Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

С. Каустон, Л. Ю. Вострикова, О свойстве непрерывности цены опционов в экспоненциальных моделях связанных с процессами Леви, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 4, 645–670

DOI: 10.4213/tvp3533

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.224.39.74
6 мая 2024 г., 09:52:29

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том 54 И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 4
2009

© 2009 г. *КАУСТОН С.*[*], *ВОСТРИКОВА Л. В.*[*]

О СВОЙСТВЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ЦЕНЫ ОПЦИОНОВ В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ, СВЯЗАННЫХ С ПРОЦЕССАМИ ЛЕВИ

Для сходящейся последовательности экспоненциальных моделей Леви приводятся условия, при которых сходится соответствующая последовательность цен опционов. Изучается поведение цен и в отсутствие такой сходимости. Затем рассматриваются два частных случая — когда мартингальная мера выбирается из соображений минимизации энтропии и когда она доставляет минимум для интегралов Хеллингера.

Ключевые слова и фразы: расчет цены опционов, процессы Леви, неполные рынки, минимальные меры.

1. Введение и основные результаты. Одной из общеизвестных моделей для цен акций является геометрическое броуновское движение, или так называемая модель Блэка–Шоулса. Несмотря на простоту, модель Блэка–Шоулса имеет ряд недостатков. Один из них заключается в том, что она обладает весьма ограничительными возможностями для моделирования закона распределения логарифмов приращений цен, имеющих тяжелые хвосты и большую массу в нуле по сравнению с нормальным распределением (см. [13]). Поэтому были предложены другие модели, в частности экспоненциальные модели Леви, позволяющие устранить указанные недостатки.

В основу таких моделей положена идея замены времени. Действительно, развитие экономических процессов протекает по своему «экономическому» времени, отличному от нашего обычного времени и являющемуся случайным процессом $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$. Примером таких моделей являются гиперболические модели, которые были введены О. Е. Барндорфом-Нильсеном [2], задолго до их использования в финансовой математике, в связи с моделированием формирования песчаных отложений. В обобщенной гиперболической модели $\mathrm{GH}(\lambda,\alpha,\beta,\delta,\mu)$ (см. [13], [10], [30]) логарифм приращений цен акций описывается процессом

$$X_t = \mu t + \beta\tau_t + W_{\tau_t},$$

[*]LAREMA, Département de Mathématiques, Université d'Angers, 2, Bd Lavoisier — 49045, Angers Cedex 01; e-mail: suzanne.cawston@univ-angers.fr, lioudmila.vostrikova@univ-angers.fr

где μ — параметр сноса, W — броуновское движение, а $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$ — независимый от броуновского движения обобщенный обратный гауссовский процесс $\mathrm{GIG}(\lambda, \delta, \sqrt{\lambda^2 - \beta^2})$ (см. [3]). Как и в случае модели Блэка–Шоулса, процесс X является процессом Леви, т.е. имеет независимые стационарные приращения. Однако траектории X, в отличие от модели Блэка–Шоулса, не являются непрерывными. Более того, можно показать, что непрерывная мартингальная компонента процесса X равна нулю и что X имеет бесконечное число скачков и бесконечную вариацию на конечных временных интервалах.

Главное преимущество такого широкого класса распределений, как GH, заключается в их возможности прекрасно описывать законы распределений логарифмов приращений цен как при частых, так и при редких по времени наблюдениях (см. [14]). Более того, в [11] показано, что некоторые модели, в частности, модель Блэка–Шоулса, могут быть получены из GH предельным переходом. В этой статье мы рассматриваем в качестве примера модель NIG, являющуюся частным случаем модели GH с $\lambda = -1/2$. Указанный тип модели сохраняет богатые возможности моделирования одномерных распределений и в то же самое время является единственным из класса GH распределением, для которого форма распределения X_t одинакова для всех t, а это важно для вычислений по методу Монте-Карло. Мера Леви процесса $\mathrm{NIG}(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ имеет относительно простой вид:

$$\nu(dx) = \frac{\alpha\delta}{\pi}\,\frac{e^{\beta x}}{|x|}K_1(\alpha|x|)\,dx, \tag{1.1}$$

где α, β, δ являются константами, а K_1 — модифицированная функция Бесселя третьего рода с параметром 1.

Несмотря на ряд преимуществ, GH-модели имеют и недостатки, например, бесконечную вариацию, и поэтому не всегда подходят для моделирования финансовых данных (см. [6]). Одной из моделей, позволяющей получать процессы как с конечной, так и с бесконечной вариацией, является процесс CGMY. Процесс CGMY также является процессом Леви с нулевой непрерывной мартингальной компонентой и мерой Леви

$$\nu(dx) = \frac{C}{|x|^{Y+1}}\left(e^{-G|x|}I_{\{x<0\}} + e^{-M|x|}I_{\{x>0\}}\right)dx, \tag{1.2}$$

где C, G, M, Y — параметры. Указанная выше модель была получена как обобщение модели «variance gamma» (см. [28]), соответствующей случаю $Y = 1$ и получаемой из броуновского движения независимой заменой времени, порожденной гамма-процессом.

Все рассмотренные модели записываются в виде экспоненты от процесса Леви и зависят от некоторого количества параметров. Так, например, в модели Блэка–Шоулса неизвестны снос μ и волатильность σ, в

модели CGMY неизвестны четыре параметра, в гиперболических моделях GH неизвестны пять параметров. На практике обычно такие модели калибруются в предположении, что параметры не меняются в течение некоторого интервала времени. Но поскольку информация о ценах поступает непрерывно, важно рассмотреть так называемый динамический подход, в котором имеется последовательность значений параметров и, соответственно, отвечающая им последовательность процессов. По-видимому, первым рассмотрел подобную ситуацию А. Н. Ширяев (см. [35, гл. 6, § 3d]), изучая сходимость последовательности моделей Кокса–Росса–Рубинштейна к модели Блэка–Шоулса.

Предположим, что $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathbb{F}^n, P^n)_{n\geqslant 1}$ — последовательность стохастических базисов с непрерывной справа, пополненной по мере P^n фильтрацией $\mathbb{F}^n = (\mathscr{F}^n_t)_{t\geqslant 0}$, где $\mathscr{F}^n = \bigvee_{t\geqslant 0} \mathscr{F}^n_t$. Предположим, что $(X^n)_{n\geqslant 1}$ — последовательность процессов Леви с характеристиками (b_n, c_n, ν_n) соответственно (см. [5], [32]), где b_n — коэффициент сноса, c_n — коэффициент диффузии, а ν_n обозначает меру Леви, удовлетворяющую обычным условиям

$$\int_{\mathbf{R}^*} (x^2 \wedge 1)\, \nu_n(dx) < \infty, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}\backslash\{0\}$. Напомним, что характеристическая функция X^n_t для $t \geqslant 0$ и $u \in \mathbf{R}$ равна

$$\phi^n_t(u) = E_{P^n} \exp(iuX^n_t) = \exp(t\psi_n(iu)),$$

где E_{P^n} — математическое ожидание по мере P^n, $\psi_n(u)$ — характеристическая экспонента,

$$\psi_n(u) = b_n u + \frac{c_n}{2}\, u^2 + \int_{\mathbf{R}^*} (e^{ux} - 1 - uh(x))\, \nu_n(dx),$$

а h обозначает функцию урезания.

Будем считать, что в нашем распоряжении имеется акция, цена которой имеет вид

$$S^n_t = S^n_0 \exp\{X^n_t\}, \tag{1.4}$$

и банковский счет

$$B^n_t = B^n_0 \exp\{r_n t\}, \tag{1.5}$$

где r_n — процентная ставка, $r_n \geqslant 0$. Рассмотрим также опцион с временем исполнения $T > 0$. Пусть g обозначает функцию платежа, которая предполагается непрерывной в пространстве Скорохода $D[0, T]$ функцией, удовлетворяющей условию

$$g(Y) \leqslant A \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |Y_t| + B \tag{1.6}$$

с положительными константами A, B, где $Y \in D[0,T]$. Для европейских опционов колл, как известно, $g(Y) = (Y_T - K)^+$, для азиатских опционов $g(Y) = (Y_T - \frac{1}{T}\int_0^T Y_t\,dt)^+$, для опционов «lookback» $g(Y) = (Y_T - \alpha \inf_{0\leqslant t\leqslant T} Y_t)^+$ с $\alpha \geqslant 1$, а это означает, что все они, так же как и соответствующие им функции для опционов пут, удовлетворяют условию (1.6).

Предположим, что множество мартингальных мер для каждого $n \geqslant 1$ непусто и мы выбрали по некоторым соображениям одну из них: Q^n. Выбор мартингальной меры в случае, когда она не единственна, является одним из важных этапов определения цены опциона. В литературе предлагается несколько подходов, например, с помощью минимизации энтропии [18], [29], [15], или минимизации расстояния Хеллингера [7], [8], или же минимизации интегралов Хеллингера порядка q [24]. С экономической точки зрения, такие подходы объясняются связью задачи минимизации с двойственной ей задачей максимизации определенной функции полезности (ср. [27], [4], [17], [20], [25]) или же с минимизацией среднеквадратического риска [16], [33], [34].

Предположим, что эквивалентная мартингальная мера выбрана и равна Q^n. Тогда цена опциона колл/пут равна

$$\mathbb{C}_T^n = E_{Q^n} g(\widetilde{S}^n),$$

где $\widetilde{S}_t^n = S_t^n / B_t^n$ — дисконтированная цена акции.

