

ピッチング励振を受ける円筒容器内液面の周波数応答解析*

高原 弘 樹^{*1}, 木 村 康 治^{*1}
筒 井 賢^{*2}, 坂 田 勝^{*3}Frequency Response of Sloshing in a Circular Cylindrical Tank
Subjected to Pitching ExcitationHiroki TAKAHARA, Koji KIMURA,
Makoto TSUTSUI and Masaru SAKATA

Frequency responses of stable planar and rotary motions in a partially filled circular cylindrical tank, subjected to a pitching excitation at a frequency in the neighborhood of the lowest resonant frequency, are investigated. The nonlinearity of the liquid surface oscillation and the nonlinear coupling between the dominant modes and other modes (e. g., an axisymmetric mode) are considered in the response analysis of the sloshing motion. The equations governing the amplitude of those two types of liquid surface motions are derived and the stability analysis of each motion is conducted. An experiment was carried out using a model tank. Good agreement was found between the theoretical and experimental results. It is shown that the nonlinear analysis is important for estimating the sloshing responses.

Key Words: Vibration of Continuous System, Liquid Sloshing, Circular Cylindrical Tank, Non-linear Vibration, Pitching Excitation, Frequency Response

1. 緒 言

ピッチング励振を受ける容器内液面のスロッシングは、タンカーなどの液体貨物運搬船では重要な問題であり、直方体容器に着目した研究が従来から行われている^{(1)~(3)}。しかし近年、航空宇宙の分野で、ピッチング励振を受ける円筒容器内のスロッシングが注目されている。ロケット、人工衛星に搭載される液体燃料タンクでは、発射時や姿勢制御時などに容器等は水平軸回りの回転運動を受ける場合があり、内部液体のスロッシングが生じるとタンク内の動圧の大きな変動が起き、それがロケット、人工衛星の挙動に悪影響を与え、さらに制御不能に陥ることもあると考えられるからである。

さらに、スロッシング現象は固有振動数が揺動振幅に依存するなどの顕著な非線形性を示すため、共振に近い状態での液面揺動を明らかにするためには微小振幅波を仮定する線形解析では不十分であり、液面の境界条件の非線形性を考慮した有限振幅理論に基づく応

答解析が必要と考えられる。そのため、液面揺動の非線形性を考慮した研究は広く行われている^{(3)~(9)}。特に円筒容器内の最低次固有振動数近傍で発生するスロッシングでは、液面揺動の非線形性により、液面揺動の節直径の位置が変化しないで揺動する現象(面内揺動)と節直径の位置が変化しながら揺動する現象(面外揺動)が発生することが知られている。さらに、面外揺動の中には節直径の位置が回転しながら液面が揺動し、液面に進行波が生じる現象(回転揺動)があることも知られている。水平励振を受ける場合においては、最低次固有振動数近傍の各揺動の周波数応答や安定限界に対する研究がなされている^{(10)~(16)}。しかし、ピッチング励振を受ける場合の研究は著者らの知る限りでは見当たらない。

著者らはこれまでに、剛体および弾性円筒容器を対象にして、ピッチング励振と水平・鉛直方向励振を受ける場合について理論解析および実験を行っている^{(17)~(19)}。本研究では、剛体円筒容器がピッチング励振を受ける場合について、液面揺動の非線形性を考慮して、最低次固有振動数近傍で、面内揺動および面外揺動が発生する場合について各揺動の周波数応答を求め、安定性解析を行った。特に面外揺動では、液面に進行波が発生し回転揺動(本研究では、進行波が1回

* 原稿受付 平成5年7月7日。

^{*1} 正員, 東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。^{*2} 東京工業大学工学部。^{*3} 正員, 拓殖大学工学部 (〒193 八王子市館町 815-1)。

転する周期とピッチング励振の周期に近いものを回転揺動と呼ぶが生じる場合に着目した。さらに、モデルタンクを用いて揺動実験を行い、数値計算結果と比較・検討を行った。

2. 解析モデル

図1に円筒容器の解析モデルを示す。容器の半径は a であり、 $O-X\dot{Y}Z$ は静止座標系、 $o-xyz$ 、 $o-r\theta z$ は容器に固定された移動座標系である。容器は X 、 Z 方向にそれぞれ強制変位 $f_X(t)$ 、 $f_Z(t)$ を受けると同時に、座標系 $o-xyz$ 上の一点 $C(x_c, 0, z_c)$ を通り y 軸に平行な直線まわりにピッチングによる角度励振 $\xi(t)$ を受けるものとする。液体の密度を ρ_f 、静止時の液深を h とし、液体は渦なしの非圧縮性完全流体と仮定する。また、重力は $-Z$ 方向(下向き)に働くものとする。

3. 非線形振動方程式

3.1 基礎方程式 液位を $\eta(r, \theta, t)$ 、液体の速度ポテンシャルを $\phi(r, \theta, z, t)$ とすると、本系の基礎方程式は以下のように表される。

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = v_r, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = v_z \quad \dots\dots (2)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \eta r dr d\theta = 0 \quad \dots\dots (3)$$

