

Zur Streuung mittelschneller Elektronen in kleinste Winkel

Von FRIEDRICH LENZ*

Aus dem Rheinisch-Westfälischen Institut für Übermikroskopie, Düsseldorf

(Z. Naturforschg. 9a, 185—204 [1954]; eingegangen am 12. September 1953)

Zwischen der Streuung von Elektronen und Röntgenstrahlen an Atomen besteht bekanntlich eine enge Verwandtschaft: In die Berechnung der elastischen (kohärenten) Streuung geht derselbe Streufaktor f , in die der unelastischen (inkohärenten) dieselbe Streufunktion S ein. Für die Röntgenstreuung hat sich die Berechnung von f auf S aus dem Thomas-Fermi-Modell in den meisten Fällen als ausreichend erwiesen. Daß das Thomas-Fermi-Modell für kleine Streuwinkel die Werte von f und S nicht ganz richtig wiedergibt, führt nämlich nur zu relativ geringen Fehlern für den Röntgenstreuquerschnitt. Völlig anders liegen in dieser Beziehung aber die Verhältnisse bei der Elektronenstreuung. Da der differentielle Streuquerschnitt für Elektronenstreuung im Gegensatz zur Röntgenstreuung den Faktor $[4\pi\lambda^{-1} \sin(\vartheta/2)]^{-4}$ enthält, kommt es hier entscheidend auf die genaue Kenntnis von f und S für kleine Streuwinkel ϑ an. Wegen des schnellen Abfallens des differentiellen Elektronen-Streuquerschnitts mit wachsendem Streuwinkel ist dagegen hier die genaue Kenntnis von f und S für größere Streuwinkel weniger wichtig. Da bei der Berechnung des Streuquerschnitts aus der Elektronendichteverteilung im Atom das Verhalten von f und S für kleine Streuwinkel vor allem vom Verhalten der Dichteverteilung der Atomelektronen für große Kernabstände bestimmt wird, ist bei der Elektronenstreuung das Wentzelsche Atommodell, dessen Dichteverteilung für große Kernabstände exponentiell abfällt, dem nach Thomas-Fermi vorzuziehen. Der Wentzelsche Atomradius ist dabei so zu wählen, daß das Verhalten von f und S für kleine Streuwinkel richtig wiedergegeben wird.

Die so gewonnenen Formeln für Einfachstreuung werden zur Berechnung der Gesamtquerschnitte, der Aufhellungsdicken und vor allem der Mehrfachstreuung nach dem Verfahren von Bothe und Molière benutzt und für Kohlenstoff, Chrom und Gold numerisch ausgewertet.

Die theoretischen Streuverteilungen werden mit Experimenten von Biberman u. Mitarbb. einerseits und von Leisegang andererseits verglichen. Die Diskrepanzen zwischen den Meßergebnissen von Biberman und der auf dem Thomas-Fermi-Modell beruhenden alten Theorie werden erklärt. Die Übereinstimmung mit unseren theoretischen Kurven ist bedeutend besser. Bezüglich der Meßergebnisse von Leisegang bedeutet unsere Theorie keinen wesentlichen Fortschritt, da Leisegang mit einem um zwei Zehnerpotenzen breiteren Primärstrahl arbeitet als Biberman u. Mitarbb., so daß das von uns besonders untersuchte Verhalten für kleinste Winkel im Primärstrahl untergeht.

Die Streuverteilung in kleinste Winkel ist wichtig für die elektronenoptische Abbildung, da jede Berechnung der Intensitätsverteilung eines Bildpunktes im Endbild die Kenntnis der Streuverteilung des entsprechenden Objektpunktes zur Voraussetzung hat.

Die Streuung von Elektronen an Atomen ist bereits vielfach theoretisch und experimentell behandelt worden. Wegen der Schwierigkeit, einen hinreichend feinen und intensiven Primärstrahl zu erhalten und seine Umgebung von Störstrahlungen freizuhalten, liegt jedoch, soweit uns bekannt ist, bisher nur eine experimentelle Untersuchung von Bibermann, Wtorow, Kowner, Ssuschkin und Jaworskij¹ über die Winkelverteilung bei der Streuung mittelschneller Elektronen in kleinste Winkel vor. Gerade diese ist aber von ausschlaggebender Bedeutung für die Kontrastentstehung

bei der übermikroskopischen Abbildung, welche bekanntlich im wesentlichen durch den nach dem Verlassen des Objektes übrig bleibenden Kernstrahl bewirkt wird². Während in der Literatur als „kleine“ Streuwinkel solche von der Größenordnung 10^0 — 30^0 gelten (s. z. B.³), sollen in der vorliegenden Arbeit mit „kleinsten“ Streuwinkeln solche zwischen 10^{-1} und 10^{-4} gemeint sein, also die in der Übermikroskopie besonders interessierenden. Unter mittelschnellen Elektronen wollen wir die in der Übermikroskopie vorwiegend benutzten von 50 bis 100 kV Beschleunigungsspannung verstehen, im Gegen-

* jetzt am Lehrstuhl für Elektronenoptik und Feinmechanik der Technischen Hochschule Aachen.

¹ L. M. Biberman, E. N. Wtorow, I. A. Kowner, N. G. Ssuschkin u. B. M. Jaworskij, C. R. Akad. Sci., URSS 69, 519 [1949].

² B. v. Borries u. E. Ruska, Z. techn. Phys. 19, 440 [1938].

³ G. Schulze-Pillot u. W. Bothe, Z. Naturforschg. 5a, 440 [1950].

satz zu den schnellen Elektronen, für welche die relativistischen Effekte eine entscheidende Rolle spielen (z. B. β -Strahlen und Elektronen aus der kosmischen Strahlung), und im Gegensatz zu den langsamen, für welche die Bornsche Näherung nicht mehr zulässig ist. Bei den mittelschnellen Elektronen soll also die Bornsche Näherung gelten, und die relativistischen Effekte sollen durch relativ kleine Korrekturen berücksichtigt werden können.

Eine ausführliche Untersuchung der quantitativen Streuverhältnisse, welche speziell auf die kleinsten Streuwinkel und ihre Bedeutung für die Übermikroskopie zugeschnitten war, ist zuerst von v. Borries⁴ in Angriff genommen worden, wozu er sich der Morseschen Streuformel⁵ bediente. Für die elastische Streuung benutzte er dabei den aus der Thomas-Fermischen statistischen Elektronendichteverteilung berechneten Streufaktor f , für die unelastische Streuung die Streufunktion von Heisenberg⁶ und Bewilogua⁷ in der durch Koppe⁸ korrigierten Form. In der vorliegenden Arbeit soll die Berechtigung dieses Vorgehens unter besonderer Berücksichtigung kleinster Streuwinkel kritisch untersucht werden. Es wird gezeigt, daß bei der elastischen Streuung die Berechnung des Streufaktors aus der Thomas-Fermischen Dichteverteilung gerade für kleine Streuwinkel zu recht erheblichen Fehlern führt und wie man diese Fehler vermeiden kann. Andererseits soll eine Streuformel für unelastische Streuung angegeben werden, welche der von Koppe⁸ vorgeschlagenen an Genauigkeit zumindest nicht unterlegen sein dürfte, vor dieser aber den Vorzug mathematischer Einfachheit hat und die bequeme geschlossene Integration des Gesamtquerschnitts erlaubt. Wir werden uns im Gegensatz zu den uns bisher bekannt gewordenen, im Hinblick auf die Elektronenmikroskopie durchgeführten theoretischen Untersuchungen über Kleinstwinkelstreuung^{4,9,10} völlig vom Thomas-Fermi-Modell lösen. Wir werden zu Streuformeln gelangen, welche mathematisch einfacher und dennoch richtiger als die unter Verwendung des Thomas-Fermi-Modells abgeleiteten sind, da wir die zur Vereinfachung der Rechnung eingeführten Vernachlässigungen an für die Elektronenstreuung in kleinste Winkel weniger kritischen Stellen anbringen.

Die so gewonnenen Streuformeln für Einfachstreuung sollen zur Berechnung der Winkelverteilung bei der Mehrfachstreuung verwertet werden.

1. Elastische Einfachstreuung in kleinste Winkel

Der differentielle Wirkungsquerschnitt eines Atoms für elastische Streuung von Elektronen beträgt nach der Mottischen Streuformel¹¹

$$d\sigma_{el} = \frac{4}{a_H^2 q^4} (Z - f)^2 d\Omega, \quad (1)$$

welche sich unter der Annahme kugelsymmetrischer Streuatome aus einer wellenmechanischen Rechnung in Bornscher Näherung ergibt. Hierbei ist Z die Ordnungszahl des streuenden Atoms, $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ das Raumwinkelelement,

$$a_H = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2 m_0} = 0,529 \text{ \AA} \quad (2)$$

der Bohrsche Wasserstoffradius,

$$q = \mathfrak{k} - \mathfrak{k}' \quad (3)$$

die vektorielle Differenz der Fortschrittsvektoren vor und nach dem Stoß (bei der elastischen Streuung kann wegen $|\mathfrak{k}| = |\mathfrak{k}'| = 2\pi/\lambda$ einfach

$$q = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{\vartheta}{2} \quad (4)$$

gesetzt werden), λ die Wellenlänge der einfallenden Elektronenstrahlung, ϑ der Streuwinkel und

$$f = \int_0^\infty \rho(r) 4\pi r^2 \frac{\sin qr}{qr} dr \quad (5)$$

der Streufaktor für Röntgenstrahlen. Die Berechnung der Streuverteilung setzt also die Kenntnis der Dichteverteilung $\rho(r)$ der Elektronen im Atom voraus. Für die Röntgenstreuung und die Elektronenstreuung in große Winkel genügt es oft, für $\rho(r)$ die Elektronendichteverteilung nach Thomas und Fermi^{12,13}

$$\rho = \frac{Z}{4\pi a^3} \left(\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta} \right)^{3/2} = \frac{Z}{4\pi a^3} \frac{1}{\zeta} \frac{d^2\Phi}{d\zeta^2} \quad (6)$$

einzusetzen. Hierbei ist $\Phi(\zeta)$ diejenige Lösung der Thomas-Fermischen Differentialgleichung

⁴ B. v. Borries, Z. Naturforschg. **4a**, 51 [1949].

⁵ P. M. Morse, Phys. Z. **33**, 443 [1932].

⁶ W. Heisenberg, Phys. Z. **32**, 737 [1931].

⁷ L. Bewilogua, Phys. Z. **32**, 740 [1931].

⁸ H. Koppe, Z. Phys. **124**, 658 [1947].

⁹ H. Boersch, Z. Naturforschg. **2a**, 615 [1947].

¹⁰ L. M. Biberian, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz. **15**, 429 [1951].

¹¹ N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. A **127**, 658 [1930].

¹² L. H. Thomas, Proc. Camb. Phil. Soc. **23**, 542 [1926].

¹³ E. Fermi, Z. Phys. **48**, 73 [1928].

$$\frac{d^2 \Phi}{d\zeta^2} = \frac{\Phi^{3/2}}{\zeta^{1/2}}, \quad (7)$$

für welche $\Phi(0) = 1$ und $\Phi(\infty) = 0$ ist,

$$a = \frac{\varepsilon_0 \hbar^2}{4 m_0 e^2} \left(\frac{9}{2\pi Z} \right)^{1/2} = \frac{3\pi}{4 \sqrt[3]{6\pi Z}} a_H = 0,468 Z^{-1/2} \text{Å} \quad (8)$$

und $\zeta = r/a$.

Die Thomas-Fermische Dichteverteilung wird für sehr kleine Streuwinkel nicht zu richtigen Ergebnissen führen. Es werden nämlich diejenigen Elektronen in sehr kleine Winkel gestreut, welche das Atom in großem Kernabstand passieren, für deren Streuung also die Elektronendichteverteilung in großem Kernabstand entscheidend ist. Eine mathematisch strenge Formulierung dieser zunächst nur auf Grund klassischer Vorstellungen plausiblen Behauptung folgt weiter unten. Die Thomas-Fermische Dichteverteilung gibt aber gerade für große Kernabstände die Verhältnisse nur unzureichend wieder. $\rho(r)$ geht nämlich nach (6) und (7) für $r \rightarrow \infty$ nur wie r^{-6} gegen Null, während in Wirklichkeit ein exponentieller Abfall der Elektronendichte vorliegt. Wir wollen daher den Streufaktor f für kleinste Streuwinkel näher untersuchen, ohne von der Thomas-Fermi-Dichteverteilung Gebrauch gemacht zu haben. Wir greifen zu diesem Zweck auf Gleichung (5) zurück. Wenn $\rho(r)$ mit wachsendem r hinreichend stark abfällt, können wir in (5) $(\sin qr)/qr$ in eine Potenzreihe nach q entwickeln und gliedweise integrieren. Das das Volumintegral über die Elektronendichte gleich der gesamten Elektronenzahl Z sein muß, also

$$Z = \int_0^\infty \rho(r) 4\pi r^2 dr, \quad (9)$$

wird dann aus (5)

$$f = Z - \frac{q^2}{6} \int_0^\infty \rho(r) r^2 4\pi r^2 dr + O(q^4). \quad (10)$$

Setzt man dies in (1) ein, so erhält man

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \frac{1}{9a_H^2} \Theta^2 - O(q^2), \quad (11)$$

wobei zur Abkürzung

$$\Theta = \int_0^\infty \rho(r) r^2 4\pi r^2 dr \quad (12)$$

gesetzt ist. Man sieht, daß in (12) die Elektronendichte $\rho(r)$ in großem Kernabstand mit viel größerem Gewicht eingeht als die in geringem. Dies ist die strenge Fassung der bereits oben auf Grund klassischer Betrachtungsweise aufgestellten Behauptung, daß für die Kleinstwinkelstreuung vor allem die Elektronendichteverteilung in großem Kernabstand maßgebend ist.

