti alla stessa sottoclasse.

---

(\*) Indico con  $\beta_0, \beta'_0, \gamma_0, \gamma'_0$  le coppie fissate in  $\alpha_{q-1}$  e le coppie analoghe fissate negli altri spazii  $\alpha$ . È chiaro che se lo spazio  $\alpha$  è un punto queste coppie non ci sono; se è una retta bisogna fermarsi a  $\beta_0, \beta'_0$  ecc.

Immaginiamo in  $S_n$  gli spazii  $S', S'', \dots S^{(s)}$  e in ciascuno di essi il gruppo degli spazii  $\alpha$ ; scegliamo arbitrariamente in  $S_n$  un punto  $U$ . Da tutti gli  $\alpha$  meno uno (meno per es.  $\alpha_{q-1}$ ) proiettiamo  $U$  sopra  $\alpha_{q-1}$ ; otterremo un punto  $\mu'_0$  perchè gli  $\alpha$  sono indipendenti e determinano  $S_n$ . Al punto  $\mu'_0$  corrisponde un certo punto  $\mu_0$ ; la retta  $\mu'_0 \mu_0$  taglia  $\alpha_{q-2}$  in un punto  $\lambda'_0$ , al quale corrisponde un certo punto  $\lambda_0$  ecc. verremo così a determinare in  $\alpha_2$  un punto  $\gamma'_0$ , al quale corrisponde  $\gamma_0$ ; la retta  $\gamma'_0 \gamma_0$  taglia  $\alpha_1$  in  $\beta'_0$  al quale corrisponde  $\beta_0$ . Ripeto queste costruzioni in tutti gli spazii  $\alpha$ ; i punti  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots, \lambda_0, \mu_0$ , relativi agli  $\alpha$  (\*), sono  $n+1$  perchè determinano i singoli spazii  $\alpha$  e quindi tutto  $S_n$ .

Le coppie  $(\alpha_0 \alpha_0), (\beta_0 \beta'_0), (\gamma_0 \gamma'_0) \dots (\lambda_0 \lambda'_0), (\mu_0 \mu'_0)$  relative a tutti gli spazii  $\alpha$  insieme alla condizione che questi spazii siano uniti con un unico punto unito e insieme agli invarianti assoluti determinano l'omografia in  $S_n$  (30).

Ripetiamo nello spazio  $S'_n$  le stesse costruzioni, indicando colle stesse lettere gli spazii e i punti ottenuti allo stesso modo (punti e spazii omologhi); cioè fissiamo arbitrariamente in  $S'_n$  un punto  $U$ , e fissiamo gli spazii  $S', S'', \dots S^{(s)}$ ; scegliamo in  $S'$  nella totalità  $h'_1(h'_1-1) + \dots + h'_p(h'_p-1)$  (26) il gruppo degli spazii  $\alpha$ , e così in  $S''$  ecc. Proiettiamo da tutti gli spazii  $\alpha$  meno  $\alpha_{q-1}$ , sopra  $\alpha_{q-1}$  il punto  $U$  ecc. Ponendo fra i due spazii la corrispondenza data dalle  $n+2$  coppie:

$$(UU), \quad (\alpha_0 \alpha_0), \quad (\beta_0 \beta'_0) \dots (\lambda_0 \lambda'_0), \quad (\mu_0 \mu'_0), \quad [2]$$