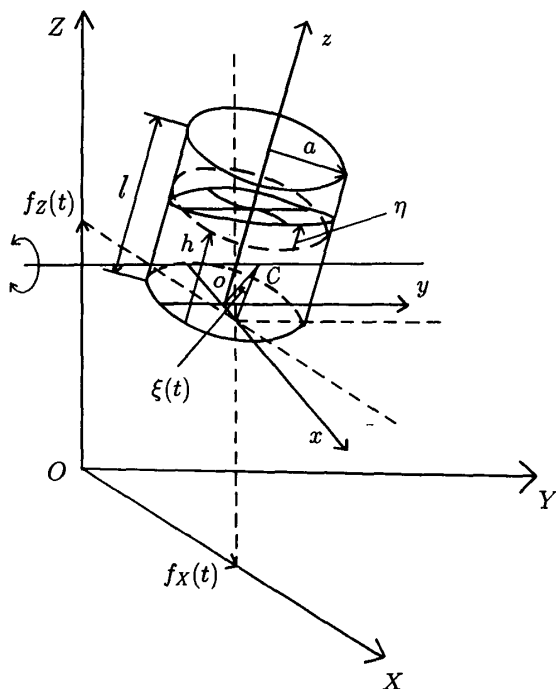


図1 解析モデル

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a P \Big|_{z=h+\eta} \delta \eta r dr d\theta = 0 \quad \dots\dots (4)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \left\{ -\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\nabla \phi - v_c) \Big|_{z=h+\eta} \cdot \nabla (z-h-\eta) \right\} \times \delta \phi \Big|_{z=h+\eta} r dr d\theta = 0 \quad \dots\dots (5)$$

ここで、 P は静止座標系における圧力であり、移動座標系 $o-r\theta z$ の成分を用いて表せば、ベルヌイの定理より

$$\begin{aligned} P(r, \theta, z, t) &= -\rho_f \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} - v_r \frac{\partial \phi}{\partial r} - v_\theta \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} - v_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right. \\ &\quad + g \{ -(r \cos \theta - x_c) \sin \xi \\ &\quad \left. + (z - z_c) \cos \xi + f_z + z_c \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + \dot{G}(t) \right] \end{aligned} \quad \dots\dots (6)$$

式(6)中の $\dot{G}(t)$ は Euler の運動方程式を積分することで生じる任意の時間の関数であり、 $v_c = (v_r, v_\theta, v_z)$ は、容器が静止座標系に対して有する速度である⁽¹⁷⁾。

式(1)は連続条件、式(2)は側壁および底面における速度の適合条件、式(3)は非圧縮性の条件、式(4)、(5)は液面における力学的および運動学的非線形境界条件である。

3.2 許容関数 基礎方程式の近似解をガレルキン法を用いて求める⁽²⁰⁾。 ϕ と η の許容関数を線形自由振動の固有振動モードの重ね合せによって表す。

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn}(t) \cos m\theta + B_{mn}(t) \sin m\theta) \\ &\quad \times J_m \left(\lambda_{mn} \frac{r}{a} \right) \frac{\cosh(\lambda_{mn} z/a)}{\cosh(\lambda_{mn} h/a)} \\ &\quad + r v_r + (z-h) v_z + \xi \{ r(z-h) \cos \theta \\ &\quad + \Pi(r, \theta, z) \} \quad \dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(r, \theta, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{ C_{mn}(t) \cos m\theta + D_{mn}(t) \sin m\theta \} \\ &\quad \times J_m \left(\lambda_{mn} \frac{r}{a} \right) + r \cos \theta \tan \xi \quad \dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここで、 $A_{mn}(t)$ 、 $B_{mn}(t)$ 、 $C_{mn}(t)$ 、 $D_{mn}(t)$ は一般化座標、 J_m は m 次の第1種ベッセル関数、 λ_{mn} は側壁の境界条件[式(2)]により定められる固有値である。固有値 λ_{mn} と固有振動数 ω_{mn} との間には以下の関係がある。

$$\omega_{mn}^2 = \frac{g \lambda_{mn}}{a} \tanh \left(\frac{\lambda_{mn} h}{a} \right) \quad \dots\dots (9)$$

また、 Π は境界条件を満たすために必要な項である⁽¹⁷⁾。

許容関数式(7), (8)中で, A_{mn} , C_{mn} は面内揺動を表し, さらに, B_{mn} , D_{mn} を考慮することにより面外揺動を表すことができる。以下の解析では, 高次モードの影響を微小と考え $\bar{m}=3$, $\bar{n}=1$ として解析し, 添字 $n=1$ を省略して $A_{m1}=A_m$, $\lambda_{m1}=\lambda_m$ のように表記する。

3.3 振動方程式系 以下の解析においては, ピッチング励振のみを受ける場合の容器内液面のスロッシング挙動に着目して計算を進める。諸量を容器半径 a と最低次の液面固有振動数 ω_1 により無次元化した⁽¹⁷⁾ 後, 式(7), (8)を式(4), (5)に代入して, ガレルキン法を適用する。級数の打ち切りに関しては, 以下のようなオーダーの仮定を行う⁽¹¹⁾。

$$\left. \begin{array}{l} A_1, \dot{A}_1, \ddot{A}_1, B_1, \dot{B}_1, \ddot{B}_1 \\ C_1, \dot{C}_1, \ddot{C}_1, D_1, \dot{D}_1, \ddot{D}_1 \\ A_m, \dot{A}_m, \ddot{A}_m, B_m, \dot{B}_m, \ddot{B}_m \\ C_m, \dot{C}_m, \ddot{C}_m, D_m, \dot{D}_m, \ddot{D}_m \quad (m=0, 2) \\ A_3, \dot{A}_3, \ddot{A}_3, B_3, \dot{B}_3, \ddot{B}_3 \\ C_3, \dot{C}_3, \ddot{C}_3, D_3, \dot{D}_3, \ddot{D}_3 \\ \xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sim O(\varepsilon^{1/3}) \\ \sim O(\varepsilon^{2/3}) \\ \sim O(\varepsilon^{3/3}) \\ \sim O(\varepsilon^{3/3}) \end{array} \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(10)は, 円周方向一次モードの方程式の非線形項が三次の Duffing 形方程式となることから, その非線形項と入力 $\xi(t)$ のオーダーが同程度になるように仮定して得られたものである。ガレルキン法を適用し, 式(10)に基づき $O(\varepsilon^{3/3})$ まで保存するような省略を行い, 液位に関する一般化座標 C_m , D_m について整理すると以下のような振動方程式系が得られる。