Man kann den Wert von Θ nun auf verschiedene Weise zu berechnen versuchen. Eine Berechnung aus der Thomas-Fermi-Dichteverteilung, welche nach dem oben Gesagten zu hohe Werte liefern dürfte, ergibt

$$\Theta_{TF} = 6Za^2 \int_0^\infty \Phi(\zeta) \zeta d\zeta, \quad (13)$$

wie man sieht, wenn man (6) in (12) einsetzt und zweimal partiell integriert. Numerische Auswertung des Integrals in (13) liefert

$$\Theta_{TF} = 54,32 Za^2 = 43,6 Z^{1/2} a_H^2. \quad (14)$$

Dasselbe Integral ist, wie sich aus Umrechnung von Zahlenwerten aus den zitierten Arbeiten zeigen läßt, von Bethe¹⁴ mit $28,1 Za^2$, von Koppe⁸ mit $51,2 Za^2$, von Sommerfeld¹⁵ mit $52,5 Za^2$ und von Bullard und Massey¹⁶ mit $34,5 Za^2$ eingesetzt worden. Daß sich bei der numerischen Integration einer hinreichend bekannten Funktion bei verschiedenen Autoren so unterschiedliche Zahlenwerte ergeben, dürfte daran liegen, daß das Integral wegen des langsamen Abfalls des Integranden mit wachsendem ζ sehr langsam konvergiert. Man muß daher den Fehler, den man macht, wenn man bis zu einer endlichen oberen Grenze etwa nach der Simpsonschen Regel integriert und dann abbricht, sorgfältig abschätzen. Integriert man beispielsweise nur bis $\zeta = 100$, so macht man noch einen Fehler von 13%. Da man aber bei $\zeta = 100$ schon bei weitem im Bereich benachbarter Atome liegen dürfte, ist eben die Dichteverteilung nach Thomas-Fermi zur Berechnung von Θ nicht geeignet.

Setzt man an Stelle der strengen Thomas-Fermi-Verteilung die von Molière¹⁷ dafür vorgeschlagene Näherung

¹⁴ H. Bethe, Ann. Phys., Lpz. (5) 5, 325 [1930].

¹⁵ A. Sommerfeld, Z. Phys. 78, 283 [1932].

¹⁶ E. C. Bullard u. H. S. W. Massey, Proc. Camb. Phil. Soc. 26, 556 [1930].

¹⁷ G. Molière, Z. Naturforsch. 2a, 133 [1947]. Ein dem Molièreschen ähnlicher Ansatz findet sich schon bei Rozentel, Z. Phys. 98, 743 [1935]. Streufaktoren sind danach von K. Umeda, J. Fac. Sci. Hokkaido

Univ. II, Vol. IV, 57 [1951] berechnet worden. Umedas Zahlenwerte entsprechen $\Theta = 14,1 Za^2$ in grober, $\Theta = 29,2 Za^2$ in „besserer“ Näherung. Umeda begnügt sich mit dieser zweiten Näherung, da sie dem von ihm für exakt gehaltenen Betheschen Wert sehr nahe kommt. Für Umedas Rechnungen gilt ebenfalls das im Text über die Molièresche Näherung Gesagte.

$$\Phi(\zeta) \approx \sum_{i=1}^3 a_i e^{-b_i \zeta} \quad (15)$$

$$\text{mit } a_1 = 0,1; \quad a_2 = 0,55; \quad a_3 = 0,35; \\ b_1 = 6; \quad b_2 = 1,2; \quad b_3 = 0,3$$

in (13) ein, so erhält man

$$\Theta_M = 6Za^2 \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{b_i^2} = 25,64 Za^2 = 20,1 Z^{1/2} a_H^2. \quad (16)$$

Dieser Wert ist etwa um den Faktor 2 kleiner als der aus (14). Man kann aber aus der Tatsache des exponentiellen Abfallens der Molièreschen Näherung allein noch nicht schließen, daß der Zahlenwert aus (16) den wirklichen Verhältnissen näher kommt als der aus (14). Die Koeffizienten a_i , b_i der Molièreschen Näherung sind nämlich im Hinblick auf eine gute Annäherung der Thomas-Fermi-Funktion im Bereich $\zeta < 6$ nicht ohne gewisse Willkür gewählt. Es ist daher noch nichts darüber gesagt, ob sie die Elektronendichte für große Kernabstände richtiger beschreibt als die strenge Thomas-Fermi-Verteilung, und ob sie einen der Wirklichkeit näher kommenden Wert für Θ liefert als diese. Man sieht hieraus, daß auch das Einsetzen der Molièreschen Näherung keine befriedigende Lösung ist, wenn es sich um die Streuung in kleinste Winkel handelt.

Es mag hier erwähnt werden, daß man die Molièresche Streuformel

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \frac{4}{a_H^2} Z^2 a^4 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{b_i^2 + q^2 a^2} \right)^2 \quad (17)$$

auch unter Verwendung des Streufaktors f in einfacher Weise erhält. Sie ergibt sich nämlich durch elementare Integration, wenn man die Molièresche Näherung in den aus Kombination von (5) und (6) entstehenden Ausdruck

$$f = Z \int_0^\infty \frac{d^2\Phi}{d\zeta^2} \frac{\sin qa\zeta}{qa} d\zeta \quad (18)$$

einsetzt.

Man könnte weiter daran denken, das Integral Θ aus der diamagnetischen Suszeptibilität zu berechnen. Bei der unelastischen Streuung hat bereits Koppe⁸ auf einen Zusammenhang zwischen der diamagnetischen Suszeptibilität und der Streuintensität in kleinen Winkel hingewiesen. Es gilt nämlich nach Langevin für diamagnetische Stoffe

$$\kappa = \mu - 1 = - \frac{N_v \mu_0 e^2}{6m_0} \Theta_s. \quad (19)$$

⁸ J. D'Ans u. E. Lax, Taschenbuch für Chemiker und Physiker, 2. Aufl. 1941, Verlag Springer.

Hierbei ist κ die diamagnetische Suszeptibilität, μ die Permeabilität, N_v die Atomkonzentration (Zahl der Atome/Volumen), $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$ V·sec/Amp·m die magnetische Konstante, e die Elektronenladung und m_0 die Ruhmasse des Elektrons. Dividiert man auf beiden Seiten von (19) durch die Massendichte γ des Objektmaterials, so erhält man für die spezifische Suszeptibilität χ wegen $N_v = N_L \gamma$

$$\chi = \frac{\kappa}{\gamma} = - \frac{N_L \mu_0 e^2}{6m_0} \Theta_s. \quad (20)$$

Hierbei bedeutet $N_L = 6,02 \cdot 10^{23}$ Mol⁻¹ die spezifische Atomzahl. Setzen wir in (20) die Zahlenwerte für N_L , μ_0 , e und m_0 ein, so erhalten wir

$$\chi = - 3,55 \cdot 10^{11} \text{ cm Mol}^{-1} \Theta_s. \quad (21)$$

Benutzen wir beispielsweise für Kohlenstoff die im Taschenbuch von D'Ans und Lax¹⁸ angegebene Suszeptibilität nach Pascal $\chi = - 4\pi \cdot 6,00 \cdot 10^{-6}$ cm³/Mol, so wird

$$\Theta_s = 2,12 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 = 5,3 \cdot 6 \cdot a^2 = 4,2 \cdot 6^{1/3} a_H^2. \quad (22)$$

Dieser Wert liegt noch erheblich unter denen aus den Gln. (14) und (16).

Gl. (19) gilt aber nur für Atome ohne paramagnetisches Moment und ohne Wechselwirkung mit Nachbaratomen. Sie dürfte daher wohl nur bei Edelgasatomen zuverlässige Werte liefern.

Einen weiteren Ansatz zur Berechnung des Integrals (12) gibt die Elektronendichteverteilung $\rho(r)$ des *self consistent field* nach Hartree. Setzt man diese für Kohlenstoff ein (hierzu wurde die Hartree-Funktion für den Grundzustand ³P nach Torrance¹⁹ benutzt), so erhält man durch numerische Auswertung

$$\Theta_H = 16,58 a_H^2 = 11,6 \cdot 6 a^2 = 9,10 \cdot 6^{1/3} a_H^2, \quad (23)$$

einen Wert, der etwa um den Faktor 2 über dem aus der diamagnetischen Suszeptibilität berechneten liegt.

Man muß nun zwischen der Streuung an Einzelatomen (z. B. Edelgasen) und der am Festkörper (z. B. übermikroskopischen Objekten) unterscheiden. Die Streuformel (1) gilt in dieser Form nur für Einzelatome oder allenfalls amorphe Festkörper. Bei Festkörpern mit kristalliner Struktur geht wegen der auftretenden Interferenzen noch der „Strukturfaktor“ ein. Aber auch beim amorphen

¹⁹ C. C. Torrance, Phys. Rev. **46**, 388 [1934].

Festkörper ist wegen der Nähe der Nachbaratome die für Einzelatome berechnete Elektronenverteilung nach Thomas-Fermi oder Hartree erheblich gestört, insbesondere die in großem Kernabstand. Ob für Festkörper der aus der an diesen Festkörpern gemessenen diamagnetischen Suszeptibilität oder der aus der Hartree-Verteilung berechnete Wert für Θ richtiger ist, muß das Experiment entscheiden. Für Edelgase, bei denen die Störung durch Nachbaratome keine Rolle spielt, ist die Übereinstimmung zwischen den aus der diamagnetischen Suszeptibilität und den aus der Hartree-Verteilung berechneten Werten für Θ bekanntlich befriedigend²⁰. Schließlich besteht noch die Möglichkeit, Θ empirisch aus der Messung von Streuintensitäten selbst zu bestimmen, und zwar am besten bei Mehrfachstreuung und nicht zu feinem Primärstrahl. Dann kann man nämlich, wie wir später im Abschnitt über Mehrfachstreuung sehen werden, bei Kenntnis der Intensitätsverteilung des Primärstrahls und der absoluten Dicke der Streufolie aus dem Verhältnis der Streuintensität für den Streuwinkel Null zu der Intensität des Primärstrahls direkt auf den Wert von Θ schließen.

Nehmen wir nun an, daß unter den bisher aufgeführten Zahlenwerten von Θ der aus der Hartree-Dichteverteilung berechnete (23) der zuverlässigste ist, so sehen wir, daß der aus der strengen Thomas-Fermi-Verteilung folgende Wert für Kohlenstoff um etwa den Faktor 5 zu hoch liegt. Da Θ in (11) quadratisch eingeht, erhält man demnach für die Streuintensität in kleinste Streuwinkel bei Kohlenstoff um den Faktor 25 zu hohe Werte, wenn man mit der Thomas-Fermischen Elektronendichteverteilung rechnet.

Aus dem Integral Θ erhalten wir zwar nach (11) den Höchstwert der Streuverteilungskurve, nicht aber die Streuverteilung selbst als Funktion des Streuwinkels. Es wäre nun unzweckmäßig, etwa die Potenzreihe (10) weiter zu entwickeln, also den Koeffizienten des folgenden Gliedes in q^4 aus der Elektronendichteverteilung des Atoms zu bestimmen, da die Unsicherheit dieses Koeffizienten noch empfindlicher als Θ von der uns nicht hinreichend

bekannten Funktion $\rho(r)$ abhängt. Wir wollen uns daher der Streuformel von Wentzel²¹

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \frac{4}{a_H^2} \frac{Z^2}{(q^2 + 1/R^2)^2} \quad (24)$$

bedienen, welche in Bornscher Näherung aus einem rohen Potentialsansatz für das abgeschirmte Coulomb-Feld

$$V = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/R} \quad (25)$$

mit zunächst unbestimmtem „Atomradius“ R folgt. Dies Wentzelsche Atommodell vereint den Vorzug mathematischer Einfachheit mit dem eines exponentiellen Abfalls der Elektronendichte $\rho(r)$ für große r , wobei der Steilheit dieses Abfalls durch geeignete Wahl von R ein physikalisch sinnvoller Wert gegeben werden kann. Bethe¹⁴ setzt in der Wentzelschen Streuformel (24) R proportional $Z^{-1/2}$, wie es das Thomas-Fermi-Modell nahelegt (8).

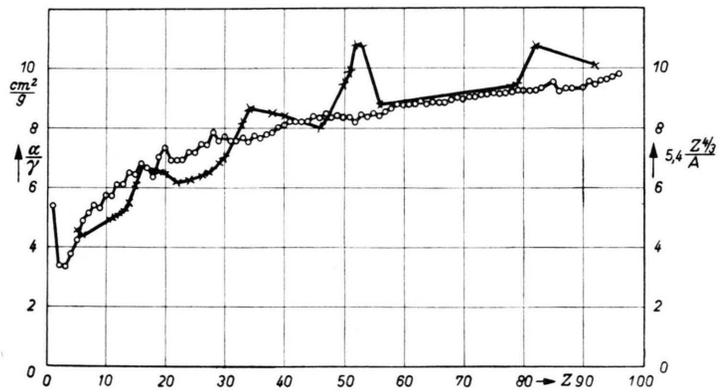


Abb. 1. Abhängigkeit des Massenabsorptionskoeffizienten (für β -Strahlen des UX) von der Ordnungszahl der Atome der absorbierenden Substanz nach Crowther (\times). Zum Vergleich ist die mit einer willkürlichen Konstanten multiplizierte Größe $Z^{1/2}A$ mit aufgetragen (\circ).

Bethe, dem es ja im Gegensatz zu uns nicht vorwiegend auf kleinste Streuwinkel ankam, hält die so gewonnene Streuformel aber für ungenauer als die, welche aus der strengen Thomas-Fermi-Verteilung folgt. Williams²² und im Anschluß an ihn Leisegang²³ benutzen ebenfalls die Wentzelsche Streuformel und setzen für den Atomradius

$$R = a_H Z^{-1/2}. \quad (26)$$

²⁰ Landolt-Börnstein, Zahlenwerte und Funktionen I, 1, S. 394, 6. Auflage 1950, Verlag Springer.

²¹ G. Wentzel, Z. Phys. **40**, 590 [1927].

²² E. Williams, Proc. Roy. Soc. A **169**, 531 [1939].

²³ S. Leisegang, Z. Phys. **132**, 183 [1952].

