研 究

研削仕上面あらさのピッチに関する研究*

松 井 正 己** 田 牧 純 一** 長 谷 川 隆***

Study on the Pitch of Ground Surface Roughness

Seiki MATSUI, Junichi TAMAKI, Takashi HASEGAWA

In this paper, the probability distribution for the pitch of ground surface roughness is considered both theoretically and experimentally by a statistical method. Results obtained are as follows: (1) The probability density function and the mean value of the pitch of ground surface roughness are analysed theoretically by a statistical method. And the relation between the mean value of pitch and the mean value or the standard deviation of ground surface roughness is derived. (2) The influences of the distribution for the position of grain cutting edge, the distribution for the tip angle of grain cutting edge, the elastic displacement of grain cutting edge and the number of spark-out on the distribution for the pitch of ground surface roughness are obtained by Monte Carlo simulation. Furthermore, the mean value of pitch is calculated from the power spectrum of ground surface roughness curve obtained by Monte Carlo simulation. (3) A few experiments are performed, and the validity of the authors' theoretical analysis is confirmed.

1. 緒 言

研削仕上面あらさに関する研究は多いが，そのほとんどは縦方向のあらさの大きさ（たとえば振幅）を扱っており，横方向のあらさの性質（たとえばピッチ）についてはあまり報告されていない．わが国では，小野[1]，奈良[2]などの研究がある程度である．本研究は従来筆者らが行ってきた統計的手法により，研削仕上面あらさのピッチの確率分布および平均値について理論的解析を行い，更にモンテカルロシミュレーションおよび実験による考察を加えたものである．なお本研究の理論的解析で用いた仮定は次の通りである．(i) 砥粒切れ刃は先端角 $2\bar{\alpha}$ の円すい形とする．(ii) 砥粒切れ刃分布は三次元的にランダムで切れ刃1個の占める平均体積は一定値 W_0 になる．(iii) 砥粒切れ刃の工作物に接触した部分は切れ刃形状通りに削りとられる．(iv) 砥粒切れ刃の摩滅，破砕，脱落は考えない．

以下本研究においては平面研削を取扱う．

2. 研削仕上面あらさのピッチの理論的解析

2.1 研削仕上面あらさのピッチの確率分布

いま平面研削において，図1(a)のように，Oを砥石軸，AXを工作物の理想的な仕上がり面とする．また工作物送り方向に垂直な工作物断面を任意に定め，これを基準断面とよぶことにする．この基準断面がOAの位置にきた瞬間を考え，これを基準として砥石の円周方向に s（反時計方向を正），半径方向に δ の位置にある砥粒切れ刃の座標を (s, δ) で表す．切れ刃 (s, δ) はある時間経過後基準断面を切削するが，その切削高さ H は，$H=\delta+G^2s^2$ で与えられる．ここで $G\equiv v/V\sqrt{D}$ で，V, D, v はそれぞれ砥石周速度，砥石直径，工作物速度である．また Δ は半径方向切込み深さである．

さてこの基準断面に創成された研削仕上面あらさ曲線において，となりあった山と山の距離 $\overline{A_iC_i}$ を全ピッチ (P_{i0})，となりあった山と谷の距離 $\overline{A_iB_i}$, $\overline{B_iC_i}$ を半ピッチ (P_{i1}, P_{i2}) とよぶことにする（図2参照）．

