

ワンポイント講座

包絡分析法 DEA[†]

刀根 薫*

1. はじめに

DEA は多入力多出力系のシステムの効率性を相対的に評価するための手法であり、1978 年に Charnes 等[1]によって提唱された。特定の生産関数の形を仮定する Cobb-Douglas 型のパラメトリックなアプローチと異なり、本質的にノンパラメトリックな立場を取る。DEA は元来、非営利公企業体(学校、図書館、公立病院等)の効率評価のために開発されたが、その後、営利を目的とする企業体(銀行、ホテル等)の効率性評価にも幅広く使用されるにいたっている。手法としては線形計画法を用いるために、オペレーションズ・リサーチやマネジメントサイエンスの研究者にとって新しい恰好のテーマであり、活発な研究がなされている。

本稿では、簡単な例を用いて、その概要を紹介する。

2. 比率尺度による効率性の測定

一般に事業体の活動は資源を投入し便益を産出する変換過程とみることもできる。そのとき

$$\frac{\text{産出}}{\text{投入}}$$

という比を用いて、その変換過程の効率性を測定することがある。それを比率尺度という。こういった指数は工学や技術評価の分野ではよく用いられており、例えば、熱効率や燃費なども比率尺度である。いま、同種の投入項目と産出項目をもつ

事業体が複数個あるとき、比率尺度による効率値の大小によってそれらの事業体の相対比較を行うことはごく自然なことであり、現に経営分析の手段として用いられている。比率尺度の根底には、より少ない投入で、より大きな産出を得ることが効率的であるあるという考え方があることは言うまでもない。

表1 1入力、1出力の例

営業所	A	B	C	D	E	F	G	H
営業人数	2	3	3	4	5	5	6	8
売上高	1	3	2	3	4	2	3	5
売上高/人	0.5	1	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625

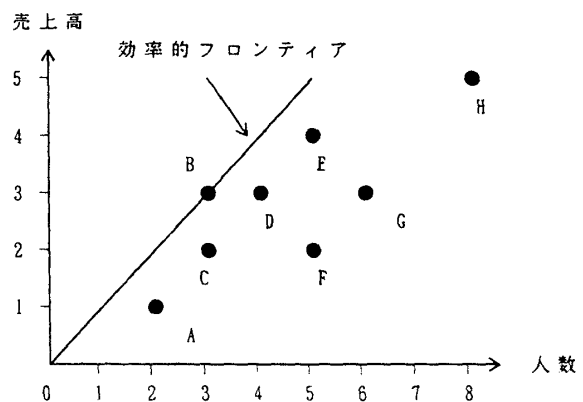


図1 営業所の比較

ここで、1入力、1出力という最も簡単な例につき、DEAの基本的な考えかたを示す。8つの事業体があり、営業人数(人)と売上高(単位：千万円)が表1のとおりとする。一番下の欄に1人当りの売上高(千万円/人)を示す。1人当りの売上高はBがトップでFが最下位である。営業人数を入力とし、売上高を出力として、グラフにプロットしてみよう。それが図1である。Bと原点を結ぶ直線の勾配(それが1人当りの売上高)が一番大きく、その線を効率的フロンティアと呼ぶ。そして

[†] Data Envelopment Analysis

* Kaoru TONE

埼玉大学大学院政策科学研究科

Graduate School of Policy Science, Saitama University

すべての営業所の点はこのフロンティアの下側に包みこまれる。これが包絡分析法という言葉の由来である。英語の Data Envelopment Analysis の envelopment とは包むことであり、文字どおり読めば「データを包囲する分析法」となる。フロンティア線は最優秀営業所のパフォーマンスを示す。そして、この最優秀パフォーマンス線をもとに他の営業所の成績を評価するのが包絡分析法の基本的な発想である。この例では、営業所 B は効率的であるが、他はすべて非効率的である。そこで、B の効率値を 1 と定め、他の営業所の効率値を

$$\frac{\text{他の営業所の 1 人当り売上高}}{\text{B の 1 人当り売上高}}$$

と定義する。この例では B の 1 人当りの売上高が 1 であるから他の効率値は 1 人当り売上高そのものになる。こうして表 2 を得る。F の効率が最低であり、B の 40% の効率しか出していないことがわかる。