Nun besitzt aber der Atomradius und mit ihm der Streuquerschnitt vermutlich keinen so einfachen Gang mit der Ordnungszahl, sondern diesem überlagert einen Gang mit den Perioden des periodischen Systems. Einen Hinweis darauf gibt z. B. der von Crowther²⁴ beobachtete Gang des Massenabsorptionskoeffizienten für β -Strahlen mit der Ordnungszahl (Abb. 1). Der dem Massenabsorptionskoeffizienten α/γ entsprechende Absorptionsquerschnitt wäre

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{1}{N_L} \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{A}{6,02 \cdot 10^{23}} \frac{\alpha}{\gamma} \text{ g}. \quad (27)$$

Wie wir später sehen werden, folgt aus dem Wentzelschen Atommodell, daß der elastische Gesamtstreuquerschnitt proportional $Z^2 R^2$ wird. Wenn also der Gang des Absorptions- und des elastischen Streuquerschnitts mit der Ordnungszahl derselbe wäre, müßte

$$\alpha/\gamma \sim Z^2 R^2/A \quad (28)$$

sein, und speziell für den Fall, daß R proportional $Z^{-1/3}$ ist,

$$\alpha/\gamma \sim Z^{1/3}/A. \quad (29)$$

Wir haben in Abb. 1 zum Vergleich neben α/γ die mit einem willkürlichen Faktor multiplizierte Funktion $Z^{1/3}/A$ mit eingetragen. Man sieht, daß sie im großen und ganzen denselben Verlauf hat, den Gang mit den Perioden des periodischen Systems aber natürlich nicht mitmacht.

Wir wollen den Atomradius R so wählen, daß für $q=0$ der Höchstwert des differentiellen elastischen Streuquerschnitts mit dem durch Gleichung (11) geforderten übereinstimmt. Wir müssen dazu nur

$$R = \sqrt{\Theta/6Z}. \quad (30)$$

setzen. Die auf diesem Wege gewonnene Streuformel

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} = \frac{4}{a_{\text{H}}^2} \frac{Z^2}{(q^2 + 6Z/\Theta)^2} \quad (31)$$

hätten wir übrigens auch erhalten, wenn wir einen Molièreschen Ansatz (15) mit $a_1=1$, $a_2=a_3=0$, $b_1=a/R$ [wo R aus (30)] gemacht hätten, was also mit den Wentzelschen Ansatz formal mathematisch gleichbedeutend ist. Für den Gesamtquerschnitt eines Atoms für elastische Streuung ergibt sich aus (24)

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{2\lambda^2}{\pi a_{\text{H}}^2} \int_0^\infty \frac{(Z-f)^2}{q^3} dq = \frac{Z^2 R^2 \lambda^2}{\pi a_{\text{H}}^2} = \frac{Z\lambda^2 \Theta}{6\pi a_{\text{H}}^2}. \quad (32)$$

²⁴ J. A. Crowther, Phil. Mag. 12, 379 [1906].

Bei höheren Strahlspannungen müssen in den Streuformeln relativistische Korrekturen angebracht werden. Sie gehen an zwei Stellen in die Streuformeln ein: Erstens ist bei der Ableitung der Mottschen Streuformel für die Masse des stoßenden Elektrons $m = m_0 (1 + eU/m_0 c^2)$ einzusetzen. Diese geht in a_{H} ein, so daß an Stelle von a_{H} in der relativistisch korrigierten Form $a_{\text{H}} (1 + eU/m_0 c^2)^{-1}$ zu schreiben ist. Zweitens muß die in die Streuformeln eingehende Elektronenwellenlänge λ und damit q relativistisch korrigiert werden. Die relativistisch richtige Schreibweise für λ ist

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2em_0 U \left(1 + \frac{eU}{2m_0 c^2}\right)}}. \quad (33)$$

Außerdem ist noch der Faktor $1 - v^2 c^{-2} \sin^2(\vartheta/2)$ zum Streuquerschnitt hinzuzufügen. Da wir uns aber auf kleinste Streuwinkel beschränkt haben, ist dieser Faktor praktisch gleich Eins, kann also fortgelassen werden.

Damit ergibt sich für den elastischen Gesamtquerschnitt statt (32)

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{el}} &= \frac{Z\Theta\lambda^2}{6\pi a_{\text{H}}^2} \left(1 + \frac{eU}{m_0 c^2}\right)^2 \\ &= \frac{Z\Theta h^2}{12\pi a_{\text{H}}^2 e m_0} \frac{\left(1 + \frac{eU}{m_0 c^2}\right)^2}{U \left(1 + \frac{eU}{2m_0 c^2}\right)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Aus dem elastischen Gesamtquerschnitt können wir leicht die von v. Borries⁴ eingeführte Aufhellungsdicke $\gamma l'$ berechnen, welche als diejenige Massendicke definiert ist, innerhalb deren alle Primärelektronen im Mittel je einmal elastisch gestreut werden. Die Aufhellungsdicke trägt ihren Namen danach, daß sie mit guter Annäherung diejenige Objektstärke bezeichnet, welche im Elektronenmikroskop beim Durchstrahlungsverfahren noch einigermaßen aufgehellt untersucht werden kann. Wir werden später diese Aufhellungsdicke als Maßstab für die Dicke der Streufolie im Abschnitt über Mehrfachstreuung benutzen. Definitionsgemäß ist

$$\gamma l' = 1/\sigma_{\text{el}} N_L. \quad (35)$$

In Abb. 2 ist die Aufhellungsdicke als Funktion der Strahlspannung für Kohlenstoff, Chrom und Gold aufgetragen, wie sie sich nach unserer Streuformel (34) ergibt. Hierzu wurde Θ für Kohlenstoff und Chrom aus der Hartree-Verteilung und für Gold aus den Streuexperimenten von Leisegang²³ berechnet. Außerdem sind in Abb. 2 gestrichelt die Aufhellungsdicken mit eingezeichnet, wie sie v. Borries⁴ nach

Gl. (17), d. h. unter Zugrundelegung der Molièreschen Näherung für die Thomas-Fermi-Funktion berechnet hat. Man sieht, daß sich für die Aufhellungsdicken nach v. Borries kleinere Werte ergeben als nach unserer Streuformel, und daß seine Kurven auch einen stärkeren Gang mit der Ordnungszahl zeigen.

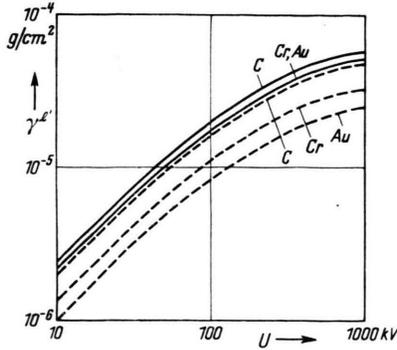


Abb. 2. Die „Aufhellungsdicke“ von Kohlenstoff, Chrom und Gold in Abhängigkeit von der Strahlspannung. Die Aufhellungsdicke ist als diejenige Massendicke definiert, innerhalb deren ein Elektron im Mittel einmal elastisch gestreut wird. Die durchgezogenen Kurven sind nach Gl. (32) und (35) berechnet, die gestrichelten stammen aus älteren Rechnungen von v. Borries unter Benutzung der Molièreschen Näherung für das Thomas-Fermi-Modell.

In Abb. 3 ist die Winkelabhängigkeit der Streuintensität für die elastische Einfachstreuung an Kohlenstoff dargestellt, wie sie sich nach den verschiedenen

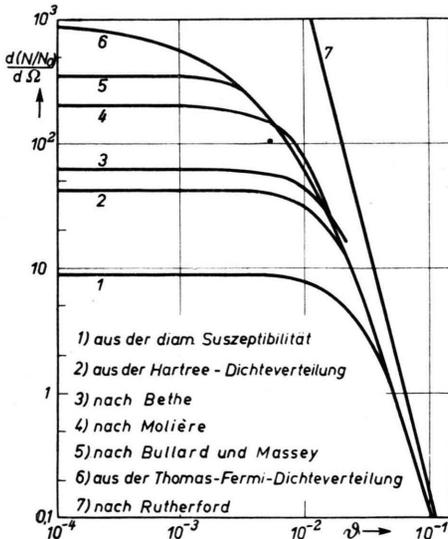


Abb. 3. Winkelverteilung der Streuintensität für die elastische Einfachstreuung von 50 kV-Elektronen an Kohlenstoff von einer Massendicke $\gamma l = 10^{-6}$ g/cm² nach verschiedenen Streuformeln. Die relativistischen Korrekturen sind in dieser Abbildung nicht berücksichtigt. Wegen des durch ● bezeichneten Punktes s. Text.

Streuformeln ergibt. Eine Bildarstellung dieser Art ist bereits bei v. Borries zu finden⁴, wo aber der Höchstwert der nach der Thomas-Fermi-Dichteverteilung berechneten Kurve (dort als Streuformel von Debye zitiert) zu niedrig dargestellt ist. Der Grund für diesen Irrtum liegt darin, daß die Kurve nach den von Bewilogua⁷ angegebenen Werten für den Streufaktor f auf kleine Winkel hin graphisch extrapoliert wurde und der von Bewilogua für den kleinsten von Null verschiedenen Streuwinkel berechnete Wert einen Rechenfehler enthielt. Der zu diesem Wert gehörige Kurvenpunkt ist in Abb. 3 und 4 eingezeichnet und an seiner Abseitslage zu erkennen. In Abb. 4 ist die aus der Thomas-Fermi-Verteilung für kleine Streuwinkel berechnete Funktion $1 - f/Z$ dargestellt.

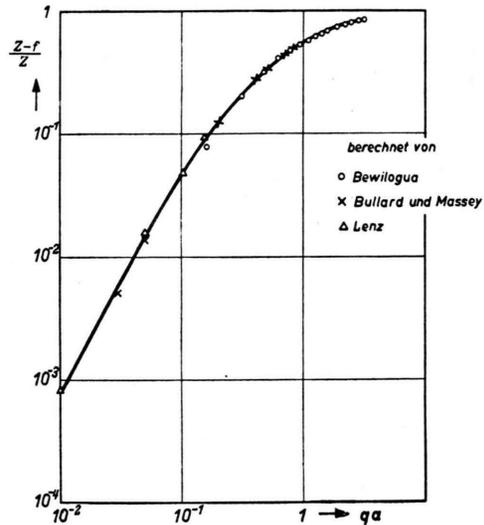


Abb. 4. Die für die elastische Elektronenstreuung maßgebende Funktion $(Z - f)/Z$, nach dem Thomas-Fermi-Modell berechnet.

2. Unelastische Einfachstreuung in kleinste Winkel

Wenn man außer der elastischen auch die unelastische Streuung berücksichtigen will, muß man an Stelle von Gl. (1) die Streuformel von Morse⁵

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4}{a_0^2 q^4} [(Z - f)^2 + S] \quad (36)$$

verwenden. Sie unterscheidet sich von (1) durch das Hinzutreten einer Streufunktion S , welche die unelastischen Streuakte berücksichtigt. Bei der Berechnung dieser Streufunktion liegen die Verhältnisse ähnlich wie bei der Berechnung des Streufaktors für elastische Streuung: Einerseits gibt es eine auf alle Atome in gleicher Weise anwendbare Methode^{6,7}, welche auf dem Thomas-Fermi-Modell basiert und sich für die inkohärente Röntgen-

streuung bewährt hat, bei der Elektronenstreuung in kleinste Winkel aber viel zu hohe Werte für die Streuintensität liefert. Andererseits besteht die Möglichkeit, S aus den Hartree-Verteilungen mit größerer Genauigkeit auch für kleinere Streuwinkel zu berechnen^{25,26}, was aber für jedes Atom eine besondere umständliche Rechnung erfordert und nicht zu einfachen geschlossenen Ausdrücken für S führt. Wir werden uns wieder genau so helfen wie bei der elastischen Streuung, indem wir zuerst, noch bevor wir ein bestimmtes Modell eingeführt haben, das Verhalten für kleine Streuwinkel allgemein untersuchen und dann in einem möglichst einfachen Modell die Konstanten so wählen, daß dies Verhalten richtig wiedergegeben wird.

Die auf dem Thomas-Fermi-Modell beruhende Streufunktion nach Heisenberg und Bewilogua lautet

$$S_{\text{H}}(v) = Z \left[1 - \int_0^{\zeta_0} \left(\zeta \frac{d^2 \Phi}{d\zeta^2} - \frac{3}{2} v \zeta \Phi + \frac{v^3}{2} \zeta^2 \right) d\zeta \right]. \quad (37)$$

Sie ist in der Originalarbeit in etwas umständlicherer Form angegeben, die aber mit (37) mathematisch identisch ist, wie man mit Hilfe von (7) leicht zeigt²⁷. In Gl. (37) ist

$$v = q \cdot b \quad \text{und} \quad (38)$$

$$b = a (6\pi Z)^{-1/3} = a_{\text{H}} (6\pi Z)^{-2/3} = 0,176 \text{ \AA} Z^{-2/3}. \quad (39)$$

Die obere Integrationsgrenze ζ_0 in (37) ist durch die Gleichung

$$v^2 = \frac{\Phi(\zeta_0)}{\zeta_0} \quad (40)$$

definiert. Die übrigen Bezeichnungen haben die im Abschnitt über elastische Streuung eingeführten Bedeutungen. Allerdings ist bei der unelastischen Streuung zu bedenken, daß $q = |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|$ nicht mehr einfach wie in (4) gleich $4\pi\lambda^{-1} \sin(\vartheta/2)$ gesetzt werden kann. Wir wollen nach Koppe bei der unelastischen Streuung mit

$$q = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\vartheta^2 + \left(\frac{J}{4eU} \right)^2} \quad (41)$$

rechnen. Hierbei ist J die Ionisierungsenergie des Atoms und U die Beschleunigungsspannung der einfallenden Elektronen. Gl. (42) ergibt sich unter der Annahme, daß $\vartheta \ll 1$ ist und beim Stoß der

Energiebetrag $J/2$ vom stoßenden an das gestoßene Elektron übertragen wird. Für $J/4eU \ll \vartheta \ll 1$ geht (41) in (4) über. Für die Integration des Gesamtquerschnitts wird die aus (41) durch Differentiation zu gewinnende Beziehung

$$q dq = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \vartheta d\vartheta \quad (42)$$

wichtig sein.