いま H 一定のもとで半ピッチ P_{i1} が実現するために

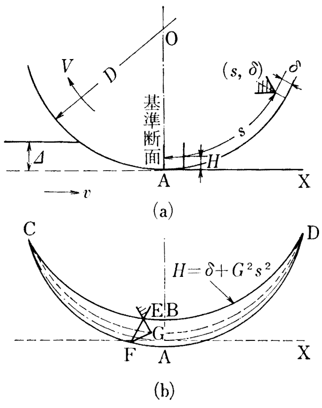

図1 研削モデル

---

* 原稿受付 昭和51年1月23日．昭和50年度精機学会秋季大会学術講演会（昭和50年11月23日）にて発表．

** 正会員 東北大学工学部（仙台市荒巻字青葉）
*** 東北沖電気(株)（福島市笹木野字館1）

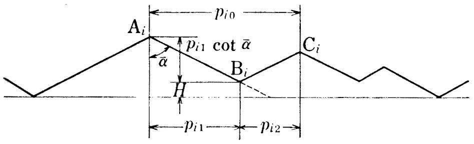

図 2　研削仕上面あらさのピッチ

は，$\sqrt{H+p_{i1}\cot\bar{\alpha}}/G\leqq\pi D/2$ の条件のもとで，砥石内の立体（体積 $U=16V\sqrt{D}\tan\bar{\alpha}(p_{i1}\cot\bar{\alpha}+H)^{2.5}/15v$）の中に砥粒切れ刃が１個も存在しないことが必要で，その確率 $\Pr(P_{i1}\geqq p_{i1}\text{: }H\text{ 一定})$ は $\exp(-U/W_0)=\exp[-\varphi(H+p_{i1}\cot\bar{\alpha})^{2.5}]$ で表される．ここで，$\varphi\equiv16V\sqrt{D}\tan\bar{\alpha}/15vW_0$ である．

したがって H 一定のもとで，半ピッチ P_{i1} の確率密度関数 $f_0(p_{i1})$ は次式で表される．

$$
\begin{aligned}
f_0(p_{i1}) &= -\frac{\partial\Pr(P_{i1}\geqq p_{i1}\text{: }H\text{ 一定})}{\partial p_{i1}}\\
&=2.5\varphi\cot\bar{\alpha}(H+p_{i1}\cot\bar{\alpha})^{1.5}\times\\
&\quad\exp[-\varphi(H+p_{i1}\cot\bar{\alpha})^{2.5}]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

そこで全体としての半ピッチ P_{i1} の確率密度関数 $f_1(p_{i1})$ は，H の変域 $0\leqq H\leqq\varDelta$ について式(1)の $f_0(p_{i1})$ を積分することによって次式のように求められる．

$$f_1(p_{i1})=\frac{1}{A}\int_0^{\varDelta}f_0(p_{i1})\,\mathrm{d}H \tag{2}$$

ここで $A\equiv\int_0^{\varDelta\tan\bar{\alpha}}\mathrm{d}p_{i1}\int_0^{\varDelta}f_0(p_{i1})\mathrm{d}H$ である．

一方，半ピッチ P_{i2} の確率密度関数も式(2)と同じ形になる．したがって全ピッチ $P_{i0}(=P_{i1}+P_{i2})$ の確率密度関数 $f_2(p_{i0})$ は，P_{i1}, P_{i2} が互いに独立とすると，$f_2(p_{i0})=\int_0^{p_{i0}}f_1(p_{i0}-p_{i1})f_1(p_{i1})\mathrm{d}p_{i1}$ となる．なお半ピッチ P_{i1} の平均 $\bar{P}_{i1}$，全ピッチ P_{i0} の平均 P_{i0} は，それぞれ $\bar{P}_{i1}=\int_0^{\infty}p_{i1}f_1(p_{i1})\mathrm{d}p_{i1}$，$\bar{P}_{i0}=\int_0^{\infty}p_{i0}f_2(p_{i0})\mathrm{d}p_{i0}=2\bar{P}_{i1}$ となる．

いま $V=1\,300$ m/min，$D=140$ mm，$v=5$ m/min，$\varDelta=10\,\mu$m，$W_0=10^6\,\mu\mathrm{m}^3$，$\tan\bar{\alpha}=2.835$，5.67，11.34 として $f_1(p_{i1})$，$f_2(p_{i0})$ を計算した結果を**図 3** に示す．