Предположим, что по мере поступления информации рассматриваемая модель приближается в некотором смысле к предельной модели. Предположим, что предельная модель связана с процессом Леви $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$, заданным на каноническом базисе $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ и имеющем характеристики (b, c, ν). Предельная модель также представлена двумя активами:

$$S_t = S_0 \exp\{X_t\}, \tag{1.7}$$

$$B_t = B_0 \exp\{rt\}, \tag{1.8}$$

где r — процентная ставка, $r \geqslant 0$. Возникает несколько естественных вопросов. Например, при каких условиях существует эквивалентная мартингальная мера для предельной модели? Предположим для простоты, что она существует и равна Q. Тогда положим

$$\mathbb{C}_T = E_Q g(\widetilde{S}),$$

где $\widetilde{S}_t = S_t / B_t$ — дисконтированная цена акции. Следующий естественный вопрос заключается в нахождении условий, при которых цены опционов сходятся:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{C}_T^n = \mathbb{C}_T. \tag{1.9}$$

В настоящей работе даются достаточные условия, обеспечивающие существование $\lim_{n\to\infty} \mathbb{C}_T^n$, а также существование эквивалентной мартингальной меры для предельной модели и выполнение свойства (1.9). Приводятся также примеры, когда (1.9) не выполняется.

Обозначим через (β^n, Y^n) и (β, Y) параметры, возникающие в теореме Гирсанова и получающиеся при переходе от мер P^n и P к эквивалентным мерам Q^n и Q соответственно. В дальнейшем мы будем называть указанные параметры параметрами Гирсанова, отвечающими замене мер P^n и P на Q^n и Q соответственно. Будем предполагать, что по мерам Q^n и Q процессы X^n и X остаются процессами Леви. Такое предположение не является слишком ограничительным в силу результатов работ [12], [23], в которых показано, что, используя меры такого типа, можно, в стандартных ситуациях, покрыть «безарбитражный» интервал цен опциона. Поскольку меры Q^n и Q мартингальные, то (ср. [22])

$$\int_{x>1} (e^x - 1) Y^n(x)\, \nu_n(dx) < \infty, \quad \int_{x>1} (e^x - 1) Y(x)\, \nu(dx) < \infty.$$

Теорема 1. *Предположим, что функция платежа g удовлетворяет условию* (1.6). *Предположим, что*

1) $\lim_{n\to\infty} S_0^n = S_0$,

2) $\lim_{n\to\infty}(c_n + \int_{\mathbf{R}^*} h^2(x) Y^n(x)\, \nu_n(dx)) = c + \int_{\mathbf{R}^*} h^2(x) Y(x)\, \nu(dx)$,

3) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^*} (e^x - 1) f(x) Y^n(x)\, \nu_n(dx) = \int_{\mathbf{R}^*} (e^x - 1) f(x) Y(x)\, \nu(dx)$

для всех непрерывных ограниченных функций, удовлетворяющих условию $\lim_{x\to 0} f(x)/x = 0$. *Тогда имеем сходимость цен опционов* (1.9).

З а м е ч а н и е 1. Основным моментом в доказательстве теоремы 1 является установление равномерной интегрируемости семейства $\sup_{0\leqslant t\leqslant T} S_t^n$. Доказательство этого факта основано на разложении Винера–Хопфа и дано в лемме 3 (см. п. 2).

Предположим теперь, что у нас имеется дополнительная информация, заключающаяся в том, что

$$\mathscr{L}(S^n \,|\, P^n) \to \mathscr{L}(S \,|\, P). \tag{1.10}$$

Возникает естественный вопрос: какие условия нужно добавить к (1.10), чтобы обеспечить сходимость

$$\mathscr{L}(S^n \,|\, Q^n) \to \mathscr{L}(S \,|\, P^*), \tag{1.11}$$

где Q^n — мартингальная мера и P^* — некоторая эквивалентная P мера. Общий ответ на этот вопрос известен (см. [22]) и связан со сходимостью

$$\mathscr{L}((Z^n, S^n) \,|\, P^n) \to \mathscr{L}((Z, S) \,|\, P), \tag{1.12}$$

где Z^n и Z обозначают производные Радона–Никодима мер Q^n, P^n и P^*, P соответственно. Однако в случае процессов Леви проще установить (1.11), проверяя непосредственно сходимость характеристик.

Будем предполагать, что параметры (β^n, Y^n) и (β, Y), возникающие в теореме Гирсанова и полученные при переходе от мер P^n, P к мерам Q^n, P^* соответственно, обладают следующим свойством: в окрестности точки $x = 0$

$$Y^n(x) = 1 + \beta^n x + o(x), \tag{1.13}$$

$$Y(x) = 1 + \beta x + o(x), \tag{1.14}$$

где $o(x)$ в (1.13) равномерно по n.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия* (1.10), (1.13), (1.14). *Предположим также, что*

i) $\lim_{n\to\infty} \beta^n = \beta$,

ii) *для всех* $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geqslant\epsilon} Y^n(x)\,\nu_n(dx) = \int_{|x|\geqslant\epsilon} Y(x)\,\nu(dx).$$

Тогда для всех ограниченных функций платежа g *имеем*:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{C}_T^n = E_{P^*} g(S),$$

где P^* *— абсолютно непрерывная мера, отвечающая параметрам Гирсанова* (β, Y). *Более того,* P^* *является эквивалентной мартингальной мерой для* S *тогда и только тогда, когда выполнены условия* $Y > 0$ (ν*-п.н.*) *и*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x\geqslant 1} e^x Y^n(x)\,\nu_n(dx) = \int_{x\geqslant 1} e^x Y(x)\,\nu(dx).$$

При выполнении этих дополнительных условий цены опционов для всех g, *удовлетворяющих условию* (1.6), *сходятся.*

В дальнейшем мы рассмотрим два частных случая выбора эквивалентных мартингальных мер — связанных с минимизацией энтропии и минимизацией интегралов Хеллингера. Пусть Q и P — две эквивалентные вероятностные меры, тогда энтропия меры Q по отношению к мере P (или же информация Кульбака–Лейблера меры Q по отношению к P) имеет вид

$$H(Q\,|\,P) = E_Q \ln \frac{dQ}{dP} = E_P\left(\frac{dQ}{dP} \ln \frac{dQ}{dP}\right).$$

Напомним, что мартингальной мерой с минимальной энтропией называется такая мера P^{ME}, что процесс $(\exp(-rt)S_t)_{t\geqslant 0}$ по мере P^{ME} является мартингалом и выполнено следующее свойство: для всех эквивалентных мартингальных мер Q

$$H(P^{\mathrm{ME}}\,|\,P) \leqslant H(Q\,|\,P).$$

При этом оказывается (см. [26], [21]), что в случае процессов Леви мера P^{ME} есть не что иное, как мера Эшера для процесса $(\widehat{X}_t)_{t\geqslant 0}$ такого, что

$$S_t = S_0 \mathscr{E}(\widehat{X})_t,$$

где $\mathscr{E}(\cdot)$ — экспонента Долеан-Дэд. Хорошо известно, что процесс $\widehat{X}$ является процессом Леви и его характеристическая экспонента задается формулой (см. [18])

$$\widehat{\psi}(u) = \left(b + \frac{1}{2}\,c\right)u + c\,\frac{u^2}{2} + \int_{\mathbf{R}^*} [e^{u(e^x-1)} - 1 - uh(x)]\,\nu(dx).$$

Пусть теперь

$$D = \{u \in \mathbf{R}\colon E_P \exp(u\widehat{X}_1) < \infty\}.$$

Введем меру Эшера P^u, отвечающую процессу $\widehat{X}$ и некоторому $u \in D$:

$$\frac{dP_t^u}{dP_t} = \frac{\exp(u\widehat{X}_t)}{E_P \exp(u\widehat{X}_t)},$$

где P_t^u и P_t обозначают сужения мер P^u и P на σ-алгебру $\mathscr{F}_t$, $t \geqslant 0$. Для того чтобы параметр $u = \theta$ соответствовал эквивалентной мартингальной мере, θ должно быть решением следующего уравнения:

$$b + \left(\frac{1}{2} + \theta\right)c + \int_{\mathbf{R}^*} [(e^x - 1)e^{\theta(e^x-1)} - h(x)]\,\nu(dx) = r. \tag{1.15}$$

Аналогичные результаты могут быть получены и для меры $Q^n = (P^n)^{\mathrm{ME}}$. А именно, параметр соответствующей меры Эшера является решением уравнения

$$b_n + \left(\frac{1}{2} + \theta\right)c_n + \int_{\mathbf{R}^*} [(e^x - 1)e^{\theta(e^x-1)} - h(x)]\,\nu_n(dx) = r_n. \tag{1.16}$$

Мы будем предполагать, что при каждом $n \geqslant 1$ уравнение (1.16) имеет решение. Это означает (см. лемму 5 в п. 3), что мы исключаем из нашего рассмотрения монотонные процессы Леви. В работе [26] показано, что в случае существования решения, упомянутое решение является единственным. Однако, как мы увидим позже, эти предположения еще не обеспечивают существование решения уравнения (1.15). Обозначим

$$U = \left\{u \in \mathbf{R}\colon \varlimsup_{n\to\infty} \int_{x>1} e^{u(e^x-1)}\,\nu_n(dx) < \infty\right\}. \tag{1.17}$$

Множество U представляет собой множество, где рассматриваемые интегралы равномерно ограничены начиная с некоторого индекса, и является открытым $]-\infty, \alpha[$ или замкнутым $]-\infty, \alpha]$ интервалом, где $\alpha = \sup\{u\colon u \in U\}$.

Теорема 3. *Предположим, что функция платежа g удовлетворяет условию* (1.6). *Предположим также, что*

1) $\lim_{n\to\infty} S_0^n = S_0$,

2) $\lim_{n\to\infty} b_n - r_n = b - r$,

3) $\lim_{n\to\infty}(c_n + \int_{\mathbf{R}^*} h^2(x)\,\nu_n(dx)) = c + \int_{\mathbf{R}^*} h^2(x)\,\nu(dx)$,

4) $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^*} f(x)\,\nu_n(dx) = \int_{\mathbf{R}^*} f(x)\,\nu(dx)$ *для всех непрерывных ограниченных функций таких, что* $\lim_{x\to 0} f(x)/x^2 = 0$.