Die Näherung von Heisenberg und Bewilogua (37) ist für die Berechnung der Elektronenstreuung in kleine Winkel unbefriedigend. Sie liefert nämlich im Grenzfall $v \rightarrow 0$ wegen (13)

$$S_{\text{H}}(v) \rightarrow \frac{3}{2} Z v \int_0^{\infty} \zeta \Phi(\zeta) d\zeta = \frac{\Theta_{\text{TF}}}{4a^2} v, \quad (43)$$

während man allgemein zeigen kann⁸, daß S für kleine q quadratisch und nicht linear in q ansteigen muß, und zwar ergibt sich*

$$S \rightarrow \frac{1}{3} \Theta q^2 \text{ für } q \rightarrow 0. \quad (44)$$

Gerade für kleinste Winkel wird also die Streufunktion nach Heisenberg und Bewilogua versagen. Für die Röntgenstreuung ist das nicht schlimm, da dort für kleinste Streuwinkel der kohärente Anteil den inkohärenten bei weitem überwiegt, so daß es dort auf die Genauigkeit des letzteren kaum ankommt. Bei der Elektronenstreuung liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt. Dort überwiegt die unelastische Streuung die elastische nur im Bereich kleinster Winkel, dort aber um mehrere Zehnerpotenzen⁴. Für größere Streuwinkel wird dann der unelastische Anteil klein gegen den elastischen, so daß es bei der Elektronenstreuung darauf ankommt, das Verhalten von S für kleinste Streuwinkel möglichst genau zu kennen, während es für größere weniger auf Genauigkeit ankommt. Wir tun also gut daran, an Stelle von (37) eine Streuformel zu verwenden, welche vor allem die Bedingung (44) erfüllt. Hierzu scheint uns die von Raman²⁸ und Compton²⁹ auf klassischem Wege abgeleitete Streuformel

$$S = Z - f^2/Z \quad (45)$$

geeignet zu sein. Sie liefert nämlich wegen (10):

$$f = Z - \frac{q^2}{6} \Theta + O(q^4),$$

²⁵ I. Waller, Z. Phys. **51**, 213 [1928].

²⁶ I. Waller u. D. R. Hartree, Proc. Roy. Soc. A **124**, 119 [1929].

²⁷ F. Lenz, Z. Phys. **135**, 248 [1953].

* Bei Koppe steht irtümlich der Faktor $2/3$ an Stelle von $1/3$.

²⁸ C. V. Raman, Ind. J. Phys. **3**, 357 [1928].

²⁹ A. H. Compton, Phys. Rev. **35**, 928 [1930].

genau das richtige Verhalten (44) von S für $q \rightarrow 0$. Die von Hertzog³⁰ und Bewilogua⁷ ausgesprochenen Bedenken gegen (45) können daher nur das Verhalten für größere Streuwinkel treffen.

Genauer als (45) wäre wohl noch die Streuformel von Wentzel³¹

$$S = Z - \sum_{i=0}^Z f_i^2. \quad (46)$$

Hierbei bedeutet

$$f_i = \int_0^\infty \varrho_i(r) 4\pi r^2 \frac{\sin qr}{qr} dr \quad (47)$$

den „Streuformfaktor des i -ten Elektrons im Atom“. Definiert man entsprechend den Anteil Θ_i des i -ten Elektrons am Integral Θ durch

$$\Theta_i = \int_0^\infty \varrho_i(r) r^2 4\pi r^2 dr, \quad (48)$$

so ergibt sich wegen

$$f_i = 1 - \frac{q^2}{6} \Theta_i + O(q^4) \quad (49)$$

und
$$\sum_{i=1}^Z \Theta_i = \Theta \quad (50)$$

ebenfalls das richtige Verhalten (44) von S für $q \rightarrow 0$.

(45) und (46) sind nur dann miteinander identisch, wenn alle Elektronen im Atom dieselbe Ladungsverteilung haben, was bekanntlich nur für das Wasserstoff- und das Heliumatom gilt. In jedem anderen Fall dürfte (46) genauer sein als (45). Dennoch werden wir im folgenden für die Elektronenstreuung Gl. (45) wegen ihrer Einfachheit vorziehen, da es uns ja vor allem auf das Verhalten (44) ankommt.

Setzen wir in (45) den in (31) benutzten Wert

$$f = Z/(1 + \Theta q^2/6Z) \quad (51)$$

ein, so ergibt sich die Streufunktion für unelastische Streuung zu

$$S(q) = Z \left(1 - \frac{1}{1 + q^2 \Theta/6Z} \right). \quad (52)$$

Wir wollen nun noch den Gesamtquerschnitt für unelastische Streuung

$$\sigma_{\text{unel}} = \frac{2\lambda^2}{\pi a_{\text{H}}^2} \int_{\bar{q}}^\infty \frac{S dq}{q^3} \quad (53)$$

abschätzen. Wegen des Nenners q^3 im Integranden kommt es hierbei vor allem auf den Verlauf der

Streuformel für kleine q an, welcher durch (52) richtig wiedergegeben wird. In (53) ist die untere Integrationsgrenze durch den nach (41) kleinsten möglichen Wert für q ,

$$\bar{q} = \pi m_0 J \lambda / h^2 \quad (54)$$

gegeben. Wir erhalten durch elementare Integration, wenn wir in (53) S nach (52) einsetzen,

$$\sigma_{\text{unel}} = - \frac{\lambda^2 \Theta}{3\pi a_{\text{H}}^2} \left[\frac{1}{2(1 + 6Z/q^2\Theta)} + \ln \left(1 + \frac{6Z}{q^2\Theta} \right) \right]_{\bar{q}}^\infty \quad (55)$$

Wenn $\bar{q}^2 \Theta/6Z \ll 1$ ist, was bei den uns interessierenden hohen Strahlspannungen immer der Fall ist, können wir dafür schreiben

$$\sigma_{\text{unel}} = \frac{\lambda^2 \Theta}{3\pi a_{\text{H}}^2} \ln \frac{6Z}{\bar{q}^2 \Theta} = \frac{2\lambda^2 R^2 Z}{\pi a_{\text{H}}^2} \ln \frac{1}{\bar{q}^2 R^2}. \quad (56)$$

Für die relativistische Korrektur gilt wieder das im Abschnitt über elastische Streuung Gesagte. Hier wird aber außer a_{H} und λ auch der Wert von \bar{q} von der relativistischen Korrektur beeinflusst, in welchen ja nach (54) λ eingeht⁴. Für den unelastischen Gesamtquerschnitt ergibt sich somit in relativistisch richtiger Schreibweise

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{unel}} &= \frac{\lambda^2 \Theta}{3\pi a_{\text{H}}^2} (1 + eU/m_0 c^2)^2 \ln \frac{6Z}{\bar{q}^2 \Theta} \\ &= \frac{\Theta h^2}{3\pi a_{\text{H}}^2 m_0} \frac{(1 + eU/m_0 c^2)^2}{U(1 + eU/2m_0 c^2)} \\ &\quad \cdot \ln \left\{ \frac{h}{\pi J R} \sqrt{\frac{2e}{m_0} U(1 + eU/2m_0 c^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (57)$$

In Abb. 5 sind zum Vergleich die Näherung nach Heisenberg und Bewilogua, unsere Näherung (52) und die von Koppe vorgeschlagene Näherung für S aufgetragen. Die Koppesche Näherung⁸

$$S_{\text{K}} = \frac{v}{v + \frac{3b^2}{4a^2} \frac{\Theta_{\text{TF}}}{\Theta_{\text{S}}}} S_{\text{H}} \quad (58)$$

ist so aus (37) und (44) kombiniert, daß sie für große Streuwinkel in (37) und für kleine in (44) mit $\Theta = \Theta_{\text{S}}$ übergeht. Man sieht aus Abb. 5, daß der scheinbare Vorzug der Koppeschen Näherung vor unserer, nämlich daß sie für große v in die Heisenbergsche übergeht, erst für so große Winkel wirksam wird, daß er keine praktische Bedeutung hat.

Ein Ansatz für den Streufaktor, welcher ebenfalls für $q \rightarrow 0$ und $q \rightarrow \infty$ das richtige asymptotische Verhalten zeigt und für das Wasserstoffatom sogar streng richtig ist, wäre

³⁰ G. Hertzog, Z. Phys. **69**, 207 [1931].

³¹ G. Wentzel, Z. Phys. **43**, 779 [1927].

$$f = Z / (1 + q^2 \Theta / 12Z)^2. \quad (59)$$

Er führt nach (45) auf

$$S = Z \left(1 - \frac{1}{(1 + q^2 \Theta / 12Z)^4} \right) \quad (60)$$

und liefert für die Gesamtquerschnitte

$$\sigma_{el} = \frac{2 \lambda^2}{\pi a_H^2} \int_0^\infty \frac{(Z - f)^2}{q^3} dq = \frac{7}{36} \frac{\lambda^2}{\pi a_H^2} \Theta Z, \quad (61)$$

$$\sigma_{unel} = \frac{\lambda^2 \Theta}{3 \pi a_H^2} \ln \frac{12Z}{q^2 \Theta}, \quad (62)$$

also Werte, die von den in den Gleichungen (32) und (56) gegebenen nur unbedeutend abweichen. Beim Gesamtquerschnitt steht nämlich bei der elastischen Streuung der Faktor 7/36 an Stelle von 1/6 und bei der unelastischen zusätzlich der Faktor 2 unter dem Logarithmus. Diese geringe Abweichung ist in Übereinstimmung mit unserer Behauptung, daß es bei den Gesamtquerschnitten hauptsächlich auf das Verhalten der Streufunktion für kleine Streuwinkel ankommt.

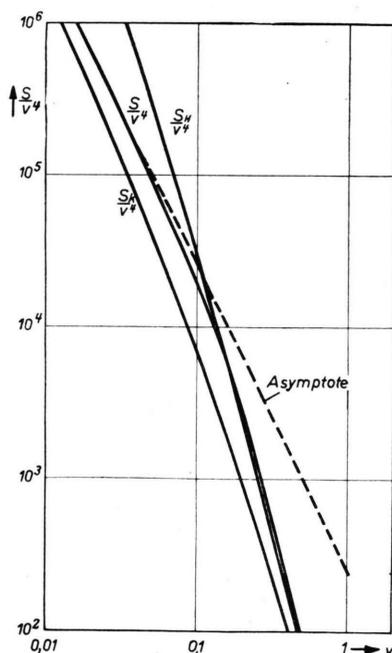


Abb. 5. Die für die unelastische Streuung maßgebende Funktion S/v^4 nach Heisenberg-Bewilogua (S_N/v^4), nach Koppe (S_K/v^4) und nach Gl. (52) (S/v^4) für die unelastische Streuung von 50 kV-Elektronen an Kohlenstoff. Zum Vergleich ist die Asymptote nach Gl. (44) mit eingezeichnet, in welche die richtige Streufunktion S/v^4 für kleine v übergehen muß. Um den Vergleich mit der Näherung von Koppe durchführen zu können, wurde hier auch in Gl. (52) der aus der diamagnetischen Suszeptibilität bestimmte Wert für Θ eingesetzt.

In Abb. 6 sind die Streufunktionen für elastische und unelastische Streuung als Funktion des Streuwinkels aufgetragen, wie sie sich nach den Gleichungen (31) und (56) ergeben. Während für sehr kleine Streuwinkel die unelastische Streuintensität die elastische

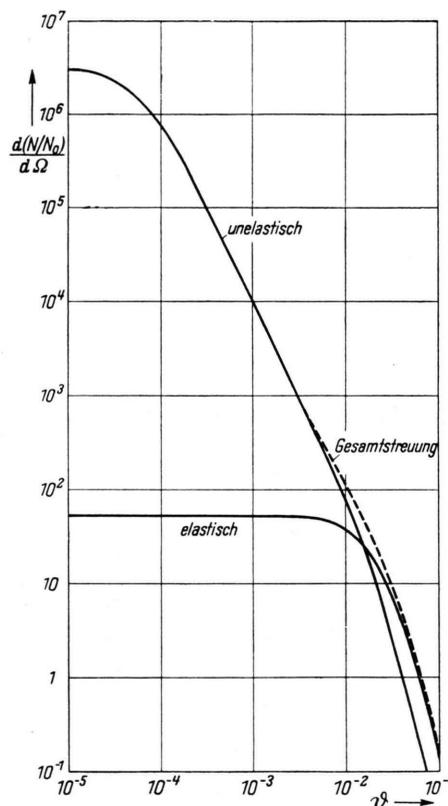


Abb. 6. Winkelverteilung der elastischen und unelastischen Streuung von 50 kV-Elektronen an 10^{-6} g/cm² Kohlenstoff, relativistisch korrigiert. Die Maximalwerte der Streuquerschnitte wurden aus der Hartree-Verteilung berechnet.

um mehrere Zehnerpotenzen überwiegt, worauf v. Borries⁴ bereits hingewiesen hat, fällt sie für große Streuwinkel rasch auf den Z -ten Teil der elastischen ab. Der Punkt, an welchem die für die unelastische Streuintensität maßgebliche Funktion S gleich der für elastische Streuung entsprechenden Größe $(Z - f)^2$ wird, ist nach (45) durch

$$S = (Z - f)^2 = \left(\frac{2Z}{Z + 1} \right)^2; \quad (63)$$

$$f = \frac{Z - 1}{Z + 1} Z; \quad qR = q \sqrt{\frac{\Theta}{6Z}} = \sqrt{\frac{2}{Z - 1}}$$

gegeben.

Eine gemeinsame Darstellung der elastischen und unelastischen Streuverteilung an Kohlenstoff ist bereits bei v. Borries⁴ zu finden.

Es könnte fraglich erscheinen, ob angesichts des Überwiegens des unelastischen Streuanteils in

kleinste Streuwinkel der elastische Streuanteil für die Übermikroskopie überhaupt von Interesse sein kann. Die Kenntnis der elastischen Streuverteilung scheint uns aber dennoch nicht überflüssig zu sein. Sie spielt erstens für Kontrastüberlegungen eine Rolle, bei denen es ja auf den Gesamtquerschnitt ankommt, an welchem die elastische Streuung merklichen Anteil hat. Die elastische Streuung ist ferner wichtig für elektronenoptische Abbildungsverfahren, welche mit Geschwindigkeitsfilterung arbeiten. Die neuerdings entwickelten Filterungsverfahren^{32,33} erlauben nämlich die Beseitigung aller unelastisch gestreuten Elektronen aus dem Bildraum, so daß dorthin außer den ungestreuten nur die elastisch gestreuten gelangen können.