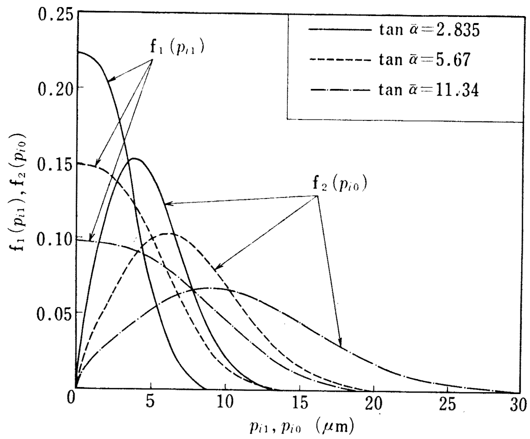

図 3　研削仕上面あらさの半ピッチおよび全ピッチの確率密度関数

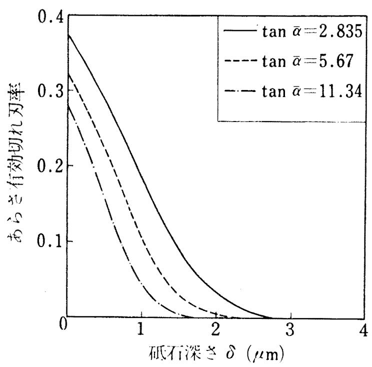

図 4　あらさ有効切れ刃率

2.2　あらさ有効切れ刃率による解析

半ピッチ，全ピッチの平均値は次のようにしても求められる．いま図 1 (b) において，砥石内にとった $H=\delta+G^2s^2$ 曲線上の任意の点 E に存在する砥粒切れ刃 (s,δ) が直角あらさ（研削方向に直角な方向のあらさ）創成に有効であるためには，$\sqrt{H}/G\leqq\pi D/2$ の条件のもとで，砥石内の立体（体積 $U_e=16V\sqrt{D}\tan\bar{\alpha}\,H^{2.5}/15v$）の中に砥粒切れ刃が１個も存在しないことが必要で，その確率 $\Pr_e(s,\delta)$（これをあらさ有効切れ刃率と称す）は次式で表される．

$$\Pr_e(s,\delta)=\exp-\left(\frac{U_e}{W_0}\right)=\exp[-\varphi(\delta+G^2s^2)^{2.5}] \tag{3}$$

さて任意の δ について，$\Pr_e(s,\delta)$ を $-\sqrt{\varDelta}/G\leqq s\leqq\sqrt{\varDelta}/G$ の変域で求めその平均をとると，これがこの δ におけるあらさ有効切れ刃率となる．

いま $V=1\,300$ m/min，$D=140$ mm，$v=5$ m/min，$\varDelta=10\,\mu$m，$W_0=10^6\,\mu\mathrm{m}^3$，$\tan\bar{\alpha}=2.835$，5.67，11.34 としたときのあらさ有効切れ刃率を計算した結果を**図 4** に示す．このあらさ有効切れ刃率から求めた直角あらさ創成に関与する切れ刃総数を N とすると，あらさの全ピッチおよび半ピッチの平均はそれぞれ，測定幅/N，測定幅/$2N$ で表される．

2.3　あらさ曲線の山，谷点の出現をランダムと仮定した場合の解析

この場合は，山と谷の距離すなわち半ピッチ P_{i1} の確率密度関数 $f_1(p_{i1})$ は，$\{\exp(-p_{i1}/\bar{p}_{i1})\}/\bar{p}_{i1}$ で与えられる．また山と山の距離すなわち全ピッチ P_{i0} の確率密度