Тогда, если $\lim_{u\to\alpha-}\widehat{\psi}'(u) > 0$, *то существует эквивалентная мартингальная мера с минимальной энтропией и имеет место сходимость цен опционов* (1.9). *Если* $\lim_{u\to\alpha-}\widehat{\psi}'(u) = 0$, *то существует эквивалентная мартингальная мера с минимальной энтропией и имеет место сходимость цен опционов* (1.9), *но по некоторой подпоследовательности* n'. *Если* $\lim_{u\to\alpha-}\widehat{\psi}'(u) < 0$, *то существование эквивалентной мартингальной меры не гарантировано, но для всех ограниченных функций платежа g имеем*:

$$\lim_{n'\to\infty} \mathbb{C}_T^{n'} = E_{P^*} g(S),$$

где n' — некоторая подпоследовательность, а P^* эквивалентная мера с параметрами Гирсанова $(\alpha, \exp(\alpha(e^x - 1)))$, *не являющаяся мартингальной.*

З а м е ч а н и е 2. В случае, когда $\lim_{u\to\alpha-}\widehat{\psi}'(u) < 0$, мартингальная мера с минимальной энтропией может существовать (пример 1 в п. 3) или не существовать (пример 2 в п. 3). Но даже в случае, когда эквивалентная мартингальная мера с минимальной энтропией существует, предел цен опционов $\lim_{n\to\infty}\mathbb{C}_T^n$, вообще говоря, отличается от $\mathbb{C}_T$. Более того, используя факторизацию Винера–Хопфа можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} E_Q^n \sup_{0\leqslant t\leqslant T} S_t^n \neq E_{P^*} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} S_t,$$

так как $E_{P^*} S_T \neq 1$. Это означает, что семейство случайных величин $(\sup_{0\leqslant t\leqslant T} S_t^n)_{n\geqslant 1}$, так же как и семейство (S_T^n), не является равномерно интегрируемым. А это также означает, что аналогичный результат для неограниченных функций платежа g, вообще говоря, неверен. Однако в некоторых частных случаях, например, для европейского опциона колл, удается не только доказать сходимость цен, но и получить явное выражение для предела:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{C}_T^n = \lim_{n\to\infty} E_{Q^n}(S_T^n - K)^+ = E_{P^*}(S_T - K)^+ + 1 - E_{P^*} S_T.$$

Рассмотрим теперь эквивалентные мартингальные меры, связанные с f^q-мартингальными мерами, введенными в работе [24]. Подобные меры являются частным случаем мер, минимизирующих так называемую f-расходимость Чисара [9]. Пусть f — выпуклая функция на $\mathbf{R}^{+,*}$ и $Q \ll P$

две вероятностные меры на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$. Тогда f-расходимость меры Q по отношению к мере P определяется по формуле:

$$f(Q \mid P) = E_P f\left(\frac{dQ}{dP}\right).$$

Легко заметить, что если $f(x) = x \ln x$, то мы получим по этой формуле информацию Кульбака–Лейблера или энтропию Q по отношению к P. Если $f(x) = |x-1|$, то получается расстояние по вариации между Q и P, функция $f(x) = (1-x)^2$ дает квадратическую вариацию, а если $f(x) = (1-\sqrt{x})^2$, то получаем расстояние Хеллингера, и наконец, если

$$f(x) = \begin{cases} -x^q, & \text{если } 0 < q < 1, \\ x^q, & \text{если } q > 1 \text{ или } q < 0, \end{cases}$$

то получаются, с точностью до знака, интегралы Хеллингера, отвечающие мерам Q и P. Эквивалентные мартингальные меры, минимизирующие интегралы Хеллингера, изучались в [24] для $q > 1$ и $q < 0$ и в [8] для $0 < q < 1$.

Если исключить монотонные процессы Леви и рассмотреть множество абсолютно-непрерывных мартингальных мер, то f^q-мартингальная мера Q^n всегда существует и параметры Гирсанова (β^n, Y^n) этой меры являются решением соответствующей проблемы минимизации (см. лемму 9). Более того, Q^n будет эквивалентна P^n тогда и только тогда, когда $Y^n > 0$ ν_n-п.н. В дальнейшем мы будем предполагать это условие выполненным. Для простоты изложения тривиальный случай, когда сама физическая мера P^n является мартингальной мерой, из нашего рассмотрения исключается.

Будем также предполагать, что X не является монотонным процессом Леви и что $\nu(\{m\}) = \nu(\{M\}) = 0$, где m и M — инфимум и супремум $\operatorname{supp}(\nu)$. Введем в рассмотрение интегралы

$$I_n(q) = \int_{x \geqslant 1} e^{qx/(q-1)}\, \nu_n(dx)$$

и предположим, что они конечны. Аналогичным образом определяется и $I(q)$ с заменой ν_n на ν, однако $I(q)$ не предполагается сходящимся.

Теорема 4. *Пусть $q > 1$. Предположим, что функция платежа g удовлетворяет условию* (1.6) *и что условия* 1)–4) *теоремы* 3 *выполнены.*

Тогда, если $\lim_{n\to+\infty} I_n(q) = I(q) < +\infty$, то предельная модель имеет f^q-минимальную мартингальную меру и цены опционов сходятся:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{C}_T^n = \mathbb{C}_T. \tag{1.18}$$

В случае, когда вышеупомянутое условие не выполнено, f^q-минимальная мартингальная мера может как существовать, так и не существовать.

Если $\lim_{n\to+\infty} I_n(q) = I(q) + a$, $a > 0$, *и* g *ограничена, то*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{C}_T^n = E_{P^*} g(S), \tag{1.19}$$

где P^* *— эквивалентная* P *мера, не являющаяся мартингальной мерой для* S.

Если $\lim_{n\to+\infty} I_n(q) = +\infty$ *и* g *ограничена, то*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{C}_T^n = E_P g(S), \tag{1.20}$$

где P *— физическая мера предельной модели.*

З а м е ч а н и е 3. Если отказаться от условия $\nu(\{m\}) = \nu(\{M\}) = 0$, то мера Q, отвечающая параметрам Гирсанова (β, Y), будет мартингальной мерой. Однако в силу того, что условие $Y > 0$ ν-п.н. может нарушаться, мера Q может оказаться лишь абсолютно-непрерывной по отношению к P.

2. Доказательство теорем 1 и 2. Доказательство теоремы 1 проводится в несколько этапов. Будем предполагать для простоты изложения и не теряя общности, что $r_n = r = 0$. Такое предположение эквивалентно введению процессов $\widetilde{X}^n$ и $\widetilde{X}$ с $\widetilde{X}_t^n = X_t^n - r_n t$ и $\widetilde{X}_t = X_t - rt$, $t \geqslant 0$, и замене b_n и b на $\widetilde{b}_n = b_n - r_n$ и $\widetilde{b} = b - r$.

Лемма 1. *Предположим, что* Q^n *и* Q *— эквивалентные* (P^n *и* P *соответственно*) *мартингальные меры, минимизирующие энтропию. Обозначим* (β^n, Y^n) *и* (β, Y) *параметры, возникающие в теореме Гирсанова при соответствующей замене мер. Если выполнены условия теоремы* 1, *то*

$$\mathscr{L}(X^n \,|\, Q^n) \to \mathscr{L}(X \,|\, Q). \tag{2.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы будем использовать теорему VII.2.9 в [22], дающую необходимые и достаточные условия для (2.21) в терминах характеристик.

Для этого заметим, что, согласно теореме Гирсанова (см. [22, теорема III.3.24]), характеристики X^n по мере Q^n будут иметь вид

$$\begin{cases} b^{Q^n} = b_n + \beta^n c_n + \displaystyle\int_{\mathbf{R}^*} h(x)\,(Y^n(x) - 1)\,\nu_n(dx), \\ c^{Q_n} = c_n, \\ \nu^{Q_n}(dx) = Y^n(x)\,\nu_n(dx), \end{cases} \tag{2.22}$$

где $\beta^n \in \mathbf{R}$ и Y^n — положительная борелевская функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{\mathbf{R}^*} |h(x)(Y^n(x)-1)|\,\nu_n(dx) < +\infty.$$

Константа β^n не является произвольной, так как процесс S^n является мартингалом по мере Q^n. Как известно, для того, чтобы процесс S^n был мартингалом, необходимо и достаточно, чтобы (ср. [22]) выполнялось равенство

$$b_n + \beta^n c_n + \frac{1}{2}\,c_n + \int_{\mathbf{R}^*} [(e^x-1)Y^n(x) - h(x)]\,\nu_n(dx) = 0. \tag{2.23}$$

Тогда из (2.23) и (2.22) получаем, что

$$b^{Q^n} = -\frac{1}{2}\,c_n - \int_{\mathbf{R}^*} (e^x - 1 - h(x))Y^n(x)\,\nu_n(dx). \tag{2.24}$$

Аналогичным образом выписываем характеристики для процесса X по мере Q:

$$\begin{cases} b^Q = b + \beta c + \displaystyle\int_{\mathbf{R}^*} h(x)(Y(x)-1)\,\nu(dx), \\ c^Q = c, \\ \nu^Q(dx) = Y(x)\,\nu(dx). \end{cases}$$