Eine Messung der elastischen Streuverteilung im kleinsten Winkel hat offenbar nur dann Aussicht auf Erfolg, wenn man die elastisch gestreuten Elektronen von den ungestreuten und unelastisch gestreuten trennen, d. h. also die von der Streufolie ausgehende Elektronenstrahlung nach Richtung und Geschwindigkeit analysieren kann. Dazu ist Voraussetzung, daß die Bestrahlungsapertur klein gegen die zu untersuchenden Streuwinkel ist.

Wir wollen nun noch das Verhältnis n des unelastischen zum elastischen Gesamtstreuquerschnitt bestimmen, d. h. die Zahl n der unelastischen Stöße, die im Mittel auf einen elastischen kommen. Wir vergleichen zu diesem Zweck Gl. (56) mit (32) und erhalten

$$n = \frac{\sigma_{\text{unel}}}{\sigma_{\text{el}}} = \frac{2}{Z} \ln \frac{6Z}{\bar{q}^2 \Theta} = \frac{4}{Z} \ln \frac{1}{\bar{q} R}. \quad (64)$$

In Abb. 7 ist n als Funktion von Z aufgetragen. Bei der Berechnung wurde für R einfach die Beziehung (26) benutzt. Das ist zulässig, weil es hier auf die Genauigkeit von R nicht sehr ankommt (R geht ja nur unter dem Logarithmus ein). Die Ionisierungsenergien wurden aus der Literatur²⁰ (Tab. S. 211) entnommen. Abb. 7 ist für 50 kV-Elektronen berechnet; da aber die Elektronenwellenlänge (in \bar{q}) ebenfalls nur unter dem Logarithmus eingeht, ist n nur sehr schwach von der Strahlspannung abhängig. Man sieht aus Abb. 7, daß an den leichten Atomen relativ mehr unelastische, an den schwereren Atomen relativ mehr elastische Streuprozesse stattfinden.

Bevor wir zur Mehrfachstreuung übergehen, wollen wir einen Vergleich mit dem einzigen uns bekannt gewordenen Experiment über die Winkelver-

teilung der Kleinstwinkelstreuung mittelschneller Elektronen an dünnen Schichten durchführen.

Biberman, Wtorow, Kowner, Ssuschkin und Jaworskij¹ haben in einem sowjetischen Elektronenmikroskop vom Typ EM-100 eine Chromfolie, deren Dicke sie mit $4,9 \cdot 10^{-6}$ g/cm² (das ist bei 60 kV nach Abb. 2 das 0,38-fache der Aufhellungsdicke; die Näherung durch die Einfachstreuformel ist also zulässig) angeben, mit Elektronen von 30, 60 und 80 kV durchstrahlt und bei ausgeschalteten Linsen die an der üblichen Stelle befindliche Photoplatte exponiert. Aus der Plattenschwärzung haben sie dann über die vorher aufgenommene Schwärzungskurve³⁴ die Elektronendichte als Funktion des Streuwinkels bestimmt. Der untersuchte Winkelbereich erstreckt sich von $3 \cdot 10^{-4}$ bis $3 \cdot 10^{-2}$. Ein besonderer Vorzug der Anordnung ist,

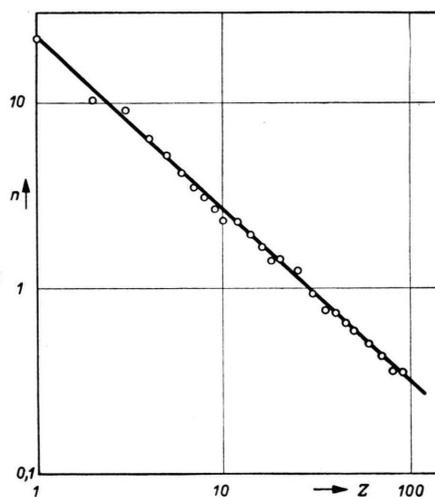


Abb. 7. Verhältnis n des unelastischen Gesamtquerschnitts zum elastischen in Abhängigkeit von der Ordnungszahl des streuenden Atoms für die Streuung von 50 kV-Elektronen.

daß man die gleichmäßige Dicke der Folie und die Abwesenheit von Löchern in ihr mit demselben Mikroskop nachprüfen kann, in welchem man die Streuverteilung untersucht. Man braucht dazu nur die Linsen einzuschalten. Das Ergebnis der zitierten sowjetischen Arbeit ist in Abb. 8 wiedergegeben, in welcher die Autoren zum Vergleich die nach Mott und Massey³⁵ für 60 kV theoretisch zu erwartende Streuverteilung mit eingetragen haben. Man sieht, daß der von Biberman und Mitarbb. gefundene Streuquerschnitt für unelastische und elastische Streuung zusammen für kleinste Winkel den nach Mott und Massey für die elastische Streuung allein berechneten um mehrere Zehnerpotenzen überwiegt, daß sich dann die Kurven bei $\theta = 3 \cdot 10^{-3}$

³² H. Boersch, *Optik* 5, 436 [1949].

³³ G. Möllenstedt u. O. Rang, *Z. angew. Phys.* 3, 187 [1951].

³⁴ N. G. Ssuschkin u. I. A. Kowner, *C. R. Akad. Sci., URSS* 62, 633 [1948].

³⁵ N. F. Mott u. H. S. W. Massey, *The theory of atomic collisions*, Oxford 1933.

überschneiden, daß im Bereich zwischen $3 \cdot 10^{-3}$ und $2 \cdot 10^{-2}$ die experimentelle Gesamtstreuurve sogar unter der theoretischen elastischen Streukurve liegt, um erst bei $\vartheta = 2 \cdot 10^{-2}$ in diese überzugehen. Bei $\vartheta = 10^{-2}$ liegt die experimentelle Kurve sogar um etwa den Faktor 2 unter der theoretischen nach Mott und Massey. Die sowjetischen Autoren schreiben dazu: „Wir nehmen an, daß das starke Anwachsen der Elektronenzahl für kleine Streuwinkel mit unelastischen Prozessen zusammenhängt. Leider ist ein Vergleich mit theoretischen Daten schwierig, weil in der Literatur endgültige Ausdrücke für die unelastische Streuung von schnellen Elektronen in kleine Winkel fehlen.“

Wir haben nun nach unseren Streuformeln (31) und (52) die Streuverteilung für 60 kV-Elektronen an Chrom berechnet. Wir haben dazu das Integral Θ numerisch aus der Hartree-Elektronenverteilung³⁶ für Cr^{++} zu $\Theta = 20,0 a_{\text{H}}^2$ berechnet und diesen Wert in die Streuformeln eingesetzt. Wir haben einfach mit $Z = 24$

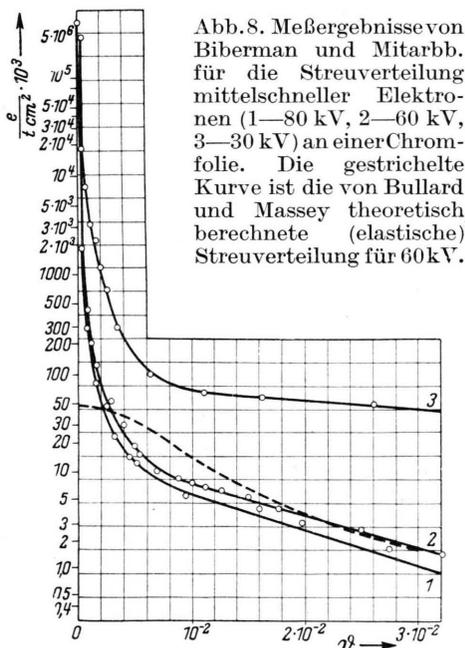


Abb. 8. Meßergebnisse von Biberman und Mitarbb. für die Streuverteilung mittelschneller Elektronen (1—80 kV, 2—60 kV, 3—30 kV) an einer Chromfolie. Die gestrichelte Kurve ist die von Bullard und Massey theoretisch berechnete (elastische) Streuverteilung für 60 kV.

gerechnet, obgleich Cr ja ein Metall ist, und die Metall-
elektronen ja eigentlich eine gesonderte Behandlung
verlangt hätten. Der aus unserer Streuformel folgende
differentielle Streuquerschnitt für 60 kV-Elektronen
an Cr ist in Abb. 9 als Funktion des Streuwinkels auf-
getragen. Da in Abb. 8 die Absolutwerte der Strom-
dichte auf der Photoplatte und in Abb. 9 die differen-
tiellen Streuquerschnitte aufgetragen sind, sind beide
Darstellungen nur nach Anpassung der Ordinaten-
maßstäbe miteinander vergleichbar. Dies ist aber mit
Hilfe der in Abb. 8 mit eingezeichneten, nach Mott
und Massey zu erwartenden theoretischen elastischen
Streuverteilung möglich. Man sieht aus Abb. 9, daß

die Experimentalergebnisse von Biberman und Mit-
arbb. durch unsere Theorie wesentlich besser gedeutet
werden können als durch die früheren, auf dem Tho-
mas-Fermi-Modell basierenden Theorien. Die noch
bestehenden Abweichungen im Bereich um $2 \cdot 10^{-2}$ sind
vielleicht durch Interferenz zu erklären. Berechnet
man nämlich die Lage des bei größeren Chromkristal-
len zu erwartenden ersten Beugungsmaximums, so er-
hält man mit $\lambda = 0,0487 \text{ \AA}$ (60 kV) für das kubisch
raumzentrierte Chrom mit seiner Gitterkonstanten
 $2,88 \text{ \AA}$ einen Winkel von $0,0487 \cdot \sqrt{2} / 2,88 = 0,024$. Bei

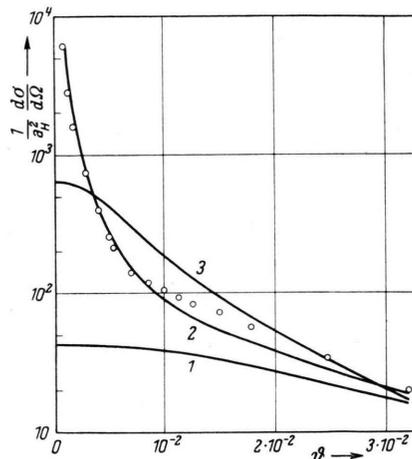


Abb. 9. Vergleich der Meßergebnisse von Biberman und Mitarbb. mit der hier vorgeschlagenen Theorie.

1 elastische Streuung, theoretisch; 2 Gesamtstreuung, theoretisch; 3 elastische Streuung nach Bullard und Massey, theoretisch; \circ Gesamtstreuung, experimentell.

kleineren Chromkriställchen, welche noch keine scharfen Beugungsringe zeigen, wäre aber immerhin eine verschwommene Intensitätserhöhung um $\vartheta = 0,024$ zu erwarten. Es ist aber auch möglich, daß einfach die Genauigkeit unserer Streuformeln, welche ja im Hinblick auf das richtige asymptotische Verhalten für $\vartheta \rightarrow 0$ und $\vartheta \rightarrow \infty$ etwas willkürlich gewählt sind, im Zwischenbereich nicht ganz ausreicht.

3. Mehrfachstreuung

Wir haben bisher nur den Fall der Einfachstreuung behandelt. Man wird nur bei Schichten, die sehr dünn im Vergleich mit der Aufhellungsdicke sind, näherungsweise mit

$$\frac{1}{N_0} \frac{dN}{d\Omega} = \frac{\gamma l}{A M_0} \frac{d\sigma}{d\Omega} \tag{65}$$

rechnen dürfen. Hierbei ist N_0 die Anzahl der einfallenden Elektronen, dN der davon nach Durchsetzen der Schicht in das Raumwinkelelement $d\Omega$ fallende Anteil, A das Atomgewicht der Streuatome und $M_0 = 1,660 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ die kernphysikalische Mas-

³⁶ R. L. Mooney, Phys. Rev. **55**, 557 [1939].

seneinheit. Die Näherung (65) ist nicht über den ganzen Winkelbereich gleich gut, sondern sie beginnt mit zunehmender Schichtdicke zuerst für kleine und erst später für große Winkel zu versagen. Dies hat dazu geführt, daß in der Literatur (s. z. B.³⁷) gelegentlich bei gegebener Schichtdicke eine Einteilung der Streuverteilung in Winkelbereiche vorgenommen wird:

Streuung in große Winkel = Einfachstreuung,
 Streuung in mittlere Winkel = Mehrfachstreuung,
 Streuung in kleine Winkel = Vielfachstreuung.

Wo die Grenzen dieser Winkelbereiche liegen, hängt dann natürlich von der Schichtdicke und von den Anforderungen an die Genauigkeit ab, mit welcher die Streuung in große Winkel durch (65) bzw. die in kleine Winkel durch eine Gauß-Verteilung angenähert werden soll.

Eine andere mögliche Begriffsbestimmung für Einfach-, Mehrfach- und Vielfachstreuung ist die nach der relativen Schichtdicke

$$p = \gamma l / \gamma l'; \quad (66)$$

p ist die mittlere Anzahl von elastischen Streuprozessen je einfallendes Elektron in einer Schicht der Massendicke γl . Die mittlere Anzahl von unelastischen Streuprozessen beträgt dann nach (64) pn .

Man könnte also vereinbaren, für

$p < 1$ von Einfachstreuung, für
 $p > 1$ von Mehrfachstreuung und für
 $p \gg 1$ von Vielfachstreuung

zu sprechen, bzw. eine entsprechende auf der mittleren Anzahl $p(n+1)$ der gesamten (elastischen und unelastischen) Zusammenstöße je einfallendes Elektron beruhende Definition zu wählen.