$$\begin{aligned} \ddot{C}_1 + 2\zeta_1 \dot{C}_1 + C_1 + P^{(1)} C_1^3 + P^{(2)} C_1 \dot{C}_1^2 + P^{(3)} C_1 D_1^2 \\ + P^{(4)} C_1 \dot{D}_1^2 + P^{(5)} \dot{C}_1 D_1 \dot{D}_1 + P_0^{(11)} C_1 C_0 \\ + P_0^{(12)} \dot{C}_1 \dot{C}_0 + P_2^{(11)} (C_1 C_2 + D_1 D_2) \\ + P_2^{(12)} (\dot{C}_1 \dot{C}_2 + \dot{D}_1 \dot{D}_2) = \sigma_p \ddot{\xi} \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{D}_1 + 2\zeta_1 \dot{D}_1 + D_1 + P^{(1)} D_1^3 + P^{(2)} D_1 \dot{D}_1^2 + P^{(3)} D_1 C_1^2 \\ + P^{(4)} D_1 \dot{C}_1^2 + P^{(5)} \dot{D}_1 C_1 \dot{C}_1 + P_0^{(11)} D_1 C_0 \\ + P_0^{(12)} \dot{D}_1 \dot{C}_0 + P_2^{(11)} (C_1 D_2 - D_1 C_2) \\ + P_2^{(12)} (\dot{C}_1 \dot{D}_2 - \dot{D}_1 \dot{C}_2) = 0 \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{C}_{m'} + 2\zeta_{m'} \omega_{m'} \dot{C}_{m'} + \omega_{m'}^2 C_{m'} \\ = P_m^{(21)} \{C_1^2 + (1-m') D_1^2\} \\ + P_m^{(22)} \{\dot{C}_1^2 + (1-m') \dot{D}_1^2\} \\ (m'=0, 2) \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{D}_2 + 2\zeta_2 \omega_2 \dot{D}_2 + \omega_2^2 D_2 = 2(P_2^{(21)} C_1 D_1 + P_2^{(22)} \dot{C}_1 \dot{D}_1) \\ \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{C}_3 + 2\zeta_3 \omega_3 \dot{C}_3 + \omega_3^2 C_3 \\ = P^{(31)} C_1^3 + P^{(32)} C_1 \dot{C}_1^2 + P^{(33)} C_1 D_1^2 + P^{(34)} C_1 \dot{D}_1^2 \\ + P^{(35)} \dot{C}_1 D_1 \dot{D}_1 + P^{(41)} (C_1 C_2 - D_1 D_2) \\ + P^{(42)} (\dot{C}_1 \dot{C}_2 - \dot{D}_1 \dot{D}_2) \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{D}_3 + 2\zeta_3 \omega_3 \dot{D}_3 + \omega_3^2 D_3 \\ = -P^{(31)} D_1^3 - P^{(32)} D_1 \dot{D}_1^2 - P^{(33)} D_1 C_1^2 \\ - P^{(34)} D_1 \dot{C}_1^2 - P^{(35)} \dot{D}_1 C_1 \dot{C}_1 \\ + P^{(41)} (C_1 D_2 + D_1 C_2) + P^{(42)} (\dot{C}_1 \dot{D}_2 + \dot{D}_1 \dot{C}_2) \\ \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ここで, $\phi_m = \lambda_m \tanh(\lambda_m h)$, ω_m は最低次の固有振動数によって無次元化された m 次モードの固有振動数, ζ_m はエネルギー散逸を等価的に表すために導入した減衰比である。また, 式中の係数 $P^{(i)}$, 式(11)右辺の外力の影響係数 σ_p の表記は省略する⁽¹⁷⁾。

3.4 面外揺動 上記の振動方程式から外部ピッチング入力, 円周方向一次モード C_1 のみに作用することがわかる[式(11)]。面外揺動成分である D_m のモードには, 直接ピッチング入力は作用せず, $C_1^2 D_1$, $C_2 D_1$, $C_1 D_2$ などの積の形で C_m のモードと非線形に連成している。このため, 初期状態において液面が完全に静止している場合には, 励振力がまったく作用しないので, D_m のモードは成長せず面外揺動は発生しないと考えられる。

さらに, D_1 のモードに着目する。 D_1 のモードと C_1 のモードとの非線形連成は, $C_1^2 D_1$, $\dot{C}_1^2 D_1$ などの形であり, D_1 のモードから考えるとパラメータ励振となっている[式(12)]。 C_1 のモードの固有振動数近傍で励振される場合を考えているので, C_1^2 には, 入力振動数の2倍, すなわち, C_1 のモードの固有振動数の2倍近傍の周波数成分が存在する。 D_1 のモードと C_1 のモードの固有振動数は一致しているので, D_1 のモードはパラメトリック共振を起こすと考えられる。したがって, 微小なじょう乱が存在しただけでも, パラメトリック共振によって D_1 のモードが成長し, 面外揺動が発生することが考えられる。