Согласно [22, теорема VII.2.9], нужно проверить следующие условия:

j) $\lim_{n\to\infty} b^{Q^n} = b^Q$,

jj) $\lim_{n\to\infty} c^{Q^n} + \int_{\mathbf{R}^*} h^2(x)\,\nu^{Q^n}(dx) = c^Q + \int_{\mathbf{R}^*} h^2(x)\,\nu^Q(dx)$,

jjj) для всех непрерывных ограниченных функций f таких, что $\lim_{x\to 0} f(x)/x^2 = 0$, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^*} f(x)\,\nu^{Q^n}(dx) = \int_{\mathbf{R}^*} f(x)\,\nu^Q(dx).$$

Условия jj) и jjj) непосредственно вытекают из условий 2), 3) теоремы 1, так как $\nu^{Q^n} = Y^n\nu_n$ и $\nu^Q = Y\nu$. Осталось проверить условие j). Заметим, что из (2.24) следует, что

$$\begin{aligned} b^{Q^n} \;=\; & -\frac{1}{2}\Big[c_n + \int_{\mathbf{R}^*} h^2(x)Y^n(x)\,\nu_n(dx)\Big] \\ & - \int_{\mathbf{R}^*} \Big[e^x - 1 - h(x) - \frac{h^2(x)}{2}\Big] Y^n(x)\,\nu_n(dx). \end{aligned}$$

Первый член в правой части этого равенства сходится по условию 2), а второй — по условию 3) с функцией $f(x) = [e^x - 1 - h(x) - h^2(x)/2]/(e^x - 1)$. Значит, условия теоремы VII.2.9 выполнены и мы имеем (2.21). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Предположим, что процессы X^n и X являются процессами Леви по эквивалентным мартингальным мерам Q^n и Q соответственно и*

$$\mathscr{L}(X^n \,|\, Q^n) \to \mathscr{L}(X \,|\, Q).$$

Тогда для любой случайной величины τ, независимой от X^n и X, с экспоненциальным распределением μ_q, имеющим параметр $q > 0$, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} E_{Q^n\times\mu_q} \sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} e^{X_t^n} = E_{Q\times\mu_q} \sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} e^{X_t}. \tag{2.25}$$

Доказательство. Предположим, что τ — экспоненциально распределенная случайная величина с параметром $q > 0$, заданная на вероятностном пространстве $(E, \mathscr{E})$. Рассмотрим расширение исходного вероятностного пространства $(\widetilde{\Omega}^n, \widetilde{\mathscr{F}}^n, \widetilde{\mathbb{F}}^n, \widetilde{Q}^n)$, где $\widetilde{\Omega}^n = \Omega^n \times E$, $\widetilde{\mathscr{F}}^n = \mathscr{F}^n \times \mathscr{E}$, $\widetilde{\mathbb{F}}^n = (\widetilde{\mathscr{F}}_t^n)_{t\geqslant 0}$ с $\widetilde{\mathscr{F}}_t^n = \mathscr{F}_t^n \otimes \mathscr{E}$ и $\widetilde{Q}^n = Q \times \mu_q$. Такое же расширение проводим с пространством $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, Q)$, вводя аналогичным образом $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{F}}, \widetilde{\mathbf{F}}, \widetilde{Q})$. При таком расширении пространства процессы Леви X и X^n остаются процессами Леви с теми же характеристиками.

Согласно результату Б. А. Рогозина [31], при условии $E_{Q^n} e^{X_1^n} < e^q$ и на множестве $\{z \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Re}\ z < 1\}$ имеем так называемое разложение Винера–Хопфа:

$$\frac{q}{q - \ln E_{Q^n} e^{zX_1^n}} = E_{\tilde{Q}^n}[e^{z \sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} X_t^n}]\, E_{\tilde{Q}^n}[e^{z \inf_{0\leqslant t\leqslant\tau} X_t^n}].$$

Учитывая, что мера Q^n мартингальная и, значит, $E_{Q^n} e^{X_1^n} = E_{Q^n} e^{X_0^n} = 1$, получаем, что разложение может быть продолжено до $z = 1$, что дает:

$$E_{\tilde{Q}^n}[e^{\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} X_t^n}] = \frac{1}{E_{\tilde{Q}^n}[e^{\inf_{0\leqslant t\leqslant\tau} X_t^n}]}. \tag{2.26}$$

Поскольку процессы X^n и X не имеют скачков в фиксированные моменты времени, а τ — независимая от X^n и X случайная величина, получаем, что

$$\mathscr{L}\Big(\inf_{0\leqslant t\leqslant\tau} X_t^n \,|\, \tilde{Q}^n\Big) \to \mathscr{L}\Big(\inf_{0\leqslant t\leqslant\tau} X_t \,|\, \tilde{Q}\Big).$$

А поскольку $e^{\inf_{0\leqslant t\leqslant\tau} X_t^n} \leqslant e^{X_0^n} \leqslant 1$, имеем по теореме Лебега:

$$\lim_{n\to\infty} E_{\tilde{Q}^n}[e^{\inf_{0\leqslant t\leqslant\tau} X_t^n}] = E_{\tilde{Q}}[e^{\inf_{0\leqslant t\leqslant\tau} X_t}]. \tag{2.27}$$

В свою очередь из (2.26) и (2.27) получаем (2.25). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Предположим, что выполнено* (2.25). *Тогда для любого $T > 0$ семейство случайных величин $(\sup_{0\leqslant t\leqslant T} S_t^n)_{n\geqslant 1}$ равномерно интегрируемо.*

Доказательство. Напомним, что $\sup_{0\leqslant t\leqslant T} S_t^n = S_0^n e^{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} X_t^n}$. Заметим, что для любого фиксированного $q>0$

$$e^{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} X_t^n} \leqslant e^{qT}\int_T^\infty qe^{-qu}e^{\sup_{0\leqslant t\leqslant u} X_t^n}\,du \leqslant e^{qT}\int_0^\infty qe^{-qu}e^{\sup_{0\leqslant t\leqslant u} X_t^n}\,du.$$

Это означает, что

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} S_t^n \leqslant e^{qT} E_{\mu_q} \sup_{0\leqslant t\leqslant \tau} S_t^n. \tag{2.28}$$

Поскольку выполнено (2.25), то, применяя теорему Фубини, получаем, что семейство положительных случайных величин $(E_{\mu_q}\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} S_t^n)_{n\geqslant 1}$ равномерно интегрируемо. А значит, в силу (2.28), и семейство $(\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} S_t^n)_{n\geqslant 1}$ равномерно интегрируемо. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 1. В силу леммы 1 и условия 1) теоремы 1 получаем, что $\mathscr{L}(S^n\,|\,Q^n)\to\mathscr{L}(S\,|\,Q)$. Поскольку функционал g является непрерывным в $D([0,T])$, имеем: $\mathscr{L}(g(S^n)\,|\,Q^n)\to\mathscr{L}(g(S)\,|\,Q)$. Из условия (1.6) и леммы 3 получаем сходимость цен (1.9). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Легко проверить, используя соотношение (1.14), что

$$\int_{\mathbf{R}^*}\left(\sqrt{Y(x)}-1\right)^2\nu(dx) < +\infty$$

и, значит, процесс Хеллингера $h_T(P^*,P)$ порядка 1/2 конечен. Отсюда следует (ср. [22, теорема IV.2.1.]), что $P^*\ll P$. Будем проверять сходимость характеристик процесса X^n по мере Q^n. Для этого заметим, что согласно теореме Гирсанова характеристики X^n даются формулой (2.22). Для проверки условий j), jj) и jjj) заметим, что

$$\begin{aligned} b^{Q^n} &= b_n + \left[c_n + \int_{\mathbf{R}^*} h^2(x)\,\nu_n(dx)\right]\beta + c_n(\beta_n-\beta)\\ &\quad + \int_{\mathbf{R}} h(x)(Y^n(x)-Y(x))\,\nu_n(dx)\\ &\quad + \int_{\mathbf{R}^*} h(x)[Y(x)-1-\beta h(x)]\,\nu_n(dx). \end{aligned}$$

Условия (1.10), (1.13), (1.14) и i) дают:

$$\lim_{n\to\infty} b^{Q^n} = b+\beta c + \int_{\mathbf{R}^*} h(x)(Y(x)-1)\,\nu(dx).$$

Таким же образом показываем, что

$$\lim_{n\to+\infty} c^{Q^n} + \int_{\mathbf{R}^*} h^2(x)\,\nu^{Q^n}(dx) = c + \int_{\mathbf{R}^*} h^2(x)Y(x)\,\nu(dx)$$

и что для всех непрерывных и ограниченных функций f таких, что $\lim_{x\to 0} f(x)/x^2 = 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^*} f(x)\, \nu^{Q^n}(dx) = \int_{\mathbf{R}^*} f(x) Y(x)\, \nu(dx).$$

Условия j)–jjj) выполнены, и по теореме VII.2.9 в [22] получаем:

$$\mathscr{L}(X^n \,|\, Q^n) \longrightarrow \mathscr{L}(X \,|\, P^*).$$

Используя условие $\lim_{n\to\infty} S_0^n = S_0$, а также непрерывность и ограниченность функции g в $D([0,T])$, получаем первую часть теоремы.

Хорошо известно, что P^* является эквивалентной мартингальной мерой для S, если выполнены условия $Y > 0$ (ν-п.н.) и

$$b + \frac{c}{2} + \beta c + \int_{\mathbf{R}^*} [(e^x - 1)Y(x) - h(x)]\, \nu(dx) = 0.$$

Отсюда, используя формулу Гирсанова для b^{P^*}, получаем:

$$b^{P^*} = -\frac{c}{2} - \int_{\mathbf{R}^*} (e^x - 1 - h(x))Y(x)\, \nu(dx). \tag{2.29}$$

Поскольку $b^{P^*} = \lim_{n\to+\infty} b^{Q^n}$, из условий теоремы вытекает, что

$$b^{P^*} = -\frac{c}{2} - \int_{x<1} (e^x - 1 - h(x))Y(x)\, \nu(dx) - \lim_{n\to+\infty} \int_{x\geqslant 1} (e^x - 1)Y^n(x)\, \nu_n(dx).$$

А это и означает выполнение условия

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x\geqslant 1} (e^x - 1)Y^n(dx)\, \nu_n(dx) = \int_{x\geqslant 1} (e^x - 1)Y(x)\, \nu(dx).$$

Значит, условия теоремы 1 выполнены и имеет место сходимость цен опционов. Теорема 2 доказана.