図 2 をもとに非効率的な営業所を効率化する改善法を考えてみる。例として、A 店をとる。A 店を効率化する 1 つの方法は営業人数を減らして効率的フロンティアに移すこと、すなわち、図 2 の点 $A_1(1,1)$ にすることである。これは入力を削減するという方針での効率化であるが、出力を増やすことによる改善案も考えられる。すなわち、図の点 $A_2(2,2)$ に移ることである。その他、線分 $\overline{A_1A_2}$ 上のどの点に移す案でも良い。この範囲ならば現在の営業人数を増やさず、現在の売上高を落と

表 2 効率値

営業所	A	B	C	D	E	F	G	H
効率値	0.5	1	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625

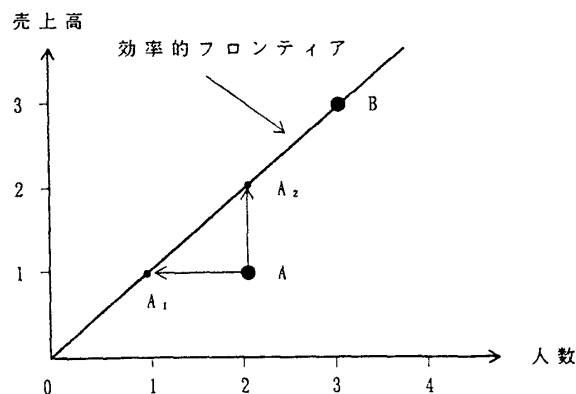


図 2 A 店の効率化

さず効率化できるからである。

DEA の特徴は、この簡単な例が示すように、各事業体の効率性を相対評価するとともに、非効率的な事業体を効率化する方法を具体的に指摘する手段を提供することにある。

3. 2 入力 1 出力の場合

表 3 に 2 入力、1 出力のスーパーマーケットの例を示す。入力 1 は従業員数(単位: 10 人)、入力 2 は売場面積(単位: 千平方メートル)、出力は売上(単位: 億円)である。ただし、売上はすべて 1 億円に換算している。つまり、1 億円の売上を出すための従業員数と売り場面積である。入力 1 / 出力、入力 2 / 出力を座標軸として各店をグラフに示したものが図 3 である。さて、効率性を考えた場合、なるべく少ない入力で所与の出力を出している店ほど優れているとみるのは自然であろう。そういった見方から点 C, D, E を結ぶ効率的フロンティアがクローズアップされる。さらに、C から水平に伸びる線と、E から垂直に立つ線までを考慮するとすべてのデータはこれらの線分で囲まれた領域内に包み込まれていると考えられる。そこでこの領域を生産可能集合と呼ぶ。

効率的フロンティア上の点は、一方の入力を削減しようとするれば、生産可能集合内に止まるため

表 3 2 入力、1 出力の例

店	A	B	C	D	E	F	G	H	I
従業員数 x_1	4	7	8	4	2	5	6	5.5	6
売場面積 x_2	3	3	1	2	4	2	4	2.5	2.5
売上 y	1	1	1	1	1	1	1	1	1

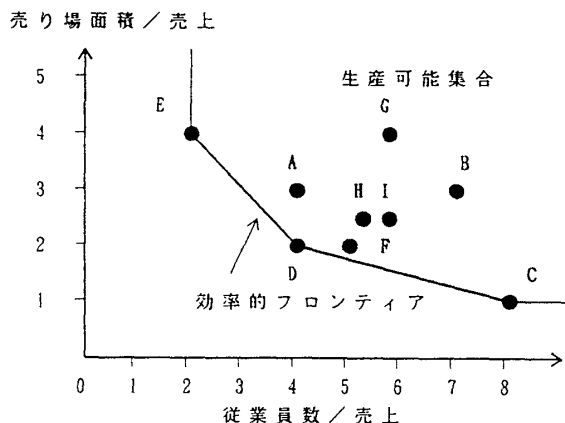


図 3 2 入力、1 出力の例

には、他方の入力を増加させねばならないということを図から読みとることができる。これは、入力の代替性を仮定しとき、パレート最適の状態にあることを意味する。それに対して、生産可能集合の内部にある例えばA店のような場合、両方の入力を同時に削減してもなお生産可能集合内に止まることができる。すなわち、A店は非効率的であると判断される。