4. 周波数応答解析

以下のような調和ピッチング励振を受ける場合の, 最低固有振動数近傍での液面揺動(円周方向一次モード)に着目し, 周波数応答を求める。

$$\xi(t) = \xi_0 \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで, ξ_0 はピッチングの入力振幅, ω は最低次固有振動数近傍の励振振動数である。

4.1 近似解の仮定 円周方向一次モードの非線形振動方程式(11), (12)には三次の非線形項があることと減衰による位相の遅れを考慮して, 円周方向一次モードに関する一般化座標 C_1 , D_1 の定常振動の一次近似解を以下のように定める。

$$C_1^{(1)} = a_1(\tau) \cos \omega t + a_2(\tau) \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$D_1^{(1)} = b_1(\tau) \cos \omega t + b_2(\tau) \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 τ は t に比べてゆっくり変化する時間を表すために導入した変数 [$O(\tau/t) = \varepsilon^{2/3}$] であり、励振振動数 ω で振動する液位応答に対して、その振幅 a_1, a_2, b_1, b_2 の変動はゆっくりであると仮定している。ここで、上添字の (1) は一次近似解であることを示す。

4・2 振幅に関する方程式 式(18), (19)を式(13), (14)に代入し、 $O(\varepsilon^{3/3})$ の項まで保存すると、円周方向零次モード C_0 と円周方向二次モード C_2, D_2 の定常振動は以下のようになる。

$$\begin{aligned} C_0 = & \frac{1}{2\omega_0^2} (P_0^{(21)} + \omega^2 P_0^{(22)}) (a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2) \\ & + \frac{1}{2} (P_0^{(21)} - \omega^2 P_0^{(22)}) \{ \Delta_{01} (a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2) \\ & - 2\Delta_{02} (a_1 a_2 + b_1 b_2) \} \cos 2\omega t \\ & + \frac{1}{2} (P_0^{(21)} - \omega^2 P_0^{(22)}) \{ \Delta_{02} (a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2) \\ & + 2\Delta_{01} (a_1 a_2 + b_1 b_2) \} \sin 2\omega t \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 = & \frac{1}{2\omega_2^2} (P_2^{(21)} + \omega^2 P_2^{(22)}) (a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2) \\ & + \frac{1}{2} (P_2^{(21)} - \omega^2 P_2^{(22)}) \{ \Delta_{21} (a_1^2 - a_2^2 - b_1^2 + b_2^2) \\ & - 2\Delta_{22} (a_1 a_2 - b_1 b_2) \} \cos 2\omega t \\ & + \frac{1}{2} (P_2^{(21)} - \omega^2 P_2^{(22)}) \{ \Delta_{22} (a_1^2 - a_2^2 - b_1^2 + b_2^2) \\ & + 2\Delta_{21} (a_1 a_2 - b_1 b_2) \} \sin 2\omega t \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 = & \frac{1}{\omega_2^2} (P_2^{(21)} + \omega^2 P_2^{(22)}) (a_1 b_1 + a_2 b_2) \\ & + (P_2^{(21)} - \omega^2 P_2^{(22)}) \{ \Delta_{21} (a_1 b_1 - a_2 b_2) \\ & - \Delta_{22} (a_1 b_2 + a_2 b_1) \} \cos 2\omega t \\ & + (P_2^{(21)} - \omega^2 P_2^{(22)}) \{ \Delta_{22} (a_1 b_1 - a_2 b_2) \\ & + \Delta_{21} (a_1 b_2 + a_2 b_1) \} \sin 2\omega t \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

ただし、

$$\Delta_{m1} = \frac{\omega_m^2 - 4\omega^2}{(\omega_m^2 - 4\omega^2)^2 + (4\zeta_m \omega_m \omega)^2} \dots\dots\dots (23)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{m2} = & \frac{4\zeta_m \omega_m \omega}{(\omega_m^2 - 4\omega^2)^2 + (4\zeta_m \omega_m \omega)^2} \dots\dots\dots (24) \\ (m=0, 2) \end{aligned}$$

式(18)~(22)を式(11), (12)に代入し、 $O(\varepsilon^{3/3})$ の項まで保存し、永年項を消去する条件より、以下の振幅に関する方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & 2\omega \dot{a}_2 + (1 - \omega^2) a_1 + 2\zeta_1 \omega a_2 \\ & + F^{(1)} a_1^3 + F^{(2)} a_1^2 a_2 + F^{(1)} a_1 a_2^2 + F^{(2)} a_2^3 \\ & + F^{(1)} a_1 b_1^2 + F^{(3)} a_1 b_2^2 \\ & + F^{(4)} a_2 b_1^2 + F^{(2)} a_2 b_2^2 \\ & + F^{(5)} a_1 b_1 b_2 + F^{(6)} a_2 b_1 b_2 \\ & = -\omega^2 \sigma_p \xi_0 \dots\dots\dots (25) \\ & -2\omega \dot{a}_1 + (1 - \omega^2) a_2 - 2\zeta_1 \omega a_1 \\ & - F^{(2)} a_1^3 + F^{(1)} a_1^2 a_2 - F^{(2)} a_1 a_2^2 + F^{(1)} a_2^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - F^{(2)} a_1 b_1^2 - F^{(4)} a_1 b_2^2 + F^{(3)} a_2 b_1^2 + F^{(1)} a_2 b_2^2 \\ & + F^{(6)} a_1 b_1 b_2 - F^{(5)} a_2 b_1 b_2 \\ & = 0 \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\omega \dot{b}_2 + (1 - \omega^2) b_1 + 2\zeta_1 \omega b_2 \\ & + F^{(1)} b_1^3 + F^{(2)} b_1^2 b_2 + F^{(1)} b_1 b_2^2 + F^{(2)} b_2^3 \\ & + F^{(1)} b_1 a_1^2 + F^{(3)} b_1 a_2^2 + F^{(4)} b_2 a_1^2 + F^{(2)} b_2 a_2^2 \\ & + F^{(5)} b_1 a_1 a_2 + F^{(6)} b_2 a_1 a_2 \\ & = 0 \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2\omega \dot{b}_1 + (1 - \omega^2) b_2 - 2\zeta_1 \omega b_1 \\ & - F^{(2)} b_1^3 + F^{(1)} b_1^2 b_2 - F^{(2)} b_1 b_2^2 + F^{(1)} b_2^3 \\ & - F^{(2)} b_1 a_1^2 - F^{(4)} b_1 a_2^2 + F^{(3)} b_2 a_1^2 + F^{(1)} b_2 a_2^2 \\ & + F^{(6)} b_1 a_1 a_2 - F^{(5)} b_2 a_1 a_2 \\ & = 0 \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