3. Доказательство теоремы 3. Для простоты изложения и без потери общности положим $r_n = r = 0$. Обозначим $\widehat{\psi}_n$ и $\widehat{\psi}$ характеристические экспоненты для процессов $\widehat{X}^n$ и $\widehat{X}$, участвующих в определении эквивалентных мартингальных мер с минимальной энтропией. Введем в рассмотрение множества:

$$D_n = \left\{ u \in \mathbf{R}\colon \int_{x>1} e^{u(e^x-1)}\, \nu_n(dx) < \infty \right\},$$
$$D = \left\{ u \in \mathbf{R}\colon \int_{x>1} e^{u(e^x-1)}\, \nu(dx) < \infty \right\},$$

на которых преобразования Лапласа $\widehat{X}_1^n$ и $\widehat{X}_1$ определены. Тогда, согласно [29], [18], для любого $u \in D_n$

$$\widehat{\psi}_n(u) = \left(b_n + \frac{c_n}{2}\right)u + \frac{c_n}{2}\, u^2 + \int_{\mathbf{R}^*} \left(e^{u(e^x-1)} - 1 - uh(x)\right)\, \nu_n(dx). \tag{3.30}$$

и имеет место аналогичное представление для $\widehat{\psi}$ при $u \in D$:

$$\widehat{\psi}(u) = \left(b + \frac{c}{2}\right)u + \frac{c}{2}\,u^2 + \int_{\mathbf{R}^*} (e^{u(e^x-1)} - 1 - uh(x))\,\nu(dx).$$

Сначала напомним следующий важный факт.

Лемма 4 (ср. [15], [18])**.** *Предположим, что для процесса X^n существует эквивалентная мартингальная мера с минимальной энтропией Q^n. Тогда параметры Гирсанова (β^n, Y^n) являются детерминированными функциями, и процесс X^n по мере Q^n остается процессом Леви.*

По нашему предположению, процесс X не является монотонным процессом Леви. Напомним, что процесс Леви X является монотонным, если выполнено одно из следующих соотношений i) или ii):

(i) $c = 0$, $\int_{\mathbf{R}} h(x)\,\nu(dx) < +\infty$, $\nu(\mathbf{R}^{-,*}) = 0$ и $b - \int_{\mathbf{R}} h(x)\,\nu(dx) \geqslant 0$;

(ii) $c = 0$, $\int_{\mathbf{R}} h(x)\,\nu(dx) < +\infty$, $\nu(\mathbf{R}^{+,*}) = 0$ и $b - \int_{\mathbf{R}} h(x)\,\nu(dx) \leqslant 0$.

Легко показать, что верна следующая лемма.

Лемма 5. *Процесс X является монотонным процессом Леви тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{u\to-\infty} \widehat{\psi}'(u) \geqslant 0 \quad \textit{или} \quad \lim_{u\to+\infty} \widehat{\psi}'(u) \leqslant 0.$$

Сформулируем теперь результат о сходимости функций $\widehat{\psi}_n$. Для этого заметим, что на множестве $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geqslant n} D_k$ характеристические экспоненты определены начиная с некоторого достаточно большого индекса и можно рассмотреть их предел. Пусть множество U определено формулой (1.17), тогда

$$U \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geqslant n} D_k.$$

Лемма 6. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 3. *Тогда функции $\widehat{\psi}_n$ и $\widehat{\psi}$ являются функциями класса $C^\infty(\overset{\circ}{D}{}^n)$ и $C^\infty(\overset{\circ}{D})$ соответственно. Более того, на любом компакте $K \subset \overset{\circ}{U}$*

$$\widehat{\psi}_n'(u) \to \widehat{\psi}'(u) \tag{3.31}$$

равномерно по u при $n \to \infty$.

Доказательство. Будем доказывать, что $\widehat{\psi} \in C^\infty(\overset{\circ}{D})$. Доказательство того, что $\widehat{\psi}_n \in C^\infty(\overset{\circ}{D}_n)$, проводится аналогично с заменой меры ν на меру ν_n. Заметим, что $\overset{\circ}{D}$ является открытым интервалом. Поскольку $h(x) = x$ в окрестности нуля, то, используя теорему о среднем для $|x| \leqslant 1$, получаем, что

$$|e^{u(e^x-1)} - 1 - uh(x)| \leqslant c(u^2 + u)x^2,$$

где $c > 0$ — некоторая константа. А это и означает равномерную по u сходимость интегралов, так как выполнено (1.3) с заменой ν_n на ν. Для $|x| > 1$ в силу того, что $\nu([1, +\infty[) < \infty$ и $h(x) = 0$, достаточно рассмотреть интеграл

$$\int_{|x|>1} e^{u(e^x-1)}\,\nu(dx) = \int_{x>1} e^{u(e^x-1)}\,\nu(dx) + \int_{x<-1} e^{-u(1-e^x)}\,\nu(dx).$$

Интегралы в правой части этого равенства сходятся равномерно, так как подынтегральные функции в некоторой окрестности точки u мажорируются интегрируемой функцией $e^{(u+\delta)(e^x-1)}$ с $\delta > 0$ и $u + \delta \in \overset{\circ}{D}$, и константой $e^{|u|}$ соответственно. Аналогичные рассуждения могут быть применены к производным $\widehat{\psi}^{(k)}$, $k \geqslant 1$.

Для доказательства равномерной сходимости (3.31) заметим, что для $u \in K$

$$\widehat{\psi}'(u) = b + \left(\frac{1}{2} + u\right)c + \int_{\mathbf{R}^*} ((e^x - 1)e^{u(e^x-1)} - h(x))\,\nu(dx) \tag{3.32}$$

и аналогичная формула справедлива для $\widehat{\psi}'_n(u)$.

Поскольку $\widehat{\psi}'_n(u)$ и $\widehat{\psi}'(u)$ являются возрастающими непрерывными функциями на K, то равномерная сходимость эквивалентна поточечной сходимости рассматриваемых функций. В свою очередь, для доказательства поточечной сходимости, в силу условий 2), 3) теоремы 3 и (3.32), достаточно установить, что для каждого $u \in K$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^*} f(u,x)\,\nu_n(dx) = \int_{\mathbf{R}^*} f(u,x)\,\nu(dx),$$

где $f(u,x) = (e^x - 1)e^{u(e^x-1)} - h(x) - h^2(x)(u + 1/2)$. Теперь достаточно заметить, что $\lim_{x\to 0} f(u,x)/x^2 = 0$ и что для $u \in K \subseteq \overset{\circ}{D}$ последовательность соответствующих интегралов равномерно интегрируема.

Лемма 7. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 3. *Тогда, если* $\lim_{u\to\alpha-} \widehat{\psi}'(u) > 0$, *то решение* θ *уравнения* (1.15) *существует и* $\theta < \alpha$; *если* $\lim_{u\to\alpha-} \widehat{\psi}'(u) = 0$, *то* $\theta = \alpha$ *с* $\alpha \neq \infty$, *и в обоих случаях* (*для последнего случая по некоторой подпоследовательности*)

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta. \tag{3.33}$$

Если $\lim_{u\to\alpha-} \widehat{\psi}'(u) < 0$, *то уравнение* (1.15) *может иметь решение или не иметь его, но существует подпоследовательность* n' *такая, что*

$$\lim_{n'\to\infty} \theta_{n'} = \alpha. \tag{3.34}$$

Доказательство. Пусть $\lim_{u\to\alpha-}\widehat{\psi}'(u)>0$. Поскольку $\widehat{\psi}'$ непрерывна на $\overset{\circ}{U}\subseteq\overset{\circ}{D}$ и $\lim_{u\to-\infty}\widehat{\psi}'(u)<0$ (см. лемму 5), то существует решение θ уравнения (1.15) с $\theta<\alpha$. Заметим, что $\widehat{\psi}'_n$ — возрастающая функция и

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{u\to\alpha-}\widehat{\psi}'_n(u)\geqslant\lim_{u\to\alpha-}\widehat{\psi}'(u). \tag{3.35}$$

А это означает, что начиная с некоторого $n\geqslant n_0$ выполнены неравенства $\lim_{u\to\alpha-}\widehat{\psi}'_n(u)>0$ и $\theta_n<\alpha$. Отсюда легко получить свойство (3.33), используя равномерную сходимость (3.31), доказанную в лемме 6. При этом существенную роль играет единственность решения уравнения (1.15), доказанная в [26], и предположение, что X не является монотонным процессом Леви.

Пусть теперь $\lim_{u\to\alpha-}\widehat{\psi}'(u)\leqslant 0$. Поскольку X не является монотонным процессом Леви, то $\alpha\neq\infty$. Для $\alpha<\infty$ по лемме Фату получаем

$$\int_{x>1}(e^x-1)e^{\alpha(e^x-1)}\,\nu(dx)\leqslant\varliminf_{u\to\alpha-}\int_{x>1}(e^x-1)e^{u(e^x-1)}\,\nu(dx)<\infty.$$

Последнее означает, что $\widehat{\psi}'(\alpha)$ определено. Используя теорему Лебега о монотонной сходимости, мы получаем, что $\widehat{\psi}'(\alpha)=\lim_{u\to\alpha-}\widehat{\psi}'(u)$. В частности, если этот предел равен нулю, то уравнение $\widehat{\psi}'(u)=0$ имеет решение $\theta=\alpha$. Во всех рассмотренных случаях для $u>\alpha$ из определения U вытекает, что существует последовательность n' такая, что $\lim_{n'\to\infty}\widehat{\psi}'_{n'}(u)=+\infty$ и, значит, $\lim_{n'\to\infty}\theta_{n'}\leqslant\alpha$. При $u<\alpha$ выполнено неравенство $\widehat{\psi}'(u)<0$ и, в силу равномерной сходимости, начиная с некоторого n_0, $\widehat{\psi}'_n(u)<0$ и $\theta_n>u$. Отсюда получаем, что $\lim_{n'\to\infty}\theta_{n'}=\alpha$.