relativi a tutti gli spazii analoghi ad  $\alpha_{q-1}$ , passeremo dal punto  $U$  e dagli spazii  $\alpha$  della omografia in  $S_n$  al punto  $U$  e agli spazii  $\alpha$  omologhi dell'omografia in  $S'_n$ , e quindi dal punto  $\mu'_0$  di  $S_n$  (proiezione di  $U$  fatta da tutti gli  $\alpha$  meno uno sopra il mancante) al punto  $\mu'_0$  di  $S'_n$ ; dal punto  $\lambda'_0$  di  $S_n$  (intersezione della retta  $\mu_0 \mu'_0$  con  $\alpha_{q-2}$ ) al punto  $\lambda'_0$  di  $S'_n$  ecc. da  $\gamma'_0$  a  $\gamma'_0$ , da  $\beta'_0$  a  $\beta'_0$ ; e quindi passeremo dall'una all'altra omografia perchè l'omografia in  $S_n$  e quella in  $S'_n$  sono determinate dalle coppie  $(\alpha_0 \alpha_0), (\beta_0 \beta'_0) \dots (\mu_0 \mu'_0)$  relative a tutti gli spazii  $\alpha$ ; e dagli invarianti assoluti che sono gli stessi.

(32) Nella corrispondenza fra i due spazii  $S_n$  ed  $S'_n$  che serve a passare dall'una all'altra omografia il punto  $U$  di  $S'_n$  corrispondente del punto  $U$  di  $S_n$ , è scelto arbitrariamente in  $S'_n$ , e il gruppo degli spazii  $\alpha$  di  $S'$

---

(\*) Quando parlo degli spazii  $\alpha$  intendo gli spazii analoghi ad  $\alpha_{q-1}$  indicati nel teorema (26); e non intendo quindi di comprendervi gli spazii  $\alpha_{q-2} \dots \alpha_0$  uniti di  $\alpha_{q-1}$ .

in  $S'_n$  corrispondenti degli spazii  $\alpha$  di  $S'$  in  $S_n$  è scelto in una totalità

$$h'_1(h'_1 - 1) + \dots + h'_{p'}(h'_{p'} - 1),$$

volte infinita; e così il gruppo degli spazii  $\alpha$  di  $S''$  in  $S'_n$  corrispondenti degli spazii  $\alpha$  di  $S''$  in  $S_n$  è scelto arbitrariamente in una totalità

$$h''_1(h''_1 - 1) + \dots + h'_{p''}(h'_{p''} - 1) (*) \text{ ecc.,}$$

Non solo; ma fissati nello spazio  $S'_n$  il punto  $U$  e gli spazii  $\alpha$  corrispondenti del punto  $U$  e degli spazii  $\alpha$  omologhi in  $S_n$ , la corrispondenza che serve a passare dall'una all'altra omografia è determinata (\*\*).

(\*) Se  $h'_1 - 1 = h'_2 - 1 = \dots = h'_{p'} - 1$  allora gli spazii fondamentali in  $S'$  sono  $p'$  punti coincidenti, caso già considerato. Allora abbiamo un unico spazio  $\alpha$  che è  $S'$  stesso.

(\*\*) Osservazione I. — Date due omografie appartenenti alla stessa sottoclasse esiste, dunque, una varietà  $n + \sum h(h-1)$  volte infinita di corrispondenze proiettive (dove  $h-1$  sono le dimensioni degli spazii fondamentali distinti o a gruppi sovrapposti) colle quali si passa da un'omografia all'altra. Siano  $x_i = \sum_k c_{ki} y_k$  le relazioni che rappresentano queste corrispondenze proiettive. Siccome fissata una corrispondenza le  $c$  sono determinate meno una, che è arbitraria; le corrispondenze essendo  $n + \sum h(h-1)$  volte infinite si conclude che fra le  $c$  ve ne devono essere  $n + 1 + \sum h(h-1)$  arbitrarie. Vedremo nel § 11 che le altre sono determinate e sono combinazioni lineari delle prime. Essendo  $\sum h = n + 1$ , sarà  $n + 1 + \sum h(h-1) = \sum h^2$ .