ここで、式中の係数 $F^{(i)}$ の詳細は付録に示す。

4・3 面内揺動 まず、面内揺動について考える。面内揺動とは、液面揺動の節直径の位置が変化しないで揺動する現象である。

4・3・1 周波数応答 振幅に関する方程式(25)~(28)で、円周方向一次モード C_1 の振幅を表す a_1, a_2 だけを考慮[式(25), (26)だけを考慮]して解き、その後、解の安定性の解析を行う。

まず、式(25)~(28)で、

$$\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = \dot{b}_1 = \dot{b}_2 = b_1 = b_2 = 0 \dots\dots\dots (29)$$

$$a_1 = r \cos \phi, a_2 = r \sin \phi \dots\dots\dots (30)$$

とおく。ここで、 r は円周方向一次モード C_1 の定常振幅、 ϕ は励振力 ξ と C_1 との位相差である。整理すると以下のような入力振幅 ξ_0 、入力振動数 ω 、定常振幅 r と位相差 ϕ の関係が得られる。

$$\{F^{(1)} r^3 + (1 - \omega^2) r\}^2 + \{F^{(2)} r^3 + 2\zeta_1 \omega r\}^2 = \omega^4 \sigma_p^2 \xi_0^2 \dots\dots\dots (31)$$

$$\cos \phi = \frac{-\{F^{(1)} r^3 + (1 - \omega^2) r\} \omega^2 \sigma_p \xi_0}{\{F^{(1)} r^3 + (1 - \omega^2) r\}^2 + \{F^{(2)} r^3 + 2\zeta_1 \omega r\}^2} \dots\dots\dots (32)$$

$$\sin \phi = \frac{-\{F^{(2)} r^3 + 2\zeta_1 \omega r\} \omega^2 \sigma_p \xi_0}{\{F^{(1)} r^3 + (1 - \omega^2) r\}^2 + \{F^{(2)} r^3 + 2\zeta_1 \omega r\}^2} \dots\dots\dots (33)$$

式(31), (32), (33)を解くことによって、周波数応答を求めることができる。

4・3・2 安定性解析 次に、求めた定常振幅 r と位相差 ϕ に対して、安定性の判別を行う。定常解に、微小なじょう乱を与えよう乱が減衰するときに安定、それ以外のときに不安定とする。まず、以下のような解を考える。

$$a_1 = a_1^{(0)} + \beta_1 e^{st} \dots\dots\dots (34)$$

$$a_2 = a_2^{(0)} + \beta_2 e^{st} \dots\dots\dots (35)$$

ここで、 $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}$ は求められた定常解、 β_1, β_2 は微小

じょう乱である。式(34), (35)を式(25), (26)に代入し, s を未定定数として, 微小じょう乱 β_1, β_2 に関する1階の連立方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} + 2\omega s \\ q_{21} - 2\omega s & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (36)$$

ここで,

$$q_{11} = (1 - \omega^2) + 3F^{(1)}a_1^{(0)2} + 2F^{(2)}a_1^{(0)}a_2^{(0)} + F^{(1)}a_2^{(0)2} \dots\dots\dots (37)$$

$$q_{12} = 2\zeta_1\omega + F^{(2)}a_1^{(0)2} + 2F^{(2)}a_1^{(0)}a_2^{(0)} + 3F^{(2)}a_2^{(0)2} \dots\dots\dots (38)$$

$$q_{21} = -2\zeta_1\omega - 3F^{(2)}a_1^{(0)2} + 2F^{(1)}a_1^{(0)}a_2^{(0)} - F^{(2)}a_2^{(0)2} \dots\dots\dots (39)$$

$$q_{22} = (1 - \omega^2) + F^{(1)}a_1^{(0)2} - 2F^{(2)}a_1^{(0)}a_2^{(0)} + 3F^{(1)}a_2^{(0)2} \dots\dots\dots (40)$$

微小じょう乱 β_1, β_2 は0でないので, 式(36)の係数行列の行列式は0でなければならない。行列式は, 未定定数 s に関する二次方程式となるので, s について解き, その実部の正負によって安定性を決定する。 s の実部が負となる条件は, 次式ようになる。

$$\zeta_1\omega + F^{(2)}r^2 > 0 \dots\dots\dots (41)$$

$$\{(1 - \omega^2) + F^{(1)}r^2\}\{(1 - \omega^2) + 3F^{(1)}r^2\} + \{2\zeta_1\omega + F^{(2)}r^2\}\{2\zeta_1\omega + F^{(2)}r^2\} > 0 \dots\dots (42)$$