効率的フロンティア上の店(C, D, E)の効率値は1であるが、非効率的な店の効率値はフロンティア線をもとに決めることができる。例えば、A店の場合、原点と点Aを結ぶ線がフロンティア線DEと交わる点をPとすれば(図4参照),

$$\frac{OP}{OA} = 0.8571$$

として、A店の効率値を定めることができる。この効率値0.8571は現在の2つの入力を一様に0.8571倍に縮小すればAが効率的フロンティアに移ることを意味している。また、Aを非効率と判定させるのは店D, Eの存在であることを意味する。このD, EをAの参照集合(reference set)とよぶ。A店を効率化するためには他にもいくつかの可能性がある。例えば、点Dは人は減らさず、面積を減らす案であり、点A₁は面積は減らさず、人を削減する案である。この場合、生産可能集合内での資源の代替性を仮定していることに注意しておきたい。

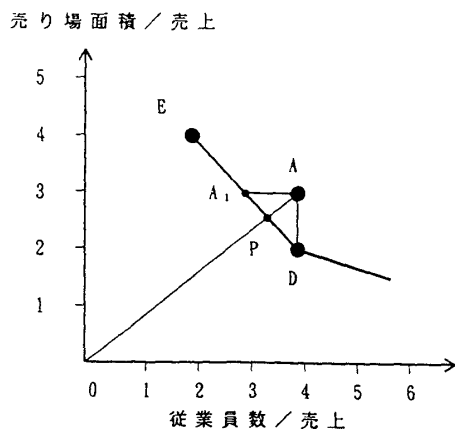


図4 A店の改善案

4. 展開

前節で述べたことを、多入力、多出力をもつ事業体に展開すれば次のようになる。DEAでは一般に事業体をDMU(Decision Making Unit)とよび、 n 個のDMUがあり、各DMUは m 個の入力と s 個の出力をもつとする。(入、出力値は原則として正と仮定する。)次のように、記号を定める。

x_{ij} = DMU_jの*i*番目の入力の値
 $(i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$

y_{ij} = DMU_jの*i*番目の出力の値
 $(i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, n)$

$X = (x_{ij})$: 入力データ行列

$Y = (y_{ij})$: 出力データ行列

そのとき、生産可能集合 P を次のように定義する。

$$P = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \geq X\lambda, \mathbf{y} \leq Y\lambda, \lambda \geq \mathbf{0}\}, \quad (1)$$

ここに、 λ は n 次元の非負ベクトルである。この生産可能集合の仮定のもとで、DEAの基本モデルであるCCR(Charnes-Cooper-Rhodes)モデルは次の線形計画問題(LP)によって表現される。

$$\langle CCR_k \rangle \min \theta_k \quad (2)$$

$$\text{制約式 } \theta_k \mathbf{x}_k - X\lambda \geq \mathbf{0} \quad (3)$$

$$\mathbf{y}_k - Y\lambda \leq \mathbf{0} \quad (4)$$

$$\lambda \geq \mathbf{0}. \quad (5)$$

ここに、 k はDMU_kを示し、 $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k$ はDMU_kの入出力値からなるベクトルである。このLPを $k = 1, \dots, n$ につき n 回解く。

生産可能集合 P と上のLPのとの関係は次のようになる。 $\langle CCR_k \rangle$ の制約式はベクトル $(\theta \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ が P に属することを要求している。目的関数は、入力 $\mathbf{x}_k$ を一律に θ_k 倍縮小するときの、最小の縮小率を求めている。すなわち、出力 $\mathbf{y}_k$ 以上を保証しながら、入力を最大限縮小するような活動を P の中で探していることに当たる。この θ_k の最小値を θ_k^* とすれば、この値がDMU_kの効率値である。また、 λ の最適値を λ^* とし、それをもとに、入力余剰と出力不足を次のように定義する。

$$\langle \text{入力余剰} \rangle \mathbf{s}_x^* = \theta^* \mathbf{x}_k - X\lambda^* \quad (6)$$

$$\langle \text{出力不足} \rangle \mathbf{s}_y^* = Y\lambda^* - \mathbf{y}_k. \quad (7)$$

そのとき、DMU_kは次の条件を満たすとき効率的

である.