Osservazione II. — Il minimo valore di  $n + \sum h(h-1)$  è  $n$ ; quando gli spazii fondamentali sono tutti punti; il massimo valore è  $n^2$  quando le due omografie sono omologie cioè quando vi sono due soli spazii fondamentali, un piano ed un punto. Osserviamo che in questo caso, se nelle corrispondenze proiettive colle quali si passa dalla 1.<sup>a</sup> omologia alla 2.<sup>a</sup>,  $n$  coppie di punti corrispondenti fossero arbitrarie, quelle corrispondenze costituirebbero appunto una totalità  $n^2$  volte infinita. E ciò accade infatti cioè:

Nella corrispondenza che serve a passare da un'omologia ad un'altra appartenente alla stessa sottoclasse,  $n$  coppie di punti corrispondenti sono arbitrarie, le altre due sono in conseguenza determinate.

Ed infatti, siano  $(A_1 A'_1) \dots (A_n A'_n)$   $n$  coppie arbitrarie di punti corrispondenti della 1.<sup>a</sup> omologia in  $S_n$ , ed  $A_{n+1}$  il centro; e analogamente  $(A_1 A'_1) \dots (A_n A'_n)$   $n$  coppie arbitrarie di punti corrispondenti della 2.<sup>a</sup> omologia in  $S'_n$  ed  $A_{n+1}$  il centro. Fissiamo in  $S_n$  ed  $S'_n$  un punto  $U$  in modo, che passando dai punti  $A_1 \dots A_n, A_{n+1}, U$  di  $S_n$  ai punti  $A_1 \dots A_n, A_{n+1}, U$  di  $S'_n$  si passi dal piano  $(A_1 \dots A'_n)$  di  $S_n$  al piano  $(A'_1 \dots A'_n)$  di  $S'_n$ . Questo si può sempre fare. Per esempio in  $S_n$  ed  $S'_n$  si può fissare il punto  $U$ , con quelle costruzioni armoniche colle quali si determina il punto unità dati i vertici della piramide fondamentale e il piano unitario, prendendo in luogo dei vertici di riferimento i punti  $A_1 \dots A_n$  e in luogo del piano unitario il piano  $(A'_1 \dots A'_n)$ . Allora colla corrispondenza  $(A_1 A'_1) \dots (A_n A'_n) (A_{n+1} A_{n+1}) (UU)$  passeremo dal piano  $(A'_1 \dots A'_n)$  al piano  $(A_1 \dots A_n)$  e quindi dai punti  $A'_1 \dots A'_n$  rispettivamente ai punti  $A_1 \dots A_n$  e dal piano d'omologia della 1.<sup>a</sup> al piano d'omologia della 2.<sup>a</sup>.

Perchè il piano d'omologia nell'una e nell'altra omologia passa per l'intersezione dei



di  $h'_p$  termini, e fuori della diagonale altri termini che si ottengono facendo scorrere dal basso all'alto il secondo gruppo di  $h'_1$  posti, il terzo gruppo di  $h'_2$  posti, l'ultimo gruppo di  $h'_{p-1}$  posti ed applicando dei coefficienti  $\lambda$  arbitrarii diversi da zero; e così in seguito [corrispondentemente allo spazio multiplo  $(h''_1 - 1, \dots, h''_p - 1)$  contenuto in  $S'$ ] avremo lungo la diagonale  $p'$  gruppi; il primo gruppo di  $h''_1$  termini ecc., l'ultimo di  $h''_p$  termini portando tutti il coefficiente  $r''$ , e i termini fuori della diagonale si otterranno facendo scorrere dal basso all'alto il secondo gruppo di  $h''_1$  posti ecc., l'ultimo di  $h''_{p-1}$  posti ed applicando dei coefficienti  $\lambda$  arbitrarii (\*) diversi da zero ecc.

Con questa regola di facile applicazione possiamo scrivere nella loro forma più semplice le relazioni omografiche di un'omografia qualunque, il che deve riuscire molto utile nello studio delle omografie particolari (\*\*).

### Forme ridotte delle omografie.

Nella retta.

Classe unica	[00]	$x_1 = a y_1$
		$x_2 = b y_2$
	[(00)]	$x_1 = a y_1 + \lambda_1 y_2$
		$x_2 = a y_2$

Nel piano.