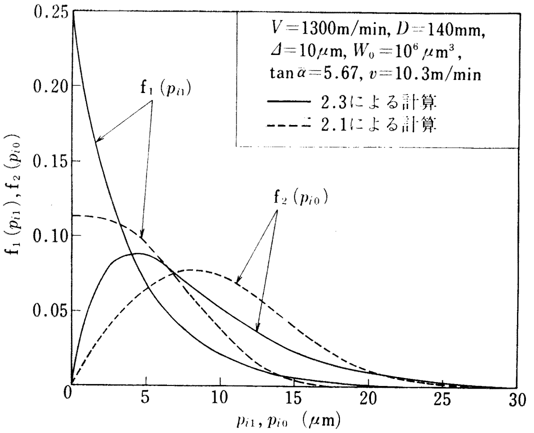

図5 研削仕上面あらさの半ピッチおよび全ピッチの確率密度関数（あらさ曲線の山，谷点の出現をランダムと仮定した場合）

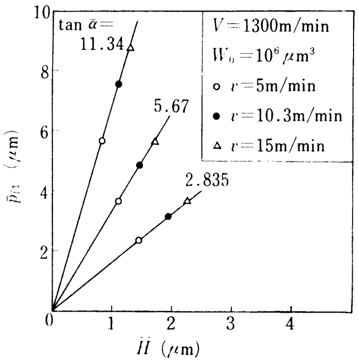

図6 $\bar{p}_{i1}$ と $\bar{H}$ の関係

関数 $f_2(p_{i0})$は，$\{p_{i0}\exp(-p_{i0}/\bar{p}_{i1})\}/(\bar{p}_{i1})^2$ で表される．図5の実線は，$f_1(p_{i1})$，$f_2(p_{i0})$ の計算結果の一例を示す．なおこの場合の半ピッチの平均 $\bar{p}_{i1}$ は2.2節で述べたあらさ有効切れ刃率から求めた．また同図内の点線は，2.1節の解析からえられた $f_1(p_{i1})$，$f_2(p_{i0})$ である．これからあらさ曲線の山，谷点の出現をランダムと仮定することは厳密には不適当であることがわかる．

2.4 直角あらさ H の平均値 $\bar{H}$，標準偏差 H_{rms} と半ピッチの平均 $\bar{P}_{i1}$ との関係

さて $\bar{H}$，H_{rms} は，$\sqrt{\bar{H}/G} \leqq \pi D/2$ の条件のもとで，それぞれ $\bar{H}=0.887\varphi^{-0.4}$，$H_{\mathrm{rms}}=0.380\varphi^{-0.4}$ となる．そこで各種の研削条件における $\bar{H}$ と $\bar{P}_{i1}$ の関係を計算で求めると図6のようになり，近似的に次の関係式がえられる．

$$\bar{P}_{i1}=0.584\tan\bar{\alpha}\,\bar{H}=1.364\tan\bar{\alpha}\,H_{\mathrm{rms}} \qquad (4)$$

これから $\bar{P}_{i1}$ は $V^{-0.4}\cdot D^{-0.2}\cdot v^{0.4}\cdot W_0^{0.4}\cdot(\tan\bar{\alpha})^{0.6}$ に比例することがわかる．

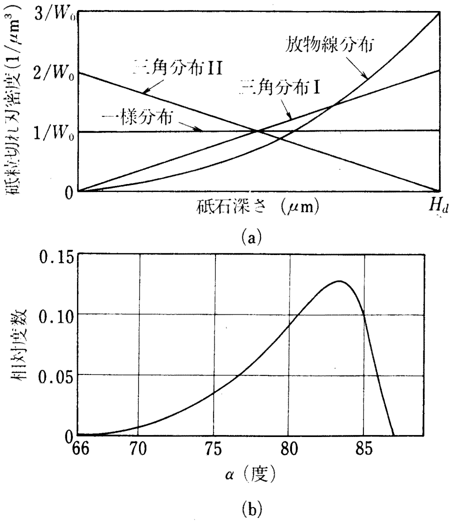

図7 砥粒切れ刃の位置および半頂角の分布モデル

3. モンテカルロシミュレーションによる解析

次に各種の研削条件における研削仕上面あらさピッチの確率分布および平均値をモンテカルロシミュレーションによって求めた．なお以下の解析で共通に用いた研削条件は，$V=1\,300$ m/min，$D=140$ mm，$v=5$ m/min，$\Delta=10$ μm，B（研削幅）$=0.5$ mm，$W_0=10^6$ μm³，$2\bar{\alpha}=160°$ である．