1. $\theta_k^* = 1$
2. $\langle CCR_k \rangle$ のすべての最適解に対して
 $s_x^* = 0, s_y^* = 0$

この条件を満たさない DMU は非効率的であるが, 効率化への案(の一つ)は次のようになる.

$$x_k^* = \theta_k^* x_k - s_x^* \quad (8)$$

$$y_k^* = y_k + s_y^*. \quad (9)$$

さて, 線形計画問題 $\langle CCR_k \rangle$ の相対問題は v, u を変数として次のとおりである.

$$\langle DP_k \rangle \quad \max u^T y_k \quad (10)$$

$$\text{制約式 } v^T x_k = 1 \quad (11)$$

$$-v^T X + u^T Y \leq 0 \quad (12)$$

$$v \geq 0, u \geq 0. \quad (13)$$

そしてこの線形計画問題は次の分数計画問題と等価である. (この辺の詳細については文献[2]を参照されたい.)

$$\langle FP_k \rangle \max \frac{u^T y_k}{v^T x_k} \quad (14)$$

$$\text{制約式 } \frac{u^T y_j}{v^T x_j} \leq 1 \quad (\forall j) \quad (15)$$

$$v \geq 0, u \geq 0. \quad (16)$$

この分数計画問題には次のような解釈を与えることができる. 目的関数は DMU_k の出力値の加重和と入力値の加重和の比であり, 比率尺度を示す. 加重値(ウェイトベクトル)がこのとき変数であり, それを決める方針は DMU_k の比率尺度の最大化である. ただし, すべての DMU をこの同じ加重値で比率尺度で測定し, その値が 1 を越えないように歯止めをつけたのが制約式である. 当然のことながら目的関数の可能な最大値は 1 であり, 1 であることが DMU_k が効率的であるための必要条件である. (十分条件ではないが.) 最適目的関数値が 1 以下ならば DMU_k は非効率的であり, その値が効率値である.

DEA は複数の入, 出力値の加重和に基づく比率尺度法であるが, 加重値(ウェイトベクトル)を決めるとき, 固定した値(固定ウェイト)を採用するのではなく, 当該の DMU にとって最も有利になるように決める. したがって, 最適ウェイトは DMU 毎に異なることになる. ある意味で最も寛容な評価法である. DEA による効率値は, 他のど

んな固定ウェイトの比率尺度法による効率値よりも小ではない. このような方針で効率を測定した場合, 入出力項目の選定が適正である限り, どの DMU からクレームはつかないであろう.

5. おわりに

これまで説明してきたように, DEA は多入力, 多出力をもつ事業体の相対的な効率性を測定し, 改善案を提示する手法である. それは従来用いられてきた Cobb-Douglas タイプの方法のように特定の関数形によらない, いわゆるノンパラメトリックな方法である. 1978 年に始まったこの方法は急速な発展を遂げてきた. 特に最近の 10 年間の進歩はめざましい. 理論面では(1)規模の収益性の解明, (2)生産可能集合に対する様々な仮定, (3)入出力項目の特性を考慮したモデルの導入, (4)データの確率的変動を取り入れた DEA 等が研究対象となっている. 応用面では(1)企業体の効率性からさらに進んで, (2)コスト効率性, (3)時系列的な変動の解明等に適用され始めている. 我が国では日本 OR 学会を中心として活発な研究がなされている([3]参照).

参 考 文 献

- [1] Charnes, A., W.W.Cooper and E.Rhodes (1978), "Measuring the Efficiency of Decision Making Units," *European Journal of Operational Research*, **3**, 429-444.
- [2] 刀根 薫「経営効率性の測定と改善」日科技連, 1993.
- [3] 日本オペレーションズ・リサーチ学会 第34回シンポジウム論文集, "経営効率性評価—DEA 法のフロンティアと応用事例—," 1995年10月15日.

(1995年12月15日 受付)

[問い合わせ先]

〒338 浦和市下大久保255

埼玉大学政策科学研究科

刀根 薫 TEL : 048-858-3096

FAX : 048-852-0499

E-mail : tone@poli-sci.saitama-u.ac.jp