上式の条件が満足されるとき, 解は安定である。

4.4 回転揺動 次に, 回転揺動について考える。回転揺動は, 節直径の位置が変化しながら揺動する面外揺動の中で, 節直径の位置が回転しながら液面が揺動し, 液面に進行波が生じる現象である。したがって, 回転揺動は面外揺動の特別な場合であると考えられる。そこで本研究では, ピッチング励振を受ける場合の面外揺動の定常解を求め, 次に, 安定性解析を行い, 安定な面外揺動の中から液面に進行波が生じる条件を考慮して, 回転揺動を求める。本研究では, 進行波が1回転する周期とピッチング励振の周期に近いものに着目し, それを回転揺動と呼ぶ。

4.4.1 周波数応答 まず, 面外揺動の定常解を考え, 円周方向一次モード C_1, D_1 の振幅を表す a_1, a_2, b_1, b_2 をすべて考慮し, 回転揺動を含んだ面外揺動を調べる。

まず, 式(25)~(28)で,

$$\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = \dot{b}_1 = \dot{b}_2 = 0 \dots\dots\dots (43)$$

$$a_1 = r_1 \cos \psi, \quad a_2 = r_1 \sin \psi \dots\dots\dots (44)$$

$$b_1 = r_2 \sin (\psi + \Delta\psi), \quad b_2 = -r_2 \cos (\psi + \Delta\psi) \dots\dots\dots (45)$$

とおく。ここで, r_1, r_2 はおのおの円周方向一次モード C_1, D_1 の定常振幅, ψ は励振力 ξ と C_1 モードと

の位相差, $\Delta\psi$ は C_1 モードに対する D_1 モードの位相差である。定常振幅を式(44), (45)のように仮定したので, 液面に進行波が生じる条件は, $\Delta\psi$ が 0° か 180° 付近になることである(本研究では, 進行波が1回転する周期とピッチング励振の周期に近いものに着目しており, それを回転揺動と呼んでいる)。式(43)~(45)を式(25)~(28)に代入し, 整理すると以下のような入力振幅 ξ_0 , 入力振動数 ω , 定常振幅 r_1, r_2 と位相差 $\psi, \Delta\psi$ の関係が得られる。

$$r_1^2 = \frac{1}{\tilde{A}} \{2\zeta_1\omega F^{(1)} - (1 - \omega^2) F^{(2)}\} \dots\dots\dots (46)$$

$$r_2^2 = \frac{1}{\tilde{B}} \{ -2\zeta_1\omega F^{(1)} + (1 - \omega^2) F^{(2)} + \{2\zeta_1\omega F^{(6)} - (1 - \omega^2) F^{(5)}\} \cos^2 \Delta\psi - \{2\zeta_1\omega F^{(5)} + (1 - \omega^2) F^{(6)}\} \cos \Delta\psi \sin \Delta\psi \} \dots\dots\dots (47)$$

$$\cos \psi = \frac{-\tilde{A}\omega^2\sigma_p\xi_0}{r_1(\tilde{A}^2 + \tilde{B}^2)}, \quad \sin \psi = \frac{-\tilde{B}\omega^2\sigma_p\xi_0}{r_1(\tilde{A}^2 + \tilde{B}^2)} \dots\dots\dots (48)$$

$$r_1^2(\tilde{A}^2 + \tilde{B}^2) = \omega^4\sigma_p^2\xi_0^2 \dots\dots\dots (49)$$

ここで,

$$\tilde{A} = (F^{(2)}F^{(3)} - F^{(1)}F^{(4)}) \cos^2 \Delta\psi + (F^{(1)}F^{(6)} + F^{(2)}F^{(5)}) \cos \Delta\psi \sin \Delta\psi \dots (50)$$

$$\tilde{A} = F^{(1)}r_1^2 + (1 - \omega^2) + r_2^2(F^{(1)} \sin^2 \Delta\psi + F^{(3)} \cos^2 \Delta\psi - F^{(5)} \cos \Delta\psi \sin \Delta\psi) \dots (51)$$

$$\tilde{B} = F^{(2)}r_1^2 + 2\zeta_1\omega + r_2^2(F^{(2)} \sin^2 \Delta\psi + F^{(4)} \cos^2 \Delta\psi + F^{(6)} \cos \Delta\psi \sin \Delta\psi) \dots (52)$$

である。式(46)~(49)を解くことによって, 周波数応答を求めることができる。

4.4.2 安定性解析 次に, 求めた定常振幅 r_1, r_2 と位相差 $\psi, \Delta\psi$ に対して, 安定性の判別を行う。定常解に, 微小なじょう乱を与え, じょう乱が減衰するときに安定, それ以外のときに不安定とする。まず, 以下のような解を考える。

$$a_1 = a_1^{(0)} + \beta_1 e^{st}, \quad a_2 = a_2^{(0)} + \beta_2 e^{st} \dots\dots\dots (53)$$

$$b_1 = b_1^{(0)} + \beta_3 e^{st}, \quad b_2 = b_2^{(0)} + \beta_4 e^{st} \dots\dots\dots (54)$$