Wir werden uns in den folgenden mathematischen Überlegungen auf keine der beiden Begriffsbestimmungen festlegen; unsere Untersuchung der Mehrfachstreuung gilt also für jedes endliche p , und Einfach- und Vielfachstreuung sind nur ihre Grenzfälle.

Für die Berechnung der Winkelverteilung bei Mehrfachstreuung hat Bothe^{37,38} eine Rechenmethode angegeben. Sie besteht darin, daß man zunächst eine Funktion

$$\Psi(\chi) = \int_0^\infty \frac{d\sigma}{d\Omega} [J_0(\chi\vartheta) - 1] \vartheta d\vartheta \quad (67)$$

aus dem als bekannt vorausgesetzten differentiellen Streuquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ bei Einfachstreuung berechnet. Aus dieser Funktion $\Psi(\chi)$ folgt dann die Winkelverteilung $f(\vartheta)$ bei Mehrfachstreuung durch die Integraltransformation

$$f(\vartheta) = \int_0^\infty e^{2\pi N_L \gamma l \Psi(\chi)} J_0(\chi\vartheta) \chi d\chi. \quad (68)$$

Hierbei ist J_0 die Besselsche Funktion mit dem Index Null. $f(\vartheta)\vartheta d\vartheta$ ist derjenige Anteil der Primärstrahlung, welcher infolge der Mehrfachstreuung insgesamt um einen Winkel zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ aus seiner Einfallrichtung abgelenkt wird. $f(\vartheta)$ ist also so normiert, daß

$$\int_0^\infty f(\vartheta) \vartheta d\vartheta = 1 \quad (69)$$

gilt. Molière³⁹ hat gezeigt, daß man die Integration (67) für eine Einfachstreuverteilung der Gestalt (24) in geschlossener Form durchführen kann, und Leisegang hat für diesen Fall auch die Integration (68) näherungsweise durchgeführt, indem er im Integranden die Funktion $\exp(2\pi N_L \gamma l \Psi(\chi))$ durch eine Summe von Gliedern der Form $\sum_{n=1}^3 a_n \exp(-b_n \chi)$

annäherte. Bibermann⁴⁰ benutzt eine etwas abweichende Methode zur Berechnung der Mehrfachstreuung nach (67) und (68) unter Beschränkung auf elastische Streuprozesse am Thomas-Fermi-Atom. Er entwickelt schon den differentiellen elastischen Streuquerschnitt in eine Reihe von Gliedern der

Form $\sum_{k=1}^4 a_k \exp(-b_k \vartheta^2)$, führt dann die Integration

(67) geschlossen durch und nähert die so gewonnene Funktion $\Psi(\chi)$ durch einen Ausdruck der Form $1 - \exp(-h\chi)$ an, was ihm die geschlossene Auswertung auch der Integration (68) ermöglicht. Den Rechnungen von Leisegang und Biberman ist gemeinsam, daß sie sich bei der Berechnung der Winkelverteilung der Mehrfachstreuung auf elastische Streuprozesse beschränken. Für kleinste Streuwinkel erscheint uns aber eine Berücksichtigung auch der unelastischen Streuung wünschenswert.

Die Notwendigkeit, bei der Mehrfachstreuung in kleinste Winkel auch unelastische Prozesse mitzuberechnen, wurde von v. Borries⁴ und von Kanaya und Kato⁴¹ erkannt. Beide benutzen aber nicht das Verfahren von Bothe. v. Borries hat

³⁷ W. Bothe, im Handbuch der Physik (Geiger-Scheel), Band XXII/2, Berlin 1933.

³⁸ W. Bothe, Z. Phys. 5, 63 [1921].

³⁹ G. Molière, Z. Naturforsch. 3a, 78 [1948].

⁴⁰ L. M. Biberman, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz. 15, 424 [1951].

⁴¹ K. Kanaya u. A. Kato, Bull. Electrotechn. Lab. (Japan) 14, 1, 734 [1950]; 15, 4 [1951].

die numerische Rechnung für einen Spezialfall durchgeführt, indem er die Streuverteilung durch ein Gaußsches Fehlerverteilungsgesetz angenähert hat. Kanaya und Kato setzten eine Mehrfachstreuung derart an, daß sie oberhalb eines gewissen, von der Schichtdicke abhängigen Winkels Einfachstreuung nach (65) und unterhalb desselben konstante Streuintensität annahmen. Dieser Winkel bestimmte sich aus der Forderung, daß die Gesamtzahl der gestreuten gleich der Zahl der eingefallenen Elektronen sein sollte.

Wir wollen nun die Integrationen (67) und (68) für einen differentiellen Streuquerschnitt der Form

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z}{a_n^2} \left[\frac{ZR^4}{(1+q^2R^2)^2} + \frac{1}{q^4} \left(1 - \frac{1}{(1+q^2R^2)^2} \right) \right], \quad (70)$$

also unter Berücksichtigung der unelastischen Streuprozesse durchführen. Im ersten Glied auf der rechten Seite von (70) ist für q (4), im zweiten (41) einzusetzen. Infolgedessen ist (70) eine komplizierte Funktion des Streuwinkels ϑ . Wenn wir näherungsweise auch bei der unelastischen Streuung statt (41) auch die Beziehung (4) zwischen q und ϑ verwenden, machen wir nur für Streuwinkel $\vartheta < J/4eU$ einen wesentlichen Fehler. J/eU ist aber das Verhältnis zwischen der Ionisierungsenergie des Atoms und der Energie des einfallenden Elektrons. Bei den uns interessierenden Strahlspannungen zwischen 50 und 100 kV betrifft dieser Fehler also nur Streuwinkel, die kleiner sind als 10^{-4} . Ein weiterer möglicher Einwand gegen die Verwendung von (4) auch für die unelastische Streuung wäre, daß in diesem Fall der differentielle Streuquerschnitt für $\vartheta \rightarrow 0$ wie ϑ^{-2} gegen Unendlich geht. Aus diesem Grunde ist zwar die Verwendung von (4) für die Berechnung des unelastischen Gesamtquerschnitts bei der Einfachstreuung unzulässig, bei der Mehrfachstreuung bedeutet aber die Verwendung von (4) an Stelle von (41) nichts weiter, als daß wir nicht mehr zwischen ungestreuten und unelastisch in Winkel unter 10^{-4} gestreuten Elektronen unterscheiden. Wenn wir uns nur für die Winkelverteilung bei der Mehrfachstreuung in Winkel über 10^{-4} , nicht aber für Geschwindigkeitsverluste interessieren, können wir uns also auf diese Weise die Rechnung vereinfachen. Wenn die Apertur des Primärstrahls von der Größenordnung 10^{-4} oder größer ist, ist bei einer nur auf die Winkelverteilung gerichteten experimentellen Untersuchung eine Unterscheidung zwischen

ungestreuten und um so kleine Winkel gestreuten ohnehin sinnlos.

Verwenden wir also die Beziehung (4), derzufolge für nicht zu große Streuwinkel q proportional ϑ ist, und definieren wir einen Winkel ϑ_0 durch

$$qR = \vartheta/\vartheta_0; \text{ d. h. } \vartheta_0 = \lambda/2\pi R, \quad (71)$$

so wird aus (70)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z\vartheta_0^4 R^4}{a_n^2} \left[\frac{Z+1}{(\vartheta^2 + \vartheta_0^2)^2} + \frac{2\vartheta_0^2}{\vartheta^2(\vartheta^2 + \vartheta_0^2)^2} \right]. \quad (72)$$

Dafür können wir mit Hilfe von (32) und (71) schreiben

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\vartheta_0^2 \sigma_{el}}{\pi Z} \left[\frac{Z+1}{(\vartheta^2 + \vartheta_0^2)^2} + \frac{2\vartheta_0^2}{\vartheta^2(\vartheta^2 + \vartheta_0^2)^2} \right]. \quad (73)$$

Es wird also, wenn wir (73) in (67) einsetzen und (35) und (66) berücksichtigen,

$$2\pi N_L \gamma l \Psi(\chi) = \frac{2p}{Z} \vartheta_0^2 \int_0^\infty \left[\frac{Z+1}{(\vartheta^2 + \vartheta_0^2)^2} + \frac{2\vartheta_0^2}{\vartheta^2(\vartheta^2 + \vartheta_0^2)^2} \right] \cdot [J_0(\chi\vartheta) - 1] \vartheta d\vartheta. \quad (74)$$

Beziehen wir nun alle Winkel auf ϑ_0 , führen wir also die neuen Variablen

$$x = \vartheta/\vartheta_0; \quad y = \chi\vartheta_0 \quad (75)$$

ein, so wird

$$2\pi N_L \gamma l \Psi(\chi) = 2p \frac{Z+1}{Z} \int_0^\infty \frac{J_0(xy) - 1}{(1+x^2)^2} x dx + \frac{4p}{Z} \int_0^\infty \frac{J_0(xy) - 1}{x(1+x^2)^2} dx. \quad (76)$$

Beide Integrale sind streng berechenbar. Für das erste gilt³⁹

$$\int_0^\infty \frac{J_0(xy) - 1}{(1+x^2)^2} x dx = \frac{1}{2} [yK_1(y) - 1], \quad (77)$$

wobei K die modifizierte Hankel-Funktion⁴² vom Index 1

$$K_1(y) = -\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(iy) \quad (78)$$

ist. Für das Integral im zweiten Glied schreiben wir die Abkürzung

$$L(y) = \int_0^\infty \frac{J_0(xy) - 1}{x(1+x^2)^2} dx. \quad (79)$$

⁴² W. Magnus u. F. Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Berlin 1943, Verlag Springer.

Auch dieses Integral läßt sich geschlossen berechnen. Man erhält

$$L(y) = -\frac{1}{2} y K_1(y) - K_0(y) - \ln y + \frac{1}{2} - \ln \frac{\gamma}{2};$$

$$(\ln \gamma = 0,577216). \quad (80)$$

Wir können also $L(y)$ aus den tabulierten modifizierten Hankel-Funktionen K_0 und K_1 gewinnen.

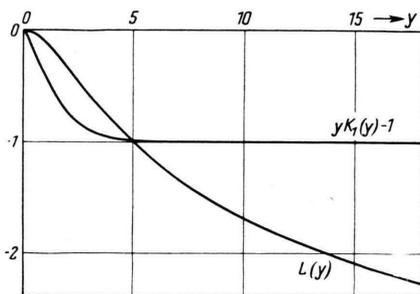


Abb. 10. Hilfsfunktionen zur Berechnung der Streu-
verteilung bei Mehrfachstreuung.

Die Funktionen $yK_1(y) - 1$ und $L(y)$ sind in Abb. 10 graphisch dargestellt. Für $y \rightarrow 0$ geht $L(y) \rightarrow -y^2/8$, für $y \rightarrow \infty$ geht

$$L(y) \rightarrow -\ln y + \frac{1}{2} - \ln \frac{\gamma}{2} = -\ln y + 0,61593. \quad (81)$$

Es gilt nun also

$$2 \pi N_L \gamma l \Psi(\chi)$$

$$= \frac{2p}{Z} \left[\frac{1}{2} (Z+1) (yK_1(y) - 1) + 2 L(y) \right]. \quad (82)$$

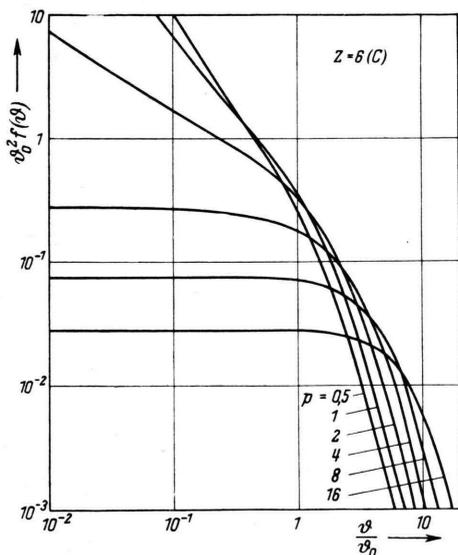


Abb. 11.

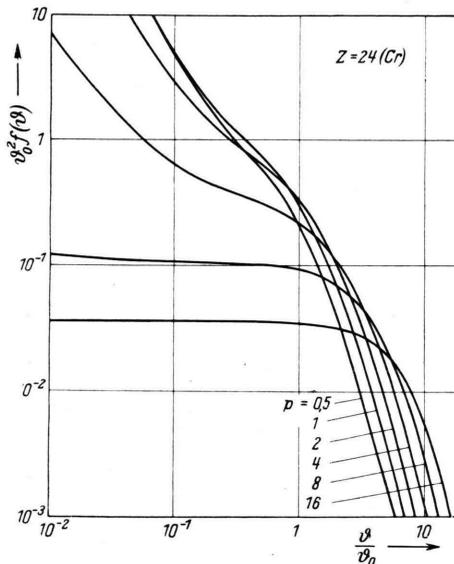


Abb. 12.

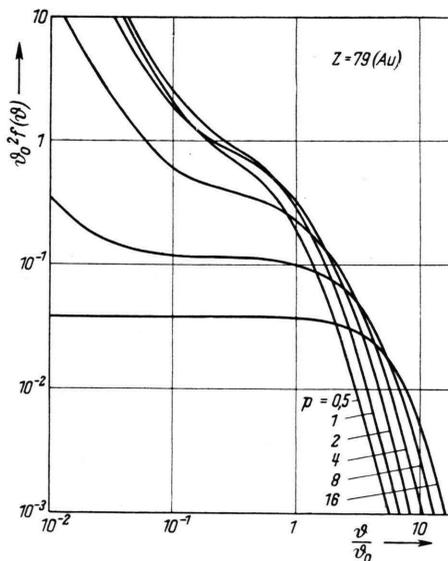


Abb. 13.