1. <sup>a</sup> classe	[000]	$x_1 = a y_1$
		$x_2 = b y_2$
		$x_3 = c y_3$
	[(00)0]	$x_1 = a y_1 + \lambda_1 y_2$
		$x_2 = a y_2$
		$x_3 = b y_3$

(\*) I coefficienti  $\lambda$  dipendono dalla scelta del punto unità come si dimostra facilmente.

(\*\*) Le formole che così si ottengono le credevo nuove; poi ho saputo che il JORDAN (*Sur la résolution des équations différentielles linéaires*, Tomo LXXIII des Comptes rendus) in sostanza le ha trovate analiticamente trattando un argomento tutt'affatto diverso; esso non dà però la regola (33) che serve per ottenerle.

$$\begin{array}{lll}
1.^a \text{ classe} & [(0\ 0\ 0)] & \begin{aligned} x_1 &= a\,y_1 + \lambda_1\,y_2 \\ x_2 &= \phantom{a\,y_1} a\,y_2 + \lambda_2\,y_3 \\ x_3 &= \phantom{a\,y_1} \phantom{a\,y_2} a\,y_3 \end{aligned}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
2.^a \text{ classe} & [1\ 0] & \begin{aligned} x_1 &= a\,y_1 \\ x_2 &= \phantom{a\,y_1} a\,y_2 \\ x_3 &= \phantom{a\,y_1} \phantom{a\,y_2} b\,y_3 \end{aligned} \\
& [(1\ 0)] & \begin{aligned} x_1 &= a\,y_1 + \lambda_1\,y_3 \\ x_2 &= \phantom{a\,y_1} a\,y_2 \\ x_3 &= \phantom{a\,y_1} \phantom{a\,y_2} a\,y_3 \end{aligned}
\end{array}$$

Nello spazio.

$$\begin{array}{lll}
1.^a \text{ classe} & [0\ 0\ 0\ 0] & \begin{aligned} x_1 &= a\,y_1 \\ x_2 &= \phantom{a\,y_1} b\,y_2 \\ x_3 &= \phantom{a\,y_1} \phantom{b\,y_2} c\,y_3 \\ x_4 &= \phantom{a\,y_1} \phantom{b\,y_2} \phantom{c\,y_3} d\,y_4 \end{aligned} \\
& [(0\ 0)\ 0\ 0] & \begin{aligned} x_1 &= a\,y_1 + \lambda_1\,y_2 \\ x_2 &= \phantom{a\,y_1} a\,y_2 \\ x_3 &= \phantom{a\,y_1} \phantom{a\,y_2} b\,y_3 \\ x_4 &= \phantom{a\,y_1} \phantom{a\,y_2} \phantom{b\,y_3} c\,y_4 \end{aligned} \\
& [(0\ 0)(0\ 0)] & \begin{aligned} x_1 &= a\,y_1 + \lambda_1\,y_2 \\ x_2 &= \phantom{a\,y_1} a\,y_2 \\ x_3 &= \phantom{a\,y_1} \phantom{a\,y_2} b\,y_3 + \lambda_2\,y_4 \\ x_4 &= \phantom{a\,y_1} \phantom{a\,y_2} \phantom{b\,y_3} b\,y_4 \end{aligned} \\
& [(0\ 0\ 0)\ 0] & \begin{aligned} x_1 &= a\,y_1 + \lambda_1\,y_2 \\ x_2 &= \phantom{a\,y_1} a\,y_2 + \lambda_2\,y_3 \\ x_3 &= \phantom{a\,y_1} \phantom{a\,y_2} a\,y_3 \\ x_4 &= \phantom{a\,y_1} \phantom{a\,y_2} \phantom{a\,y_3} b\,y_4 \end{aligned}
\end{array}$$