3.1 砥粒切れ刃分布の影響

いま砥粒切れ刃分布は，砥石円周方向，砥石幅方向には一様分布で，砥石深さ方向には図7(a)に示すような分布をすると仮定する．またこの場合，ある砥石深さ H_d（本研究では10 μm）までに存在する砥粒切れ刃総数はどの分布でも等しく，更に一様分布のときの砥粒切れ刃1個の占める平均体積を W_0 とする．

図8(a)にこの場合の解析結果を示す．これから砥粒切れ刃位置の砥石深さ方向の分布が，三角分布II，一様分布，三角分布Iの場合，その順序に全ピッチの平均値が増加していくことがわかる（なおこの場合は砥粒切れ刃の弾性変位は考えていない）．

3.2 砥粒切れ刃の弾性変位の影響

前述の解析においては，砥粒切れ刃の工作物に接触した部分はすべて砥粒切れ刃の形状通りに削りとられると仮定した．しかし実際の場合は，砥粒切れ刃の弾性変位が存在すると思われるのでこの影響についてしらべた．なお砥粒切れ刃の弾性変位量としては中山らの実験式[3]を用いた．

図8(b)は，砥石深さ方向の砥粒切れ刃分布が一様分

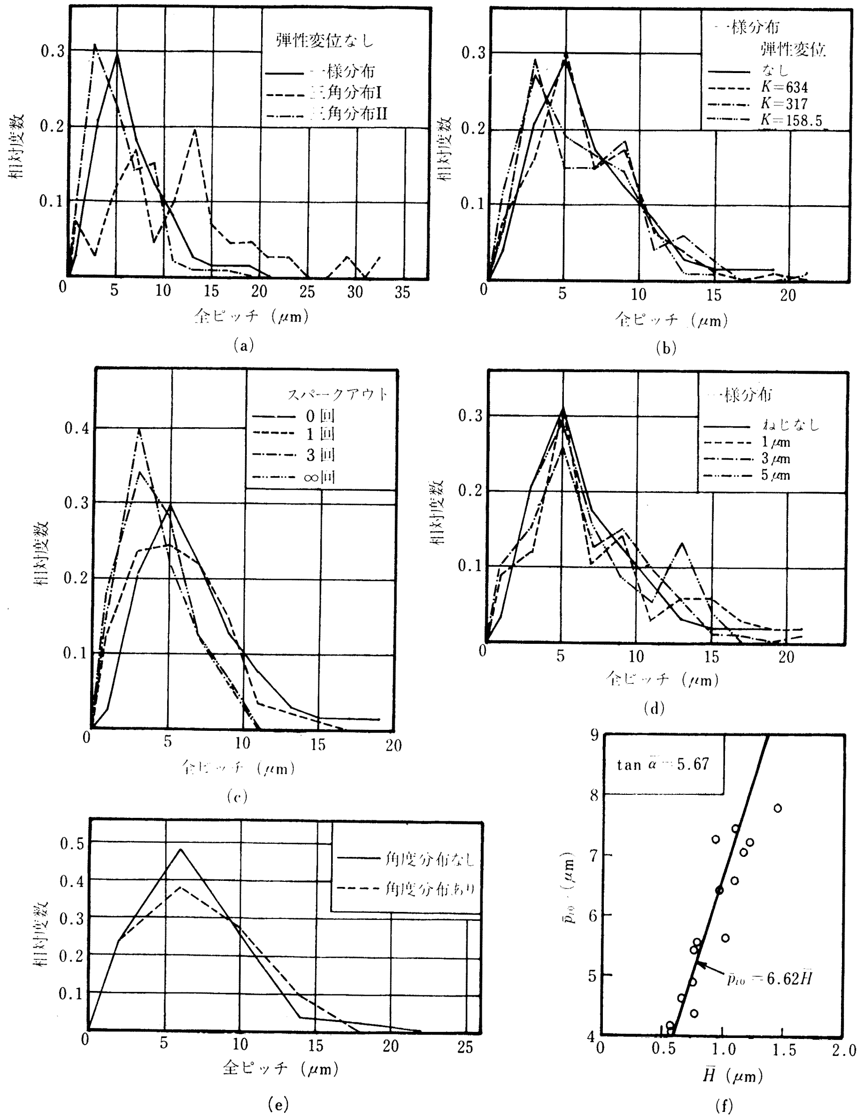

図8　モンテカルロシミュレーションによる解析

布の場合の解析結果である．なお同図内のパラメータK（単位はkg, μm）は弾性変位の程度を示す変数で，この値が小さいほど弾性変位の度合が大きい[4]．これから砥粒切れ刃の弾性変位の度合が大きくなるにつれて全ピッチの平均値が減少していくことがわかる．なお砥石深さ方向の砥粒切れ刃分布が三角分布I, IIの場合も同じ傾向がみられた（解析結果は省略した）．

3.3　スパークアウト回数の影響

図8(c)は，スパークアウト回数が0, 1, 3および∞の場合の解析結果である．スパークアウト回数を∞にすると研削仕上面あらさは極限あらさ[5]になる．なおこの場合は，砥石深さ方向の砥粒切れ刃分布は一様分布で，また砥粒切れ刃の弾性変位は考えていない．

これからスパークアウト回数が増加するにつれて全ピッチの平均値が減少していき，極限あらさの平均全ピッチの値に近づいていくことがわかる．

3.4　砥石表面にドレッシングによってねじが形成された場合の影響

これまでは砥石表面は理想的な円筒面と考え，これに砥粒切れ刃の分布を考慮して解析を進めてきた．しかし先端のするどいドレッサを使用したり，ドレッサの送り速度を早くしたりすると，砥石表面にねじが形成される場合が多くみられる．そこでこれらの影響についてしらべた．なお最初は砥石深さ方向の砥粒切れ刃分布は一様分布で，これにドレッシングによって砥石表面に三角形状のねじ（ピッチ140 μm，高さ1, 3, 5 μm）が形成されると仮定する[6]．なおこの場合は砥粒切れ刃の弾性変位は考えていない．