Abb. 11—13. Winkelverteilung $\vartheta_0^2 f(\vartheta)$ bei Mehrfachstreuung an C, Cr und Au für verschiedene relative Schichtdicken p . $f(\vartheta) \vartheta d\vartheta$ ist derjenige Anteil der einfallenden Elektronenzahl, der infolge Mehrfachstreuung insgesamt um einen Winkel zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ gestreut wird. Für 50 kV ist für C $\vartheta_0 = 0,0245$, für Cr $\vartheta_0 = 0,0432$ und für Au $\vartheta_0 = 0,0734$. $f(\vartheta)$ ist so normiert, daß

$$\int_0^\infty f(\vartheta) \vartheta d\vartheta = 1.$$

Setzen wir (82) in (68) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \vartheta_0^2 f(\vartheta) &= \int_0^\infty \exp \left[\frac{2p}{Z} \left\{ \frac{Z+1}{2} (yK_1(y) - 1) + 2L(y) \right\} \right] \\ &\quad \cdot J_0(xy) y dy. \end{aligned} \quad (83)$$

Will man nun für eine bestimmte relative Schichtdicke p und einen bestimmten Streuwinkel ϑ die Streuintensität bestimmen, so setzt man $x = \vartheta/\vartheta_0$ und die Werte von p , ϑ_0 und Z in den Integranden von (83) ein und integriert numerisch. Bei dieser numerischen Integration stößt man für kleine relative Schichtdicken auf folgende Schwierigkeit: Der Integrand hat für große y nach (83) und (81) das asymptotische Verhalten

$$\text{Integrand} \rightarrow \text{const} \cdot y^{1-4p/Z} J_0(xy), \quad (84)$$

d. h. er kann für kleine p eine oszillierende Funktion mit unbeschränkt wachsender Amplitude werden. In diesem Fall ist er also für eine numerische Integration über y bis ∞ nicht geeignet. Wie diese Schwierigkeit behoben wird, wird im mathematischen Anhang gezeigt.

Wir haben die Integrationen für $Z = 6$ (Kohlenstoff), $Z = 24$ (Chrom) und $Z = 79$ (Gold) für relative Schichtdicken von $p = 1/2, 1, 2, 4, 8$ und 16 durchgeführt. Für jede der so erhaltenen Kurven wurde am Schluß als Kontrolle die Gültigkeit der Normierungsbedingung (69) nachgeprüft. Die Kurven sind in den Abb. 11—16 wiedergegeben (Abb. 11—13 s. S. 199).

In den Abb. 11—13 ist als Ordinate $\vartheta_0^2 f(\vartheta)$, also eine der Intensität proportionale Größe aufgetragen, während in den Abb. 14—16 $\vartheta \vartheta_0 f(\vartheta)$ dargestellt ist.

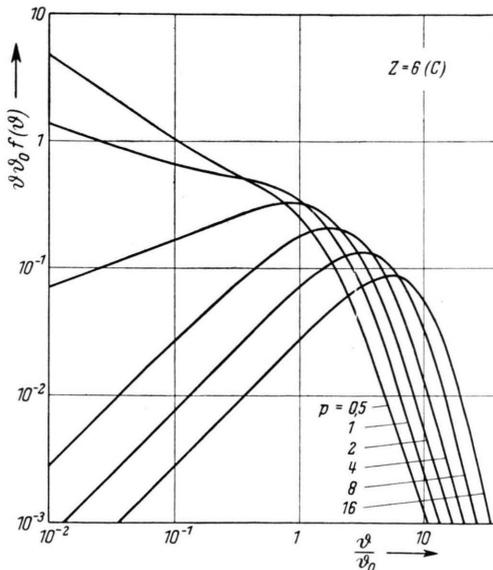


Abb. 14.

Das Integral von 0 bis ∞ über jeder der Kurven in den Abb. 14—16 ist definitionsgemäß gleich Eins. $\vartheta \vartheta_0 f(\vartheta) d(\vartheta/\vartheta_0)$ bedeutet den Anteil der Gesamtstrahlung, welcher zwischen die Kegel mit den Öffnungswinkeln ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ gestreut wird. Man sieht, daß mit zunehmender Schichtdicke die Verteilungskurven flacher und breiter werden, und daß der für kleine p noch deutlich ausgeprägte Primärstrahl mit zunehmender Schichtdicke zunächst immer flacher wird und schließlich ganz im Untergrund verschwindet. Dennoch ist aber die Streuverteilung selbst für $p=16$ noch deutlich von der Gauß-Verteilung verschieden.

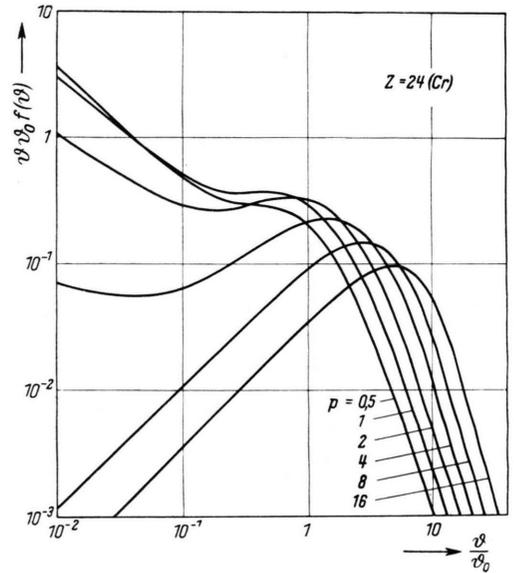


Abb. 15.

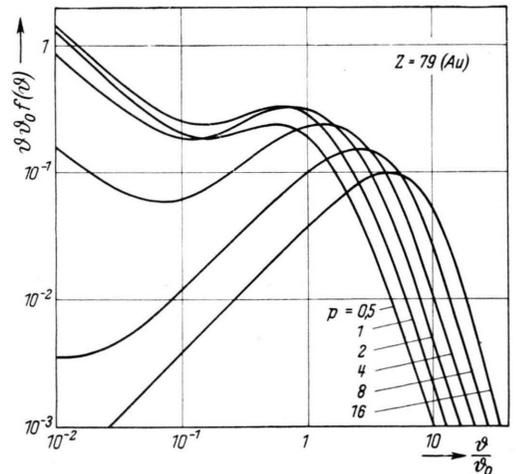


Abb. 16.

Abb. 14—16. Winkelverteilung $\vartheta \vartheta_0 f(\vartheta)$ bei Mehrfachstreuung an C, Cr und Au für verschiedene relative Schichtdicken. Wegen der Zahlenwerte von ϑ_0 und der Normierung von $f(\vartheta)$ s. die Unterschrift zu Abb. 11 bis 13.

Um dies zu veranschaulichen, ist in Abb. 17 die Streuverteilung für $Z = 6$ und $p = 16$ zum Vergleich mit derjenigen Gauß-Verteilung zusammen aufgetragen, welche denselben Maximalwert hat und die Normierungsbedingung (69) ebenfalls befriedigt.

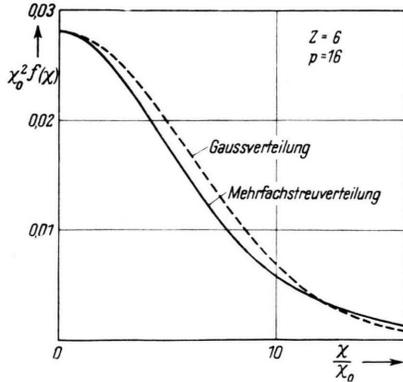


Abb. 17. Mehrfachstreuverteilung für $Z = 6$ (Kohlenstoff) und $p = 16$, verglichen mit einer Gauß-Verteilung (Vielfachstreuung), welche denselben Maximalwert besitzt und derselben Normierungsbedingung $\int_0^\infty f(\vartheta) \vartheta d\vartheta = 1$ genügt. Man sieht, daß für $p = 16$ die Mehrfachstreuverteilung noch merklich von der Gauß-Verteilung abweicht. Für höhere Ordnungszahlen Z ist die Abweichung bei $p = 16$ von der Gauß-Verteilung noch größer.

Es war zur Berechnung der Kurven in Abb. 11 bis 16 nicht nötig, spezielle Annahmen über den Atomradius oder die Wellenlänge der einfallenden Elektronen zu machen. Die Kurven folgen aus der Kenntnis nur der universellen Funktionen $K_n(y)$ sowie der Ordnungszahl. Die Kenntnis des Atomradius R und der absoluten Schichtdicke ist erst erforderlich, wenn man den Kurven Absolutwerte entnehmen will und dazu die Werte von ϑ_0 und p braucht.

Alle bisherigen Rechnungen bezogen sich auf den idealisierten Fall, daß der Primärstrahl eine Apertur besitzt, die klein gegen alle vorkommenden Winkel ist, so daß seine Intensitätsverteilung über den Raumwinkel in der mathematischen Behandlung durch eine zweidimensionale δ -Funktion ersetzt werden kann. Ist dies nicht der Fall, ist also der Primärstrahl von nicht mehr zu vernachlässigender Breite, so ist eine weitere Umrechnung der Funktion $f(\vartheta)$ erforderlich. Wir wollen dabei je nach der Form des Primärstrahls zwei Fälle unterscheiden:

a) Die Intensität im Primärstrahl ist nach der Gleichung

$$I(\alpha) = I_0 \exp(-\alpha^2/\alpha_H^2) \quad (85)$$

über den Winkel α verteilt. Da im normalen Betriebszustand eines Strahlerzeugers nicht nur die

Verteilung über den Raumwinkel, sondern auch die Stromdichteverteilung über die Ebene des engsten Querschnitts einem Gaußschen Verteilungsgesetz gehorcht⁴³, so ist auch die Winkelverteilung im Objekt unabhängig von der Kondensorbrechkraft von derselben Form (85), vorausgesetzt, daß sich zwischen Strahlerzeuger und Objekt keine Blenden befinden, welche äußere Bereiche des Strahls abblenden.

Die Wahrscheinlichkeit für ein beliebiges Elektron des Primärstrahls, mit seiner Einfallsrichtung einen Winkel zwischen α und $\alpha + d\alpha$ mit der Strahlachse zu bilden, beträgt also $2\alpha_H^{-2} \exp(-\alpha^2/\alpha_H^2) \alpha d\alpha$. Fällt dieser Primärstrahl nun auf eine Streufolie, deren Streuvermögen so beschaffen ist, daß die Wahrscheinlichkeit für ein Elektron, um einen Winkel zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ gestreut zu werden, $f(\vartheta)\vartheta d\vartheta$ beträgt, so ist die Wahrscheinlichkeit $F(\chi)\chi d\chi$ dafür, daß es nach dem Streuprozess eine Bewegungsrichtung besitzt, deren Neigung gegen die Strahlachse einen Betrag zwischen χ und $\chi + d\chi$ besitzt,

$$F(\chi) \chi d\chi = \frac{\chi d\chi}{2\pi} \frac{2}{\alpha_H^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{\vartheta^2 + \chi^2 - 2\vartheta\chi \cos\varphi}{\alpha_H^2}\right] f(\vartheta) \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (86)$$

Die Integration über φ ist vermöge der bekannten Beziehung⁴²

$$\int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{2\vartheta\chi \cos\varphi}{\alpha_H^2}\right] d\varphi = 2\pi J_0\left(\frac{2\vartheta\chi}{\alpha_H^2}\right) \quad (87)$$

leicht durchzuführen. Es ist also

$$F(\chi) = \frac{2}{\alpha_H^2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\chi^2 + \vartheta^2}{\alpha_H^2}\right) f(\vartheta) J_0\left(\frac{2\vartheta\chi}{\alpha_H^2}\right) \vartheta d\vartheta. \quad (88)$$

$F(\chi)$ ist so normiert, daß

$$\int_0^\infty F(\chi) \chi d\chi = 1 \quad (89)$$

ist. Wenn es nun möglich ist, $f(\vartheta)$ in eine Reihe nach Potenzen von ϑ

$$f(\vartheta) = \sum_n a_n \vartheta^{b_n} \quad (90)$$

zu entwickeln, so erhält man unter Benutzung bekannter Formeln aus⁴²

$$F(\chi) = \sum a_n \alpha_H^{b_n} \left(1 + \frac{b_n}{2}\right) L_{b_n/2}(-\chi^2/\alpha_H^2). \quad (91)$$

⁴³ J. Dosse, Z. Phys. 115, 530 [1940].

Die $L_{b_n}/2$ sind hierbei die Laguerreschen Funktionen. Eine Entwicklung der Form (90) für $f(\vartheta)$ ist bei Verwendung der in dieser Arbeit vorgeschlagenen Streuformeln immer möglich. Das erste Glied der Entwicklung ist, wie man aus den Gln. (105) und (109) des mathematischen Anhangs ersehen kann, durch

$$a_1 = 2 \vartheta_0^{-4p/Z} e^{-p \left(1 - \frac{1}{Z} + \frac{4}{Z} \ln \gamma\right)} \frac{\Gamma(1 - 2p/Z)}{\Gamma(2p/Z)}, \quad (92)$$

$$b_1 = (4p/Z) - 2 \quad (93)$$

gekennzeichnet. Die folgenden Glieder bilden eine gewöhnliche, bei $\vartheta = 0$ reguläre Potenzreihe mit geradzahligem $b_n = 0, 2, 4, \dots$

b) Die Intensität im Primärstrahl sei nach der Gleichung

$$I(\alpha) = \begin{cases} I_0 & \text{für } \alpha \leq \alpha_H \\ 0 & \text{für } \alpha > \alpha_H \end{cases} \quad (94)$$

verteilt. Eine derartige Verteilung kann sich ergeben, wenn im Strahlengang zwischen Strahlerzeuger und Objekt eine Aperturblende angeordnet ist, welche alle diejenigen Strahlen ausblendet, die in der Objektebene einen Winkel größer als α_H mit der Strahlachse bilden würden. In diesem Fall wird für $\chi > \alpha_H$

$$F(\chi) = \frac{2}{\pi \alpha_H^2} \int_{\chi - \alpha_H}^{\chi + \alpha_H} f(\vartheta) \vartheta \arccos \frac{\vartheta^2 + \chi^2 - \alpha_H^2}{2 \vartheta \chi} d\vartheta \quad (95)$$

und für $\chi < \alpha_H$

$$F(\chi) = \frac{2}{\alpha_H^2} \int_0^{\alpha_H - \chi} f(\vartheta) \vartheta d\vartheta \quad (96)$$

$$+ \frac{2}{\pi \alpha_H^2} \int_{\alpha_H - \chi}^{\alpha_H + \chi} f(\vartheta) \vartheta \arccos \frac{\vartheta^2 + \chi^2 - \alpha_H^2}{2 \vartheta \chi} d\vartheta.$$