---

1. <sup>a</sup> classe	[(0 0 0 0)]	$x_1 = a y_1 + \lambda_1 y_2$
		$x_2 = a y_2 + \lambda_2 y_3$
		$x_3 = a y_3 + \lambda_3 y_4$
		$x_4 = a y_4$
2. <sup>a</sup> classe	[1 0 0]	$x_1 = a y_1$
		$x_2 = a y_2$
		$x_3 = b y_3$
		$x_4 = c y_4$
	[(1 0) 0]	$x_1 = a y_1 + \lambda_1 y_3$
		$x_2 = a y_2$
		$x_3 = a y_3$
		$x_4 = b y_4$
	[1 (0 0)]	$x_1 = a y_1$
		$x_2 = a y_2$
		$x_3 = b y_3 + \lambda_1 y_4$
		$x_4 = b y_4$
	[(1 0 0)]	$x_1 = a y_1 + \lambda_1 y_3$
		$x_2 = a y_2$
		$x_3 = a y_3 + \lambda_2 y_4$
		$x_4 = a y_4$
3. <sup>a</sup> classe	[1 1]	$x_1 = a y_1$
		$x_2 = a y_2$
		$x_3 = b y_3$
		$x_4 = b y_4$
	[(1 1)]	$x_1 = a y_1 + \lambda_1 y_3$
		$x_2 = a y_2 + \lambda_2 y_4$
		$x_3 = a y_3$
		$x_4 = a y_4$

---

4. <sup>a</sup> classe	[2 0]	$x_1 = a y_1$ $x_2 = a y_2$ $x_3 = a y_3$ $x_4 = b y_4$
	[(2 0)]	$x_1 = a y_1 + \lambda_1 y_4$ $x_2 = a_0 y_2$ $x_3 = a y_3$ $x_4 = a y_4$

Le  $\lambda$  sono quantità arbitrarie come è noto diverse da zero.

### § 10.

Ora dedurremo dal teorema (32) quello di WEIERSTRASS sulle forme bilineari. Due omografie non degeneri fra due spazii  $S_n$  ed  $S'_n$

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i \xi'_k = 0 \quad \sum_{ik} b_{ik} x_i \xi'_k = 0, \quad [1]$$

determinano un'omografia ( $A$ ) di  $S_n$  in sè stesso, assumendo per punti corrispondenti in  $S_n$  due punti che corrispondono allo stesso punto di  $S'_n$ . Quest'omografia è rappresentata dalle relazioni:

$$\sum_i a_{ik} x_i = \sum_i b_{ik} y_i \quad (k = 1 \dots n+1).$$

Analogamente due altre omografie fra i due spazii  $S_n$  ed  $S'_n$

$$\sum_{ik} a'_{ik} X_i \Xi'_k = 0 \quad \sum_{ik} b'_{ik} X_i \Xi'_k = 0, \quad [2]$$

determinano un'omografia ( $A'$ ) di  $S_n$  in sè stesso data dalle relazioni:

$$\sum_i a'_{ik} X_i = \sum_i b'_{ik} Y_i.$$

Si vede subito che se i due determinanti

$$|a_{ik} - r b_{ik}| \quad |a'_{ik} - r b'_{ik}|,$$

hanno gli stessi divisori elementari le due omografie ( $A$ ) ed ( $A'$ ) appartengono alla stessa sottoclasse (\*).

Il teorema di WEIERSTRASS è questo:

Se con una trasformazione delle  $x$  nelle  $X$  e con una trasformazione delle  $\xi'$  nelle  $\Xi'$  con moduli diversi da zero si passa dalle funzioni bilineari

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i \xi'_k, \quad \sum_{ik} b_{ik} X_i \xi'_k,$$

rispettivamente alle funzioni bilineari

$$\sum_{ik} a'_{ik} X_i \Xi'_k, \quad \sum_{ik} b'_{ik} X_i \Xi'_k,$$

i due determinanti

$$|a_{ik} - r b_{ik}| \quad |\alpha'_{ik} - r b'_{ik}|,$$

hanno gli stessi divisori elementari; e viceversa.