図8(d)にこの場合の解析結果を示す．これからねじの高さと平均全ピッチの間には一義的な関係はみられず，研削仕上面あらさの周期成分は全ピッチに直接影響しないことがわかる．

3.5　砥粒切れ刃先端角の分布の影響

前述の解析においては，砥粒切れ刃形状は平均的に考えて先端角$2\bar{\alpha}$(一定)の円すい形と仮定した．しかし実際には砥粒切れ刃先端角はある分布をしていると思われ

るのでこの影響についてしらべた．

いま砥粒切れ刃先端半頂角αは，図7(b)のような分布（αの最大値86°，αの最小値66°，αの平均値($\bar{\alpha}$)80°）をし，この分布は砥石の深さによって変わらないと仮定する[7]．なおこの場合は，砥石深さ方向の砥粒切れ刃分布は一様分布で，また砥粒切れ刃の弾性変位は考えていない．

図8(e)にこの場合の解析結果を示す．これから砥粒切れ刃先端角の分布が存在しても，砥粒切れ刃先端角を一定（$=2\bar{\alpha}$）としたときとほとんど変わらないことがわかる．

3.6　全ピッチの平均値とあらさの平均値との関係

3.1～3.5節の各場合について，全ピッチの平均値$\bar{p}_{i0}$とあらさの平均値$\bar{H}$の関係を求めると図8(f)のようになる．なお図中の実線は式(4)から求めた理論直線である．

3.7　研削仕上面あらさ曲線のパワースペクトルによる平均全ピッチの計算

いまモンテカルロシミュレーションによってえられた研削仕上面あらさ曲線が完全にランダムであれば，平均全ピッチ$\bar{P}_0$は研削仕上面あらさ曲線のパワースペクトルを用いて次式で計算できる[8]．

$$\bar{P}_0=2\pi\left(\frac{m_2}{m_4}\right)^{0.5} \qquad (5)$$

ここでm_2: あらさ曲線のパワースペクトルの原点のまわりの2次モーメント，m_4: あらさ曲線のパワースペクトルの原点のまわりの4次モーメントである．

なおパワースペクトルを求めるとき，研削仕上面あらさ曲線は測定間隔1 μm，測定長さ500 μmで数値化し，また自己相関関数の最大おくれLは50 μm，100 μmの2種類を用い，更にパワースペクトルの平滑化にはhanning windowを用いた．