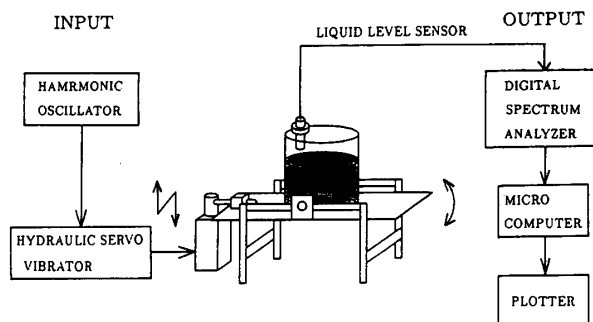


図2 実験装置概略図

ここで、 $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, $b_1^{(0)}$, $b_2^{(0)}$ は求められた定常解, β_1 , β_2 , β_3 , β_4 は微小じょう乱である。面内揺動の定常解の安定性を解析したときと同様に、式(53), (54)を式(25)~(28)に代入し、 s を未定定数として、微小じょう乱 β_1 , β_2 , β_3 , β_4 に関する 1 階の連立方程式を得る。微小じょう乱は 0 でないの、連立方程式の係数行列式が 0 となる条件から、未定定数 s に関する四次方程式が得られ、その方程式を s について解き、解の実部の正負によって安定性を決定する。

回転揺動が現れる場合に注目しているの、求められた安定な面外揺動の中で、円周方向一次の C_1 モードに対する D_1 モードの位相差 $\Delta\phi$ が、 0° か 180° 付近の場合のみを考える。

5. 実験

実験装置のブロック線図を図 2 に示す。低周波発信器で正弦波 $\xi(t) = \xi_0 \sin \omega t$ を発生させ、油圧加振器に入力し、揺動台の先端に鉛直方向励振を加えることによって円筒容器にピッチング励振を与えた。液面揺動が定常状態に達した後、超音波式変位計を用いて液

位を測定した。面内揺動と回転揺動の判定は、目視によって行った。模型円筒容器はアクリル製で内半径 140 mm である。

6. 結果および考察

図 3~5 に、容器半径で無次元化された液深 h が、 $h=0.3, 0.5, 1.0$ の場合のピッチング励振に対する周波数応答曲線をそれぞれ示す。縦軸は円筒容器側壁近傍 ($r=1.0, \theta=0.0^\circ$) の液位応答の定常振幅、横軸は、以下の式で定義される、ピッチングの励振周波数 ω の二乗と液面揺動の最低次モード (円周方向一次モード) 固有振動数 (3.3 節の無次元化により、 $\omega_1=1$) とのずれ ν である。

$$\omega^2 = 1 + \nu \quad \dots\dots\dots (55)$$

励振の角度振幅は、液深 $h=0.3, 0.5, 1.0$ に対して、おのおの $\xi_0=0.25^\circ, 0.225^\circ, 0.176^\circ$ である。実線、一点鎖線はそれぞれ安定面内揺動、不安定面内揺動、また、破線は回転揺動の計算結果であり、○は面内揺動、△はピッチングの周期に同期した回転揺動の実験結果である。なお、回転中心位置は、すべて $(x_c, z_c) = (0.0,$

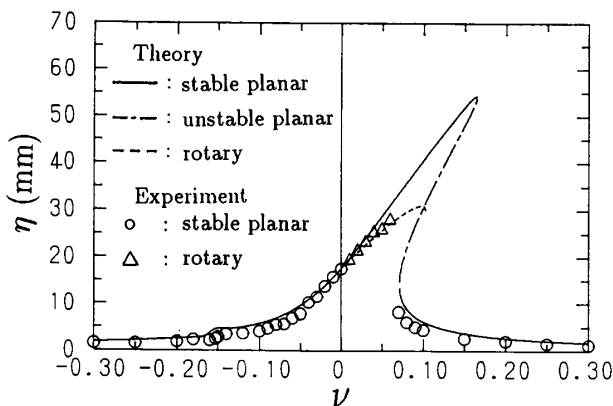


図 3 液位の周波数応答 [$h=0.3, \xi_0=0.25^\circ, (x_c, z_c)=(0.0, 0.0)$]

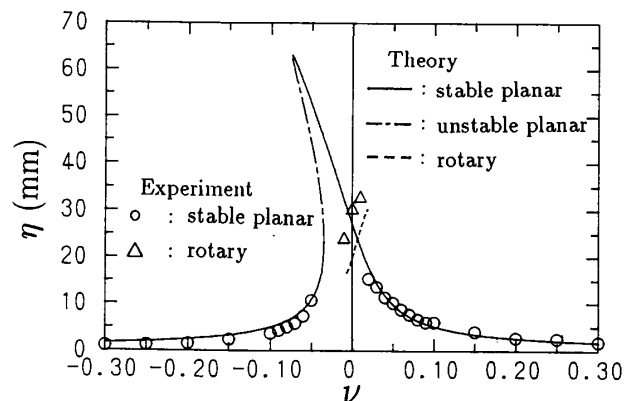


図 5 液位の周波数応答 [$h=1.0, \xi_0=0.176^\circ, (x_c, z_c)=(0.0, 0.0)$]

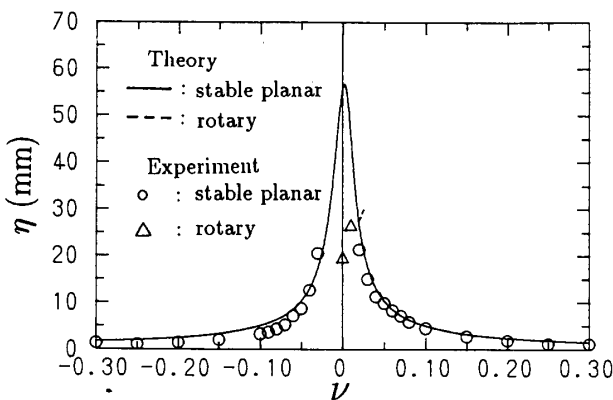


図 4 液位の周波数応答 [$h=0.5, \xi_0=0.225^\circ, (x_c, z_c)=(0.0, 0.0)$]