Доказательство теоремы 3. Если $\lim_{u\to\alpha-}\widehat{\psi}'(u)>0$, то условия теоремы 1 и теоремы 2 выполнены. Проверим, например, условия теоремы 2. Поскольку $Y^n(x)=e^{\theta_n(e^x-1)}$, $Y(x)=e^{\theta(e^x-1)}$ и справедливо равенство (3.33), то в окрестности точки $x=0$ получаем

$$Y^n(x)=1+\theta_n x+o(x),\quad Y(x)=1+\theta x+o(x) \tag{3.36}$$

с $o(x)$, не зависящим от n. Более того, соотношение (3.33) дает условие i). Поскольку $\widehat{\psi}'_n(\theta_n)=0$, то справедливо равенство

$$\begin{aligned}\int_{x\geqslant\epsilon}(e^x-1)e^{\theta_n(e^n-1)}\,\nu(dx)\;=\;&-b_n-c_n\left(\frac{1}{2}+\theta_n\right)\\&-\int_{x<\epsilon}[(e^x-1)e^{\theta_n(e^x-1)}-h(x)]\,\nu(dx).\end{aligned} \tag{3.37}$$

Выражения в правой части равенства (3.37) в свою очередь равномерно ограничены в силу условий 2)–4) теоремы 3 и (3.33). Это означает, что

$$\sup_n\int_{x\geqslant\epsilon}(e^x-1)e^{\theta_n(e^x-1)}\,\nu(dx)<\infty. \tag{3.38}$$

Свойство (3.38) и ограниченность функций $e^{\theta_n(e^x-1)}$ константой $e^{\theta+1}$ на множестве $\{x \leqslant -\epsilon\}$ влекут за собой равномерную интегрируемость семейства $(e^{\theta_n(e^x-1)})_{n\geqslant 1}$ на множестве $\{|x| \geqslant \epsilon\}$, и, значит,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geqslant\epsilon} e^{\theta_n(e^x-1)}\,\nu_n(dx) = \int_{|x|\geqslant\epsilon} e^{\theta(e^x-1)}\,\nu(dx) \tag{3.39}$$

при $n \to \infty$. Более того, из (3.37) и условия $\widehat{\psi}'(\theta) = 0$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x\geqslant 1} (e^x-1)e^{\theta_n(e^x-1)}\,\nu_n(dx) = \int_{x\geqslant 1} (e^x-1)e^{\alpha(e^x-1)}\,\nu(dx), \tag{3.40}$$

а это означает, что P^* является мартингальной мерой.

В случае $\lim_{u\to\alpha-} \widehat{\psi}'(u) < 0$ имеем (3.34), а также соотношения (3.36) и (3.39) с заменой θ на α. Заметим, что (3.37) теперь не выполняется, а это означает, что P^* не является мартингальной мерой.

Во всех рассмотренных случаях условия теоремы 2 выполнены и теорема 3 доказана.

Пример 1. Пусть при всех $n \geqslant 1$ V^n является процессом $\mathrm{NIG}(n, 0, n, 0)$ и Z^n — процессом $\mathrm{NIG}(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{n}, 0)$, независимым от V^n. Напомним, что мера Леви процесса NIG задается формулой (1.1). Рассмотрим последовательность процессов Леви $(X^n)_{n\geqslant 1}$ таких, что

$$X_t^n = bt + V_t^n + Z_t^n.$$

Тогда

$$\widehat{\psi}_n(u) = ub + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}} (e^{u(e^x-1)} - 1 - uh(x))\,\frac{n^2K_1(n|x|) + (4n)^{-1}K_1(|x|/4)}{|x|}\,dx,$$

где K_1 обозначает модифицированную функцию Бесселя третьего рода. Асимптотическое поведение этой функции в 0 и $+\infty$ хорошо известно (см. [1, формулы 9.6.9 и 9.7.2])

$$K_1(z) \sim \frac{1}{z}, \quad z \to 0, \quad \text{и} \quad K_1(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}, \quad z \to +\infty.$$

Для каждого n функция $\widehat{\psi}_n$ определена на $]-\infty, 0]$ и дифференцируема на $]-\infty, 0[$, так что $\alpha = 0$. Легко проверить, что

$$\lim_{u\to-\infty} \widehat{\psi}_n'(u) = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{u\to 0} \widehat{\psi}_n'(u) = +\infty,$$

и, значит, для S^n существует эквивалентная мера с минимальной энтропией. Нетрудно проверить также, что

$$\mathscr{L}(X^n \mid P^n) \longrightarrow \mathscr{L}(bt + W_t)_{t\geqslant 0},$$

где W — стандартное броуновское движение. Значит, $\lim_{u\to 0}\widehat{\psi}'(u) = b + 1/2$. По теореме 3 получаем, что если $b + \frac{1}{2} \geqslant 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{C}_T^n = E_Q g(S),$$

где Q — единственная мартингальная мера; если $b+1/2 < 0$, то для всех ограниченных g

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{C}_T^n = E_P g(S),$$

где P — исходная мера. Заметим, что предельная модель имеет единственную эквивалентную мартингальную меру $Q \neq P$. В частности, если рассмотреть европейский опцион пут с временем платежа T и фиксированной ценой K, то

$$\lim_{n\to+\infty} E_{Q^n}(K - S_T^n)^+ = E_P(K - S_T)^+ > E_Q(K - S_T)^+.$$

П р и м е р 2. Рассмотрим теперь последовательность процессов $\mathrm{NIG}(\alpha_n, -\alpha_n, 1, -1)$ с $\alpha_n = 1/2 - 1/(4n)$. Тогда

$$\widehat{\psi}_n(u) = -u + \frac{\alpha_n}{\pi}\int_{\mathbf{R}} (e^{u(e^x-1)} - 1 - uh(x))e^{-\alpha_n x}\,\frac{K_1(\alpha_n|x|)}{|x|}\,dx.$$

Функция $\widehat{\psi}_n$ определена на интервале $]-\infty, 0]$ и дифференцируема на $]-\infty, 0[$, значит, $\alpha = 0$. Можно проверить, что $\lim_{u\to-\infty}\widehat{\psi}_n'(u) = -\infty$ и что $\alpha_n < 1/2$, $\lim_{u\to 0}\widehat{\psi}_n'(u) = +\infty$. Уравнение $\widehat{\psi}_n'(u) = 0$ имеет решение, и для S^n существует мартингальная мера с минимальной энтропией Q^n. Можно легко установить, что

$$\lim_{n\to+\infty} b^n = -1, \quad \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbf{R}} h^2(x)\,\nu^n(dx) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} h^2(x)e^{-x/2}\frac{K_1(|x|/2)}{|x|}\,dx$$

и что для всех ограниченных непрерывных функций f таких, что $\lim_{x\to 0} f(x)/x^2 = 0$, имеет место равенство

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbf{R}} \phi(x)\,\nu^n(dx) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \phi(x)e^{-x/2}\,\frac{K_1(|x|/2)}{|x|}\,dx.$$

Условия 1)–3) теоремы 3 выполняются для процесса X, являющегося процессом $\mathrm{NIG}(1/2, -1/2, 1, -1)$. Функция $\widehat{\psi}'$ определена на $]-\infty, 0]$ и $\widehat{\psi}'(0) = -1$. Отсюда следует, что уравнение $\widehat{\psi}'(u) = 0$ не имеет решения и для S нет эквивалентной мартингальной меры с минимальной энтропией. Тем не менее, по теореме 3 получаем, что для европейского опциона пут с временем платежа T и фиксированной ценой K

$$\lim_{n\to+\infty} E_{Q^n}(K - S_T^n)^+ = E_P(K - S_T)^+.$$

4. Доказательство теоремы 4. Будем, как и ранее, для простоты и без потери общности предполагать, что $r_n = r = 0$. Пусть $q > 1$ и X не является монотонным процессом Леви. Предполагая, что $I(q) < +\infty$, положим

$$F(u) = b + \frac{c}{2} + cu + \int_{\mathbf{R}^*} [(e^x - 1)Y_u(x) - h(x)]\, \nu(dx), \tag{4.41}$$

где

$$Y_u(x) = \begin{cases} [1 + (q-1)u(e^x - 1)]^{1/(q-1)}, & \text{если } (q-1)u(e^x-1) \geqslant -1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{4.42}$$

Используя рассуждения, приведенные в лемме 5, можно показать, что справедлив следующий результат.

Лемма 8. *Процесс X является монотонным процессом Леви тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{u \to -\infty} F(u) \geqslant 0 \quad \textit{или} \quad \lim_{u \to +\infty} F(u) \leqslant 0.$$

Рассмотрим сначала множество мартингальных мер, абсолютно непрерывных относительно P, и установим, что параметры Гирсанова являются решениями некоторой задачи минимизации.

Лемма 9. *Параметры Гирсанова (β, Y_β), отвечающие абсолютно непрерывной мартингальной мере Q, минимизирующей интеграл Хеллингера порядка q, являются детерминированными функциями. Если $c \neq 0$, то Y_β является единственным решением задачи минимизации функции*

$$\begin{aligned} k(Y) = {} & \frac{1}{2}\frac{q(q-1)}{c}\left[b + \frac{c}{2} + \int_{\mathbf{R}^*} ((e^x - 1)Y(x) - h(x))\, \nu(dx)\right]^2 \\ & + \int_{\mathbf{R}^*} (Y^q(x) - q(Y(x) - 1) - 1)\, \nu(dx) \end{aligned}$$

на банаховом пространстве кусочно-непрерывных неотрицательных функций с локально-равномерной метрикой.