表1は式(5)を用いて計算した平均全ピッチ(計算値と称す)と研削仕上面あらさ曲線（シミュレーション）から直接測定された平均全ピッチ（解析値と称す）とを比較したものである．これから次のことがわかる．

（i）計算値と解析値は定性的に傾向が一致しているが，前者は後者よりかなり低い値を示している（砥石表面にねじが形成された場合を除く）．

表1　全ピッチの計算値と解析値の比較

研削モデル			全ピッチ(計算値)(μm) $L=50\,\mu m$	全ピッチ(計算値)(μm) $L=100\,\mu m$	全ピッチ(解析値)(μm)
一様分布	砥粒切れ刃の弾性変位	弾性変位なし	5.48	5.36	7.19
		$K=634$ (kg, μm 単位)	4.78	4.68	6.47
		$K=317$　（〃）	4.75	4.64	6.30
		$K=158.5$　（〃）	4.45	4.36	5.60
	スパークアウト回数	1回	4.56	4.50	5.53
		2回	4.16	4.19	4.70
		3回	3.86	3.83	4.22
		∞回（極限あらさ）	3.80	3.78	4.13
	砥石表面にねじ形成（ピッチ140 μm）	ねじ山1 μm	4.75	4.60	7.42
		ねじ山3 μm	5.94	5.53	7.01
		ねじ山5 μm	8.55	7.60	7.21
	切れ刃先端角	132°～172°	4.78	4.69	7.41
三角分布II	砥粒切れ刃の弾性変位	弾性変位なし	4.73	4.67	5.54
		$K=634$ (kg, μm 単位)	4.47	4.41	5.06
		$K=317$　（〃）	3.70	3.66	4.71
		$K=158.5$（〃）	4.14	4.08	4.41

備考：Lは自己相関関数の最大おくれ

（ii）自己相関関数の最大おくれの計算値に及ぼす影響は少ない．

（iii）砥石表面にねじが形成された場合，解析値はねじ山の高さにかかわらずほぼ一定値をとっているのに対し，計算値はねじ山の高さの増加と共に増す傾向にある．これは表面にねじの形成された砥石で研削する場合，工作物表面にねじが形成され，研削仕上面あらさ曲線に周期成分が発生し，式(5)の成立する条件，すなわち研削仕上面あらさ曲線が完全にランダムであるという条件を満足しなくなるからである．

さて(i)で述べたように，計算値と解析値はかなり異なっており，しかも計算値が常に小さな値を示している．これは研削仕上面あらさ曲線を等分割して離散化する際，その分割幅の値によって，離散化されたあらさ曲線と離散化する前の連続あらさ曲線間にずれが生ずるためと思われる．そこでこの分割幅を変化させた場合，平均全ピッチの計算値がどのように変化するかをしらべた．

表2はその計算結果である．なおこの場合は，砥石深さ方向の砥粒切れ刃分布は一様分布で，また砥粒切れ刃の弾性変位は考えていない．

これから分割幅を大きくしていくほど計算値は増加していき，分割幅1.5 μm付近で解析値に近い値を示すことがわかる．この理由は，分割幅を大きくしすぎると本

表2　あらさ曲線の分割幅の影響

分割幅 (μm)	全ピッチ（計算値）(μm)	
	L=50 μm	L=100 μm
0.25	3.42	3.28
0.5	3.55	3.41
1.0	5.48	5.36
1.5	7.61	7.53
2.0	8.40	8.32