Il teorema diretto è subito dimostrato; la dimostrazione del teorema inverso fu data da WEIERSTRASS ricorrendo a sviluppi in serie; qui dedurremo questo teorema inverso, completandolo, dal teorema (32).

(\*) Le relazioni che legano gli esponenti dei divisori elementari e le dimensioni degli spazii fondamentali si trovano facilmente col teorema (15).

Alla radice  $r'$  del determinante  $D(r)=0$  di un'omografia qualunque corrisponda uno spazio fondamentale multiplo  $(h_1-1, \dots, h_p-1)$ . L'omografia si può considerare come il limite di un'omografia generale nella quale in luogo dello spazio multiplo  $(h_1-1, \dots, h_p-1)$  si hanno  $p$  spazii fondamentali semplici rispettivamente ad  $h_1-1, \dots, h_p-1$  dimensioni, corrispondenti a certe radici  $a_1 \dots a_p$ . Sarà  $a_1$  radice  $h_1^{esima}$  del determinante che tien luogo nell'omografia generale di  $D(r)$ , sarà radice  $h_1-1^{esima}$  dei minori di ordine  $n$ ,  $h_1-2^{esima}$  dei minori di ordine  $n-1$  ecc.; e così  $a_2$  sarà radice  $h_2^{esima}$  ecc. Quando l'omografia generale tende alla data, le radici  $a_1 \dots a_p$  tendono ad  $r'$ ; per cui nell'omografia data,  $r'$  sarà radice  $h_1 + \dots + h_p^{esima}$  di  $D(r)=0$ ,  $h_1-1 + \dots + h_p-1^{esima}$  dei minori di ordine  $n$ ,  $h_1-2 + \dots + h_p-2^{esima}$  dei minori di ordine  $n-1$  ecc.

Facendo le differenze successive per trovare gli esponenti  $e$  dei divisori elementari, otteniamo  $p$  gruppi di numeri  $e$ :

$$\frac{p \dots p}{h_p}, \quad \frac{p-1 \dots p-1}{h_{p-1} - h_p}, \quad \frac{p-2 \dots p-2}{h_{p-2} - h_{p-1}} \dots \frac{1 \dots 1}{h_1 - h_2}.$$

Il 1.° gruppo è composto di  $h_p$  numeri  $=p$ , il 2.° di  $h_{p-1} - h_p$  numeri  $=p-1$ , il 3.° di  $h_{p-2} - h_{p-1}$  numeri  $=p-2$ , ..., l'ultimo di  $h_1 - h_2$  numeri  $=1$ ; come è indicato. Dato dunque i numeri  $h$  possiamo trovare i numeri  $e$ ; e viceversa dati i numeri  $e$ ,  $h_1$  e il numero di tutti i numeri  $e$ ,  $h_2$  è il numero di tutti i numeri  $e$  meno quelli dell'ultimo gruppo, ecc.  $h_p$  è il numero di tutti i numeri  $e$  del 1.° gruppo.

È stato implicitamente dimostrato che gli esponenti dei divisori elementari non sono crescenti.

Passiamo con una trasformazione di  $S_n$  in sè stesso

$$x_i = \sum_k \alpha_{ik} X_k, \quad (\alpha)$$

dall'omografia (A) all'omografia (A'); allora con quella trasformazione le [1] diventeranno:

$$\sum_{ik} a''_{ik} X_i \xi'_k = 0 \quad \sum_{ik} b''_{ik} X_i \xi'_k = 0. \quad [3]$$

Le [2] e le [3] rappresentano in  $S_n$  la stessa omografia (A'). Assumendo per punti corrispondenti in  $S'_n$  due punti che corrispondono l'uno per le [2] l'altro per le [3] alla stessa coppia di punti corrispondenti dell'omografia (A') avremo in  $S'_n$  un'omografia non degenera rappresentata da certe relazioni:

$$\xi'_i = \sum_k \beta_{ik} \Xi'_k, \quad (\beta)$$

dove le  $\beta_{ik}$  sono determinate a meno di un fattore di proporzionalità. Con queste trasformazioni passeremo dalle [3] alle

$$\sum_{ik} a'''_{ik} X_i \Xi'_k = 0 \quad \sum_{ik} b'''_{ik} X_i \Xi'_k = 0. \quad [4]$$