Если $c = 0$, то параметр Y_β является единственным решением задачи минимизации функции $k_0(Y)$:

$$k_0(Y) = \int_{\mathbf{R}^*} (Y^q(x) - q(Y(x) - 1) - 1)\, \nu(dx)$$

при ограничении $b + \int_{\mathbf{R}^*} (e^x - 1)(Y(x) - h(x))\, \nu(dx) = 0$. В обоих случаях Y_β дается формулой (4.42) с $u = \beta$, где β является единственным решением уравнения $F(u) = 0$.

Доказательство. Так как X не является монотонным процессом Леви, то из леммы 8 следует, что уравнение $F(u) = 0$ имеет решение. Поскольку $F'(u) > 0$, это решение единственно. Рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 2.9 в [24], показывают, что мартингальная мера с параметрами Гирсанова (β, Y_β), приведенными в лемме, минимизирует интеграл Хеллингера порядка q. Лемма 9 доказана.

Для каждого $n \geqslant 1$ определим аналог функции F:

$$F^n(u) = b_n + \frac{c_n}{2} + c_n u + \int_{\mathbf{R}^*} [(e^x - 1)Y_u(x) - h(x)]\, \nu_n(dx).$$

Из леммы 9 следует, что параметры Гирсанова (β^n, Y^n) минимальной меры Q^n удовлетворяют условиям $F^n(\beta_n) = 0$ и $Y^n = Y_{\beta_n}$.

Лемма 10. *Если*

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(q) = I(q) < +\infty, \tag{4.43}$$

то F^n равномерно сходится к F на компактах. Если

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(q) = I(q) + a, \qquad a > 0, \tag{4.44}$$

то F^n равномерно сходится к $\widetilde{F} > F$ на компактах. Если

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(q) = +\infty, \tag{4.45}$$

то $\lim_{n\to+\infty} F^n(u) = +\infty$ для каждого $u > 0$.

Доказательство. Из условий 2)–4) теоремы 3 вытекает, что для каждого $u \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} b_n + \frac{c_n}{2} + c_n u + \int_{x<1} [(e^x - 1)Y_u(x) - h(x)]\, \nu_n(dx)\\ = b + \frac{c}{2} + cu + \int_{x<1} [(e^x - 1)Y_u(x) - h(x)]\, \nu(dx),\end{aligned} \tag{4.46}$$

где Y_u определяется формулой (4.42).

Заметим, что существует положительная константа C такая, что на множестве $\{x \geqslant 1\}$

$$(e^x - 1)Y_u(x) \leqslant Ce^{qx/(q-1)}. \tag{4.47}$$

Если выполняется (4.43), то функции $(e^x - 1)Y_u(x)$ являются равномерно-интегрируемыми по мерам ν_n и

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x\geqslant 1} (e^x - 1)Y_u(x)\, \nu_n(dx) = \int_{x\geqslant 1} (e^x - 1)Y_u(x)\, \nu(dx).$$

Значит, $\lim_{n\to+\infty} F^n(u) = F(u)$.

Если же справедливо (4.44), то при $u \neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x\geqslant 1} (e^x - 1) Y_u(x)\, \nu_n(dx) > \int_{x\geqslant 1} (e^x - 1) Y_u(x)\, \nu(dx)$$

и $\lim_{n\to+\infty} F^n(u) = \widetilde{F}(u) > F(u)$. В обоих случаях, так как все рассматриваемые функции являются непрерывными и строго возрастающими, сходимость равномерна на компактах.

Если выполняется (4.45), то $\nu_n(\{x \geqslant 1\}) > 0$ для достаточно больших n. Для каждого $u > 0$ на множестве $\{x \geqslant 1\}$ выполнено неравенство $Y_u > 0$, и мы получаем

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x\geqslant 1} (e^x - 1) Y_u(x)\, \nu_n(dx) = +\infty$$

и, значит, $\lim_{n\to+\infty} F^n(u) = +\infty$. Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Если* $\lim_{n\to+\infty} I_n(q) < +\infty$, *то* $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$, *где* β *является решением уравнения* $F(u) = 0$ *при условии* (4.43) *и решением уравнения* $\widetilde{F}(u) = 0$ *при условии* (4.44). *Если* $\lim_{n\to+\infty} I_n(q) = +\infty$, *то* $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = 0$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $\lim_{n\to+\infty} I_n(q) = I(q) < +\infty$. Предположим, что $\underline{\beta} = \underline{\lim}_{n\to+\infty}\beta_n < \overline{\beta} = \underline{\lim}_{n\to+\infty}\beta_n$. Поскольку X не является монотонным процессом Леви, из леммы 8 следует, что $\underline{\beta} \neq -\infty$ и $\overline{\beta} \neq +\infty$, и, значит, $[\underline{\beta}, \overline{\beta}]$ является компактом в $\mathbf{R}$. Если $\underline{\beta} \neq \overline{\beta}$, то можно найти две последовательности n' и n'' такие, что $\beta^{n'} \to \underline{\beta}$ и $\beta^{n''} \to \overline{\beta}$. Тогда $F(\underline{\beta}) = F(\overline{\beta}) = 0$, что противоречит единственности решения уравнения $F(u) = 0$.

Случай, когда справедливо (4.44), рассматривается аналогичным образом с заменой F на функцию $\widetilde{F}$, введенную в лемме 10.

Если имеет место (4.45), то из леммы 10 вытекает, что $\lim_{n\to+\infty} F^n(u) = +\infty$ для всех $u > 0$. Значит, для любого $u > 0$ и достаточно больших n выполнено неравенство $\beta^n < u$, что дает $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\beta_n \leqslant 0$. Заметим, что $\lim_{n\to+\infty} \sup \operatorname{supp}(\nu_n) = +\infty$. Поскольку мера Q^n эквивалентна P^n, имеем $Y^n > 0$ ν_n-п.н., а тот факт, что при достаточно больших n и x на $\operatorname{supp}(\nu_n)$ выполнено неравенство $1 + \beta_n(q-1)(e^x - 1) > 0$, влечет за собой $\underline{\lim}_{n\to+\infty}\beta_n \geqslant 0$, и, значит, $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = 0$. Лемма 11 доказана.

Доказательство теоремы 4. Проверим условия теоремы 2. Согласно предыдущей лемме, $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \beta$, $\beta \in \mathbf{R}$. Это означает, что можно определить Y_β формулой (4.42). Поскольку $\operatorname{supp}(\nu_n) \subseteq \{x \in \mathbf{R}\colon Y^n > 0\}$ и $\nu(\{m\}) = \nu(\{M\}) = 0$, из условия 4) получаем, что $\operatorname{supp}(\nu) \subseteq \{x \in \mathbf{R}\colon Y_\beta > 0\}$.

Далее, для всех $n \geqslant 1$

$$Y^n(x) = 1 + \beta_n x + o(x) \quad \text{и} \quad Y_\beta(x) = 1 + \beta x + o(x).$$

Из леммы 11 следует, что $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \beta$, а это в свою очередь показывает, что $o(x)$ не зависит от n.

Заметим, что в случае, когда $\lim_{n\to+\infty} I_n(q) < +\infty$, последовательность функций $(Y^n)_{n\geqslant 1}$ равномерно интегрируема на множестве $|x| > \epsilon$. На самом деле, функции Y^n ограничены константой для $x < -\epsilon$ и для $x > \epsilon$, выполняется (4.47) с $C = C(\epsilon)$.

Более того, если выполняется (4.43), то

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x\geqslant 1} e^x Y^n(x)\, \nu_n(dx) = \int_{x\geqslant 1} e^x Y_\beta(x)\, \nu(dx)$$

и $P^* = Q$ — эквивалентная мартингальная мера. Тогда для всех функций платежа g, удовлетворяющих условию (1.9), имеет место сходимость цен опционов (1.18).

Наконец, если (4.45), то $\beta = 0$ и $Y(x) = 1$. Из того, что $F^n(\beta_n) = 0$ и условий 2)–4) следует, что

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x\geqslant\epsilon} (e^x - 1) Y^n(x)\, \nu_n(dx) = -b - \frac{c}{2} - \int_{x<\epsilon} ((e^x - 1) - h(x))\, \nu(dx).$$

Отсюда нетрудно увидеть, что семейство $(Y^n I_{|x|>\epsilon})$ равномерно интегрируемо и что условие ii) теоремы 2 выполнено. Значит, условия теоремы 2 выполнены и теорема 4 доказана.

З а м е ч а н и е 4. Аналогичные теореме 4 результаты можно также получить в случае $q < 1$. Например, в случае $0 < q < 1$ условие (4.43) всегда выполняется. Однако могут возникнуть трудности, связанные с поведением интегралов в окрестности границы $\operatorname{supp}(\nu)$, так как последовательность Y^n может и не быть равномерно интегрируемой на $\{|x| > \epsilon\}$, а значит, и условие ii) теоремы 2 может быть не выполнено. Более точно, условия теоремы 4 не обеспечивают существования решения уравнения $F(u) = 0$, принадлежащего множеству $\mathscr{D} = \{u\colon 1 + (q-1)u(e^x - 1) > 0\ \nu\text{-п.н.}\}$. Если решение уравнения принадлежит $\mathscr{D}$, то теорема 4 остается в силе. Но если $F(u) > 0$ на $\mathscr{D}$, то можно показать, что

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{C}_T^n = E_{P^*} g(\check{S}),$$

где $\check{S} = \exp(\check{X})$ и $\check{X}$ — процесс Леви с характеристиками $(b, c, \nu + F(\inf \mathscr{D})(1 - e^m)^{-1} I_{\{m\}})$.