備考：Lは自己相関関数の最大おくれ．同条件の全ピッチ(解析値)は 7.19 μm

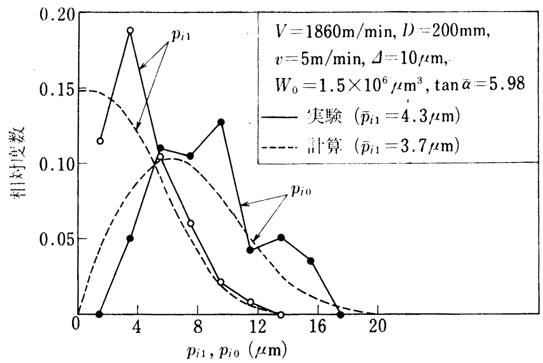

図9　研削仕上面あらさのピッチの実測結果の一例

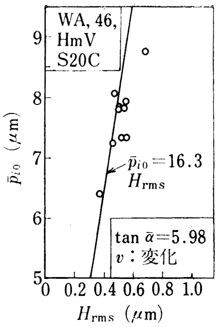

図10　$\bar{p}_{i0}$ と H_{rms}の関係

来のスペクトルに対する情報が失われ，逆に細かくしすぎると離散化されたデータに解析モデルをあてはめる際の誤差の影響を高周波部分で著しく受けるためと思われる．

4. 実験的考察

次にこれまで述べてきた理論的解析を検討するために二，三の実験を行った．

研削実験はO社製，PSG-5B型平面研削盤で行い，砥石はK社製，WA, 46, HmV(D=200 mm，V=1 860 m/min，ドレッサの送り速度 v_d=400 mm/min，ドレッサの切込み t_d=10 μm)，工作物は軟鋼 (S 20 C) (v=3～10 m/min, Δ=10 μm) で，ノリタケクール研削液を使用した．また研削仕上面あらさは，K社製，SE-3A型万能表面あらさ計（縦倍率5 000倍，横倍率100倍）で測定した．そして得られた研削仕上面あらさ曲線を更にN社製，6CT型万能投影機で20倍に拡大して，その半ピッチ，全ピッチを実測した．

図9に実験結果の一例を示す．なお同図内の点線は，2.1節で述べた理論的解析によって計算した理論曲線で，実験結果と近似的に一致している（計算の際，W_0, $\bar{\alpha}$ の値は引っかき転写法[9]による実測値を用いた)．

次に多くの実測したあらさ曲線から，そのときの H_{rms} と $\bar{p}_{i0}$ の関係を求めると**図10**のようになる．なお同図内の実線は，式(4)による理論直線である．

5. 結　　言

筆者らは，本報において，統計的手法により，研削仕上面あらさピッチの確率分布について理論的，実験的考察を行った．得られた結果をまとめると次のようになる．

(1) 統計的手法により，研削仕上面あらさピッチの確率分布および平均値の理論的解析を行った．そしてピッチの平均値と，直角あらさの平均値および標準偏差（二乗平均平方根あらさ）との間の関係式を導いた．

(2) モンテカルロシミュレーションにより，砥粒切れ刃位置の分布，砥粒切れ刃先端角の分布，砥粒切れ刃の弾性変位，スパークアウト回数などの研削仕上面あらさピッチに及ぼす影響をしらべた．更にシミュレーションによって得られたあらさ曲線のパワースペクトルから平均ピッチを計算した．

(3) 二，三の実験を行い，筆者らの理論的解析の妥当なことをたしかめた．

文　　献

1) 小野浩二：研削仕上，槇書店 (1962) 60.
2) 奈良治郎：砥粒加工面の凹凸の形状解析 (III)――すり硝子面について，計量研究所報告，**13**，3 (1964) 129.
3) K. Nakayama, J. Brecker and M. C. Shaw: Grinding Wheel Elasticity, Trans. ASME, Ser. B, **93**, 2 (1971) 609.
4) 松井正己，中川哲郎：研削仕上面あらさに関する一考察，精密機械，**41**，6 (1975) 572.
5) 1) に同じ．
6) 松井正己：ドレッシングによってねじの形成された砥石による研削機構，精密機械，**40**，12 (1974) 1125.
7) 松井正己：研削仕上面あらさに及ぼす砥粒切れ刃先端角と強制振動の影響，精密機械，**38**，12 (1972) 1055.
8) 2) に同じ．
9) 4) に同じ．