Ora assunto un punto di  $S'_n$ ,

$$\sum_{ik} a'_{ik} X_i \Xi'_k = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{ik} a'''_{ik} X_i \Xi'_k = 0,$$

danno lo stesso punto corrispondente di  $S_n$ ;

$$\sum_{ik} a'_{ik} X_i \Xi'_k \quad \text{e} \quad \sum_{ik} a'''_{ik} X_i \Xi'_k,$$

potranno differire quindi al più per un fattore  $\rho$ . Analogamente

$$\sum_{ik} b'_{ik} X_i \Xi'_k \quad \text{e} \quad \sum_{ik} b'''_{ik} X_i \Xi'_k,$$

potranno differire al più per un fattore che sarà lo stesso  $\rho$ ; dovendo i due determinanti

$$|a'_{ik} - \rho b'_{ik}| \quad \text{e} \quad |a'''_{ik} - \rho b'''_{ik}|,$$

avere gli stessi divisori elementari. Determiniamo il fattore di proporzionalità contenuto nelle  $\beta_{ik}$  in modo che

$$\sum a'_{ik} X_i \Xi'_k \quad \text{e} \quad \sum b'_{ik} X_i \Xi'_k,$$

siano rispettivamente identiche a

$$\sum a'''_{ik} X_i \Xi'_k \quad \text{e} \quad \sum b'''_{ik} X_i \Xi'_k.$$

Così colle trasformazioni  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  passeremo delle [1] alle [2]; ma fra le  $\alpha_{ik}$  ve ne sono  $n + 1 + \sum h(h-1)$  (\*) arbitrarie, dunque:

(34) *Non solo colle sostituzioni  $(\alpha)$   $(\beta)$  passiamo dalle funzioni bilineari  $\sum \alpha_{ik} x_i \xi'_k$   $\sum b_{ik} x_i \xi'_k$  alle funzioni bilineari  $\sum a'_{ik} X_i \Xi'_k$   $\sum b'_{ik} X_i \Xi'_k$  quando i due determinanti  $|a_{ik} - r b_{ik}|$  e  $|a'_{ik} - r b'_{ik}|$  hanno gli stessi divisori elementari, ma nell'una o nell'altra di queste sostituzioni sono completamente arbitrarii  $n + 1 + \sum h(h-1) = \sum h^2$  coefficienti, gli altri sono in conseguenza determinati.*

E questo è il completamento del teorema di WEIERSTRASS.

## § 11.

Abbiamo visto che date due omografie, appartenenti alla stessa sottoclasse, possiamo passare geometricamente dall'una all'altra; ora vediamo come si possono determinare i coefficienti di questa omografia. Siano

$$x_i = \sum_k a_{ki} y_k \quad [1]$$

$$x'_i = \sum_k b_{ki} y'_k \quad (i = 1 \dots n + 1),$$

le omografie date appartenenti alla stessa sottoclasse; e

$$x_i = \sum_k c_{ki} x'_k, \quad [3]$$

l'omografia per cui si passa dall'una all'altra. Sostituendo la [1] diventerà:

$$\sum_k c_{ki} x'_k = \sum_k a_{ki} \sum_p c_{pk} y'_p.$$

Moltiplichiamo per  $\frac{C_{qi}}{C}$  (dove  $C_{qi}$  è il complemento algebrico del determinante  $C = |c_{ki}|$ ) e addizioniamo rispetto ad  $i$

$$\sum_k x'_k \sum_i c_{ki} \frac{C_{qi}}{C} = \sum_i \frac{C_{qi}}{C} \sum_k a_{ki} \sum_p c_{pk} y'_p,$$

ovvero:

$$x'_q = \sum_p y'_p \sum_k \sum_i a_{ki} c_{pk} \frac{C_{qi}}{C};$$

---

(\*) Le  $h-1$  sono le dimensioni degli spazii fondamentali distinti o a gruppi sovrapposti dell'omografia  $(A)$  od  $(A')$ . Veggasi l'osservazione 1.<sup>a</sup> della nota a pag. 149.