Wir haben im Abschnitt über elastische Einfachstreuung erwähnt, daß es möglich ist, das Integral Θ (12) empirisch aus der Intensitätsverteilung bei Mehrfachstreuung zu bestimmen, wenn man die absolute Schichtdicke und die Intensitätsverteilung im Primärstrahl kennt. Wir können nämlich für den Streuwinkel Null das experimentell bestimmbare Verhältnis V der Streuintensität zur Intensität des Primärstrahls mit dem theoretisch zu erwartenden vergleichen. Dies Verhältnis wird nämlich für einen Primärstrahl der Form (85) nach (88) und (91)

$$V = \int_0^\infty \exp(-\vartheta^2/\alpha_H^2) f(\vartheta) \vartheta d\vartheta = \sum_n 2 a_n \alpha_H^{b_n-2} (1 + b_n/2) \quad (97)$$

und für einen Primärstrahl der Form (94)

$$V = \int_0^{\alpha_H} f(\vartheta) \vartheta d\vartheta. \quad (98)$$

Wie durch Vergleich mit dem experimentell bestimmten Wert von V das Integral Θ bestimmt wird, soll an folgendem Beispiel gezeigt werden: Aus der Abb. auf S. 191 der Arbeit von Leisegang²³ kann man entnehmen, daß bei Streuung von 68 kV-Elektronen an einer Goldschicht von 150 Å Dicke $V = 0,17$ beträgt. (Daß Leisegang nicht mit einer freitragenden Goldschicht gearbeitet hat, sondern daß darunter noch eine Zelluloidschicht lag, wollen wir in der folgenden Rechnung nicht berücksichtigen, um sie nicht noch weiter zu komplizieren. Da die Massendichte von Gold wesentlich größer als die von Zelluloid ist, glauben wir, dadurch keinen entscheidenden Fehler zu machen.) Die Breite des Primärstrahls, der etwa die Form (94) besitzt, gibt Leisegang mit $\alpha_H = 0,7^0 = 0,0122$ an. Es müßte also

$$0,17 = \int_0^{0,0122} f(\vartheta) \vartheta d\vartheta \quad (99)$$

gelten. Um das Integral auf der rechten Seite numerisch auswerten zu können, müßten wir nun noch den Wert p der relativen Schichtdicke und die Größe ϑ_0 aus (71) kennen. Wir benutzen dazu folgendes Verfahren der schrittweisen Näherung: Wir wählen in erster Näherung einen willkürlichen Wert für p (die Größenordnung von p ist durch $e^{-p} \approx V$ gegeben) und bestimmen aus diesem nach (32), (35) und (66)

$$p = \frac{\gamma l}{\gamma l'} = \gamma l N_L \sigma_{el} = \frac{\gamma l Z^2 N_L \lambda^2}{\pi a_H^2} R^2 \quad (100)$$

den zugehörigen Atomradius R . Aus diesem können wir nun nach (71) die Größe ϑ_0 berechnen. Damit kennen wir nun den absoluten Abszissenmaßstab und Ordinatenmaßstab der Kurven in Abb. 13 und können die rechte Seite von (99) integrieren. Ergibt sich eine Zahl größer (kleiner) als 0,17, so ist die Rechnung mit einem größeren (kleineren) Wert von p zu wiederholen. Wir haben in unserem Zahlenbeispiel zuerst versuchsweise $p = 2$ gesetzt und für V den Wert 0,136 erhalten. Wir haben deshalb in der nächsten Näherung $p = 1,75$ gesetzt, was für V den Wert 0,168 ergab. In Anbetracht der geringen Genauigkeit, mit der die Schichtdicke und die Breite des Primärstrahls bekannt war, und vor allem des durch die Vernachlässigung der Zelluloidschicht verursachten Fehlers haben wir auf einen dritten Nähe-

rungsschritt verzichtet. Der zu $p=1,75$ gehörige Atomradius beträgt nach (100)

$$R = 0,116 \text{ \AA}, \quad (101)$$

und der entsprechende Wert für Θ nach (30)

$$\Theta = 6,4 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2. \quad (102)$$

Der Zahlenwert aus (101) ist in guter Übereinstimmung mit dem sich aus (26) für Gold ergebenden $R = 0,123 \text{ \AA}$. Etwas weniger gut ist die Übereinstimmung, wenn man den Zahlenwert aus (102) mit dem aus der diamagnetischen Suszeptibilität von Gold nach (21) folgenden $\Theta = 9,7 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$ vergleicht, was nach (30) $R = 0,143 \text{ \AA}$ entspricht. Wir haben ja oben bereits darauf hingewiesen, daß die Berechnung von Θ aus der diamagnetischen Suszeptibilität eigentlich nur für Edelgase zulässig ist. Ein Vergleich mit aus Hartree-Funktionen berechneten Werten ist hier leider nicht möglich, da für Gold unseres Wissens noch keine Hartree-Funktionen berechnet worden sind.

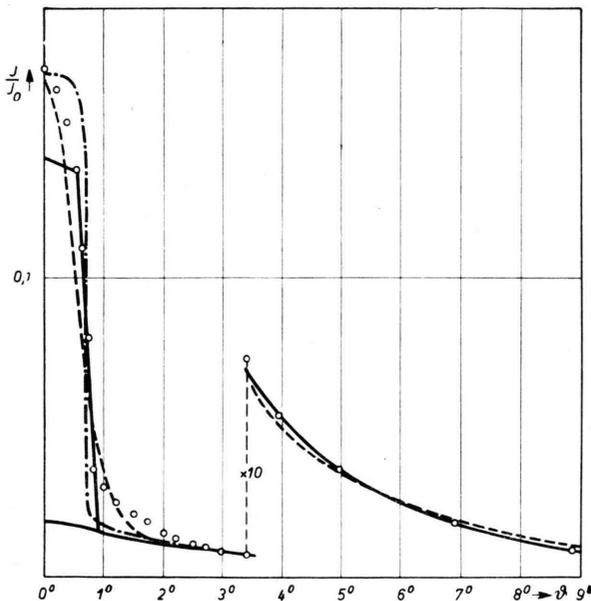


Abb. 18. Vergleich eines Experiments von Leisegang mit unserer Theorie. Die strichpunktierte Kurve ist unter Zugrundelegung einer „kastenförmigen“ Intensitätsverteilung, die gestrichelte unter Annahme einer Gauß-Verteilung im Primärstrahl berechnet. Die durchgezogene Kurve wurde von Leisegang berechnet.

In Abb. 18 ist die von Leisegang experimentell aufgenommene Streuverteilung von 68 kV-Elektronen an einer Streufolie von 150 \AA Dicke wiedergegeben. Die durchgezogene Kurve ist die von Leisegang unter Vernachlässigung der unelastischen Streuung berechnete

Streuverteilung. Die gestrichelte Kurve wurde von uns unter Annahme einer Primärstrahlform nach (85) und die strichpunktierte unter Annahme einer Primärstrahlform nach (94) berechnet, beide für $p=1,75$ (s. o.). Die wirkliche Primärstrahlform dürfte zwischen diesen beiden Grenzfällen gelegen haben. Man sieht aus Abb. 18, daß unsere Theorie für das gegebene Beispiel kaum Vorzüge vor der von Leisegang benutzten besitzt. Das liegt daran, daß wir bei der Ableitung unserer Streuformeln besonderen Wert auf das Verhalten für kleinste Winkel und auf die richtige Berücksichtigung der unelastischen Streuung gelegt haben. Beides geht wegen der Breite des Primärstrahls in diesem unter. Nach (63) und (71) wird der unelastische Streuquerschnitt ja erst für Winkel, die kleiner als $\vartheta_0 \sqrt{2/(Z-1)}$ sind, größer als der elastische. Im Beispiel von Abb. 18 beträgt dieser Winkel $0,57^\circ$, ist also kleiner als die Primärstrahlbreite.

Man sieht ferner aus Abb. 18, daß die von Leisegang beobachtete Abweichung zwischen Theorie und Experiment im Bereich zwischen 1° und 2° auch durch Mitberücksichtigung der unelastischen Streuung und der Primärstrahlbreite nicht befriedigend erklärt werden kann, es sei denn, man nähme eine langsamer abfallende Form des Primärstrahls an. Dies Verhalten ist ähnlich dem in Abb. 9. Dort hatten wir die Vermutung geäußert, daß durch Interferenzeffekte eine zusätzliche diffuse Intensitätsanhäufung im Bereich der ersten Beugungsringe auftreten könne. Vielleicht ist das auch in dem in Abb. 18 gezeigten Beispiel der Fall. Da Gold ein kubisch flächenzentriertes Gitter mit der Gitterkonstanten $4,05 \text{ \AA}$ besitzt, wären bei 68 kV ($\lambda = 0,0455 \text{ \AA}$) die ersten Beugungsmaxima bei

$$\vartheta = \frac{0,0455}{4,07} \sqrt{3} = 1,11^\circ \quad \text{und} \quad \frac{0,0455}{4,07} \sqrt{4} = 1,28^\circ$$

zu erwarten.

Herrn Prof. Dr. B. v. Borries danke ich für die Anregung zur vorliegenden Arbeit, für sein ständiges Interesse und zahlreiche Diskussionen. Herrn Prof. Dr. J. Meixner danke ich für den Hinweis, daß die Funktion (79) in geschlossener Form integrierbar ist.

Mathematischer Anhang

Die Integration von (83) für kleine p

Wir haben in (84) gesehen, daß der Integrand in (83) für kleine p eine oszillierende Funktion mit unbeschränkt zunehmender Amplitude sein kann. Diese Schwierigkeit ist übrigens nicht etwa die Folge des oben erwähnten Unendlichwerdens des differentiellen Streuquerschnitts für unelastische Einfachstreuung bei Verwendung von (4). Sie taucht vielmehr schon in einfacherer Form bei der Behandlung der elastischen Mehrfachstreuung allein auf³⁹. Die (83) entsprechende Formel für elastische Mehrfachstreuung unterscheidet sich ja von (83) nur dadurch, daß dort im Exponenten das Glied mit $L(y)$ und der Faktor $(Z+1)/Z$ fortfällt. Der Integrand hat dort also immer das asymptotische Verhalten

$$\text{Integrand} \rightarrow \text{const} \cdot y J_0(xy). \quad (103)$$

Man hilft sich dort mit dem Kunstgriff, daß man

$$\int_0^{\infty} J_0(xy) y \, dy = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-ay} J_0(xy) y \, dy \quad (104)$$

setzt und erst die Integration und dann erst den Grenzübergang durchführt. Entsprechend wollen wir auch hier vorgehen. Wir schreiben statt (83)

$$\begin{aligned} \vartheta_0^2 f(\vartheta) = & \int_0^{\infty} e^{\left[\frac{2p}{Z} \left\{ \frac{Z+1}{2} (y^{K_1(y)} - 1) + 2L(y) \right\} \right.} \\ & \left. - e^{\frac{2p}{Z} \left\{ -\frac{Z-1}{2} - 2\ln y - 2\ln \frac{\gamma}{2} \right\}} \right] J_0(xy) y \, dy \\ & + \int_0^{\infty} e^{\frac{2p}{Z} \left\{ -\frac{Z-1}{2} - 2\ln y - 2\ln \frac{\gamma}{2} \right\}} J_0(xy) y \, dy. \end{aligned} \quad (105)$$

Dann geht im ersten Integrand die eckige Klammer hinreichend stark gegen Null, um eine numerische Integration zu ermöglichen. Das zweite Integral können wir aber streng lösen, wenn wir einen ähnlichen Kunstgriff wie in (104) anwenden. Wir schreiben nämlich

$$\int_0^{\infty} J_0(xy) y^{1-4p/Z} \, dy = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-ay} J_0(xy) y^{1-4p/Z} \, dy. \quad (106)$$

Das in (106) links stehende Integral ist ja bis auf den Faktor $\exp(-p(Z-1)/Z - 4p/Z \ln \gamma/2)$ mit dem zweiten Integral in (105) identisch. Das in (106) rechts stehende Integral läßt sich aber für $p < Z/2$ durch die hypergeometrische Funktion ausdrücken⁴², und zwar ist

$$\int_0^{\infty} e^{-ay} J_0(xy) y^{1-4p/Z} \, dy = \frac{\Gamma\left(2 - \frac{4p}{Z}\right)}{a^{2-4p/Z}} {}_2F_1\left(1 - \frac{2p}{Z}, \frac{3}{2} - \frac{2p}{Z}; 1; -x^2/a^2\right). \quad (107)$$

Nach einer bekannten Transformationsformel für die hypergeometrische Funktion können wir dafür schreiben

$$\int_0^{\infty} e^{-ay} J_0(xy) y^{1-4p/Z} \, dy = \frac{\Gamma\left(2 - \frac{4p}{Z}\right)}{a^{2-4p/Z}} \left\{ \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^{-1 + \frac{2p}{Z}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{2p}{Z}\right) \Gamma\left(\frac{2p}{Z}\right)} {}_2F_1\left(1 - 2p/Z, 1 - 2p/Z; 1; -a^2/x^2\right) \right. \quad (108)$$

$$\left. + \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{2p}{Z}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{2p}{Z}\right)} \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{3}{2} + \frac{2p}{Z}} {}_2F_1\left(\frac{3}{2} - \frac{2p}{Z}, \frac{3}{2} - \frac{2p}{Z}; 3/2; -a^2/x^2\right) \right\}. \quad (108)$$

Im Grenzübergang $a \rightarrow 0$ wird daraus

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-ay} J_0(xy) y^{1-4p/Z} \, dy = \frac{\Gamma\left(2 - \frac{4p}{Z}\right) \sqrt{\pi}}{x^{2-4p/Z} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{2p}{Z}\right) \Gamma\left(\frac{2p}{Z}\right)} = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{2p}{Z}\right)}{2^{4p/Z-1} x^{2-4p/Z} \Gamma\left(\frac{2p}{Z}\right)}. \quad (109)$$

Damit sind die Schwierigkeiten bei der Integration von (83) behoben.