Аналогично, если $F(u) < 0$ на $\mathscr{D}$, то

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{C}_T^n = E_{P^*} g(\check{S}),$$

где $\check{S} = \exp(\check{X})$ и $\check{X}$ — процесс Леви с характеристиками $(b, c, \nu + |F(\sup \mathscr{D})|(e^M - 1)^{-1} I_{\{M\}})$.

Пример 3. Предположим, что X^n, $n \geqslant 1$, является процессом $\mathrm{CGMY}(1, \alpha_n, A_n, B_n)$ со сносом b_n и параметрами A_n, $B_n > 0$, $0 < \alpha_n < 1$. Напомним, что мера Леви такого процесса задается формулой (1.2). Рассмотрим минимальные в смысле квадратической вариации мартингальные меры ($q = 2$). Тогда

$$Y_u(x) = 1 + u(e^x - 1)$$

и

$$F^n(u) = b^n + \int_{\mathbf{R}^*} (u(e^x - 1)^2 + e^x - 1 - h(x))\, \nu_n(dx).$$

Предположим, что $B^n > 2$ для $n \geqslant 1$ и, значит, F^n определено на $[0, 1]$. Предположим, что уравнение $F^n(u) = 0$ имеет решение $\beta_n \in [0, 1]$, а также что

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = b, \quad \lim_{n\to+\infty} A_n = A, \quad \lim_{n\to+\infty} B_n = B, \quad \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha.$$

Легко проверить, что условия 2)–4) теоремы 3 для предельного процесса, являющегося процессом $\mathrm{CGMY}(1, \alpha, A, B)$ со сносом b, выполнены.

Если $B > 2$, то $\lim_{n\to+\infty} I_n(q) = I(q) < +\infty$, и, применяя теорему 4, получаем:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{C}_T^n = \mathbb{C}_T.$$

Если $B = 2$, то $\lim_{n\to+\infty} I_n(q) = +\infty$. Тогда $I(q) = +\infty$, и минимальной меры в смысле квадратической вариации нет. Из теоремы 4 получаем, что для всех ограниченных функций платежа g

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{C}_T^n = E_P g(S).$$

Пример 4. Предположим, что $X_t^n = -t + W_t + Z_t^n$, где W — стандартный винеровский процесс и Z^n — чисто разрывный процесс Леви, независимый от W и такой, что

$$\nu_n(dx) = \frac{1}{n}\, e^{-(2+1/n)x}\, I_{[n,2n]}(x).$$

Рассмотрим минимальные в смысле квадратической вариации меры ($q = 2$). Тогда

$$F^n(u) = -\frac{1}{2} + \frac{\gamma_n}{n+1} - \frac{\delta_n}{2n+1} + u\biggl(\alpha - \frac{2\gamma_n}{n+1} + \frac{\delta_n}{2n+1}\biggr),$$

где

$$\alpha = e^{-1} - e^{-2} + 1, \quad \gamma_n = e^{-(n+1)} - e^{-2(n+1)}, \quad \delta_n = e^{-(2n+1)} - e^{-2(n+1)}.$$

Легко проверить, что для всех n уравнение $F^n(u) = 0$ имеет решение β_n и что условия теоремы 4 выполнены для процесса $X_t = -t + W_t$.

Имеем $\lim_{n\to+\infty} I_n(q) = e^{-1} - e^{-2}$, в то время как $I(q) = 0$. Применяя теорему 4, получаем, что для всех непрерывных ограниченных функций

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{C}_T^n = E_{P^*} g(S).$$

Заметим, что предельная модель имеет единственную мартингальную меру $P^* \neq Q$. В частности, для европейских опционов пут получаем неравенство, противоположное неравенству примера 1:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{C}_T^n < E_Q(K - S_T)^+.$$

Авторы признательны V. Rivero и M. E. Caballero за полезные обсуждения и предложения во время пребывания в Гуанахуато и Мехико в рамках проекта ECOS M07M01.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамовиц М.*, *Стиган И. А.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979, 830 с.
2. *Barndorff-Nielsen O. E.* Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size. — Proc. Roy. Soc. Lond., 1977, v. 353, p. 401–419.
3. *Barndorff-Nielsen O. E.*, *Halgreen C.* Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse Gaussian distributions. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., 1977, v. 38, № 4, p. 309–311.
4. *Bellini F.*, *Frittelli M.* On the existence of minimax martingale measures. — Math. Finance, 2002, v. 12, № 1, p. 1–21.
5. *Bertoin J.* Lévy Processes. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996, 265 p.
6. *Carr P.*, *Geman H.*, *Madan D.*, *Yor M.* The fine structure of asset returns: an empirical investigation. — J. Business, 1999, v. 2, p. 61–73.
7. *Choulli T.*, *Stricker C.* Minimal entropy-Hellinger martingale measure in incomplete markets. — Math. Finance, 2005, v. 15, № 3, p. 465–490.
8. *Choulli T.*, *Stricker C.*, *Li J.* Minimal Hellinger martingale measures of order q. — Finance Stoch., 2007, v. 11, № 3, p. 399–427.
9. *Csiszár I.* Information-type measure of divergence of probability distributions. — MTA Osztaly Kezlemenyei, 1987, v. 17, p. 123–149; p. 267–299.
10. *Eberlein E.* Jump-type Lévy processes. — Handbook of Financial Time Series. Ed. by T. G. Andersen et al. Berlin: Springer-Verlag, 2009, p. 439–455.
11. *Eberlein E.*, *Hammerstein E. A.* Generalized hyperbolic and inverse Gaussian distributions: Limiting cases and approximations of processes. — Progr. Probab., 2004, v. 58, p. 221–264.
12. *Eberlein E.*, *Jacod J.* On the range of option prices. — Finance Stoch., 1997, v. 1, № 2, p. 131–140.
13. *Eberlein E.*, *Keller U.* Hyperbolic distributions in finance. — Bernoulli, 1995, v. 1, № 3, p. 281–299.
14. *Eberlein E.*, *Özkan F.* Time consistency of Lévy models. — Quant. Finance, 2003, v. 3, № 1, p. 40–50.
15. *Esche F.*, *Schweizer M.* Minimal entropy preserves the Lévy property: how and why. — Stochastic Process. Appl., 2005, v. 115, № 2, p. 299–327.

16. *Föllmer H.*, *Schweizer M.* Hedging of contigent claims under incomplete information. — Applied Stochastic Analysis. Ed. by M. H. Davis and R. J. Elliott. London–New York: Gordon and Breach, 1991, p. 389–414. (Stochastics Monogr., v. 5.)
17. *Fritelli M.* Introduction to a theory of value coherent with the no-arbitrage principle. — Finance Stoch., 2000, v. 4, № 3, p. 275–297.
18. *Fujiwara T.*, *Miyahara Y.* The minimal entropy martingale measures for geometric Lévy processes. — Finance Stoch., 2003, v. 7, № 4, p. 509–531.
19. *Grandits P.* On martingale measures for stochastic processes with independent increments. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 1, с. 87–100.
20. *Goll T.*, *Rüschendorf L.* Minimax and minimal distance martingale measures and their relationship to portfolio optimization. — Finance Stoch., 2001, v. 5, № 4, p. 557–581.
21. *Hubalek F.*, *Sgarra C.* Esscher transforms and the minimal entropy martingale measure for exponential Lévy models. — Quant. Finance, 2006, v. 6, № 2, p. 125–145.
22. *Жакод Ж.*, *Ширяев А.Н.* Предельные теоремы без случайных процессов, т. 1, 2. М.: Наука, 1994, 542 с.; 366 с.
23. *Jakubenas P.* On option pricing in certain incomplete markets. — Тр. МИАН, 2002, т. 237, с. 123–142.
24. *Jeanblanc M.*, *Klöppel S.*, *Miyahara Y.* Minimal f^q-martingale measures of exponential Lévy processes. — Ann. Appl. Probab., 2007, v. 17, № 5/6, p. 1615–1638.
25. *Kallsen J.* Optimal portfolios for exponential Lévy processes. — Math. Methods Oper. Res., 2000, v. 51, № 3, p. 357–374.
26. *Kallsen J.*, *Shiryaev A. N.* The cumulant process and Esscher's change of measure. — Finance Stoch., 2002, v. 6, № 4, p. 397–428.
27. *Kramkov D.*, *Schachermayer W.* The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. — Ann. Appl. Probab., 1999, v. 9, № 3, p. 904–950.
28. *Madan D. B.*, *Seneta E.* The Variance Gamma (VG) model for share market returns. — J. Business, 1990, v. 63, p. 511–524.
29. *Miyahara Y.* Minimal entropy martingale measures of jump type price processes in incomplete assets markets. — Asian-Pacific Financial Markets, 1999, v. 6, № 2, p. 97–113.
30. *Prause K.* The generalized hyperbolic model: estimations, financial derivatives and risk measures. Ph.D. Thesis. Freiburg: Albert Ludwig University of Freiburg, 1999.
31. *Рогозин Б. А.* О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 4, с. 656–670.
32. *Sato K.* Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 486 p.
33. *Schweizer M.* On the minimal martingale measure and the Föllmer–Schweizer decomposition. — Stochastic Anal. Appl., 1995, v. 13, № 5, p. 573–599.
34. *Schweizer M.* A guided tour through quadratic hedging approaches. — Option Pricing, Interest Rates and Risk Management. Ed. by E. Jouini, J. Cvitanic, and M. Musiela. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, p. 538–574.
35. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 2004, 1008 с.

Поступила в редакцию
17.VII.2008

Исправленный вариант
21.IV.2009