poichè le [3] trasformano le [1] nelle [2] sarà:

$$b_{pq} = \sum_k \sum_i a_{ki} c_{pk} \frac{C_{qi}}{C}.$$

Moltiplicando per  $c_{qr}$  ed addizionando rispetto a  $q$ :

$$\sum_q b_{pq} c_{qr} = \sum_k \sum_i a_{ki} c_{pk} \sum_q c_{qr} \frac{C_{qi}}{C},$$

ovvero:

$$\sum_q b_{pq} c_{qr} = \sum_k c_{pk} a_{kr};$$

e mettendo la sommatoria rispetto a  $q$  anche nel 2.° membro:

$$\sum_q b_{pq} c_{qr} = \sum_q c_{pq} a_{qr}. \quad [4]$$

Dando a  $p$  e ad  $r$  tutti i valori possibili otteniamo  $(n+1)^2$  equazioni fra le  $c$ . Cioè:

Se le omografie [1] e [2] appartengono alla stessa sottoclasse i coefficienti delle sostituzioni per le quali si passa dalla prima alla seconda soddisfano alle  $(n+1)^2$  equazioni [4]. Viceversa; se

$$\begin{aligned} c_{11} \dots c_{n+1,1} \\ c_{1n+1} \dots c_{n+1,n+1}, \end{aligned}$$

soddisfano alle [4] e il loro determinante è diverso da zero, colle sostituzioni [3] si passa dall'omografia [1] alla omografia [2]. Infatti per mezzo delle [3] le [1] diventano

$$x'_q = \sum_p y'_p \sum_k \sum_i a_{ki} c_{pk} \frac{C_{qi}}{C},$$

ovvero:

$$x'_q = \sum_p y'_p \sum_i \frac{C_{qi}}{C} \sum_k c_{pk} a_{ki},$$

e per le [4]:

$$x'_q = \sum_p y'_p \sum_i \frac{C_{qi}}{C} \sum_k b_{pk} c_{ki},$$

da cui:

$$x'_q = \sum_p y'_p \sum_k b_{pk} \sum_i c_{ki} \frac{C_{qi}}{C},$$

e finalmente

$$x'_q = \sum_p b_{pq} y'_p,$$

c. d. d.

Esistendo (32) una varietà  $n + 1 + \sum h(h - 1)$  volte infinita di sostituzioni [3] per le quali si passa dall'omografia [1] alla [2]; fra le [4] vi devono essere  $n + 1 + \sum h(h - 1)$  equazioni che sono conseguenza delle altre; dei coefficienti  $c$ ,  $n + 1 + \sum h(h - 1)$  sono arbitrarii, gli altri sono combinazioni lineari dei primi.

(35) *Se due omografie appartengono alla stessa sottoclasse, nelle sostituzioni per le quali si passa dall'una all'altra vi sono  $n + 1 + \sum h(h - 1)$  coefficienti arbitrarii, gli altri sono combinazioni lineari dei primi.*

Le equazioni [4] danno anche quest'altro teorema:

(36) *Se due determinanti  $|b_{pq}|$  ed  $|a_{qr}|$  hanno la stessa caratteristica esiste un determinante  $|c_{qr}|$  [nel quale  $n + 1 + \sum h(h - 1)$  elementi sono arbitrarii e gli altri ecc.] tale che moltiplicando  $|b_{pq}|$  per  $|c_{qr}|$  colonne per righe, e  $|c_{qr}|$  per  $|a_{qr}|$  colonne per righe si ottengono due determinanti identici elemento per elemento. E viceversa.*