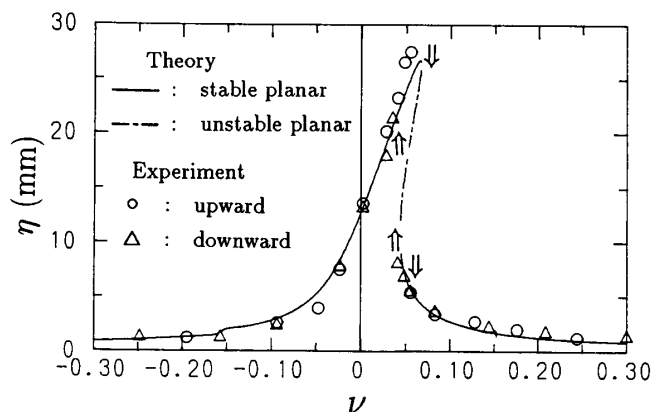


図 6 液位の周波数応答 [$h=0.3, \xi_0=0.125^\circ, (x_c, z_c)=(0.0, 0.0)$]

0.0) である。

各液深において、理論計算結果と実験結果はよく一致している。面内揺動は、低液深の場合 ($h=0.3$) には剛性ばね特性を示し、高液深の場合 ($h=1.0$) には軟性ばね特性を示す。液深 $h=0.5$ 付近に、剛性ばね特性と軟性ばね特性の境界があり、この液深では、不安定面内揺動は現れていない。また、回転揺動は、いずれの液深の場合においても共振点のごく近傍で現れることがわかる(理論計算では、液深 $h=0.5$ のときには回転揺動は $\nu=0.02$ 付近の非常に狭い領域でしか現れていない)。

低液深 $h=0.3$ の場合(図 3), $\nu=-0.15$ 付近で、安定面内揺動がわずかに大きくなっているのは、円周方向一次モードと非線形に連成している円周方向零次モードが共振すること⁽¹⁷⁾ によって、液面揺動の振幅が大きくなるためである。

図 6 に、液深が $h=0.3$ の場合のジャンプ現象を示す。励振の角度振幅は、 $\xi_0=0.125^\circ$ であり、回転揺動が発生しないように図 3 の場合より小さくした。実線、一点鎖線はそれぞれ安定面内揺動、不安定面内揺動の計算結果であり、○は励振周波数を増加させたときの面内揺動の実験結果、△は励振周波数を減少させたときの結果である。理論計算結果と実験結果はよく一致している。周波数を増加させた場合は $\nu=0.055$, 減少させた場合は $\nu=0.041$ でジャンプが発生している。

7. 結 言

剛体円筒容器がピッチング励振を受ける場合について着目し、液面揺動の非線形性を考慮して、最低次固有振数近傍で面内揺動および回転揺動が発生する場合について各揺動の周波数応答を求め、安定性解析を行った。さらに、モデルタンクを用いて揺動実験を行い、数値計算結果と比較・検討を行い以下の結論を得た。

(1) 計算結果と実験結果はよく一致することを示し、本解析法の有効性を明らかにした。

(2) 安定面内揺動や回転揺動が存在する励振振幅と励振周波数の関係を明らかにした。

(3) 水平励振を受ける場合と同様に、ピッチング励振を受ける場合においても、低液深の場合には硬性ばね特性、高液深の場合には軟性ばね特性であることを示した。さらに、非線形振動現象の特徴であるジャンプ現象を確認した。

付 録

式(25)～(28)中の係数 $F^{(i)}$ は以下のとおりである。

$$\begin{aligned}
 F^{(1)} &= \frac{3}{4}P^{(1)} + \frac{1}{4}P^{(2)}\omega^2 \\
 &+ \frac{1}{2\omega_0^2}P_0^{(11)}(P_0^{(21)} + \omega^2 P_0^{(22)}) \\
 &+ \left(\frac{1}{4}P_0^{(11)} + \frac{1}{2}P_0^{(12)}\omega^2\right)(P_0^{(21)} - \omega^2 P_0^{(22)})\Delta_{01} \\
 &+ \frac{1}{2\omega_2^2}P_2^{(11)}(P_2^{(21)} + \omega^2 P_2^{(22)}) \\
 &+ \left(\frac{1}{4}P_2^{(11)} + \frac{1}{2}P_2^{(12)}\omega^2\right)(P_2^{(21)} - \omega^2 P_2^{(22)})\Delta_{21} \\
 F^{(2)} &= -\left(\frac{1}{4}P_0^{(11)} + \frac{1}{2}P_0^{(12)}\omega^2\right)(P_0^{(21)} - \omega^2 P_0^{(22)})\Delta_{02} \\
 &- \left(\frac{1}{4}P_2^{(11)} + \frac{1}{2}P_2^{(12)}\omega^2\right)(P_2^{(21)} - \omega^2 P_2^{(22)})\Delta_{22} \\
 F^{(3)} &= \frac{1}{4}P^{(1)} - \frac{1}{4}P^{(2)}\omega^2 + P^{(4)}\omega^2 \\
 &+ \frac{1}{2\omega_0^2}P_0^{(11)}(P_0^{(21)} + \omega^2 P_0^{(22)}) \\
 &- \left(\frac{1}{4}P_0^{(11)} + \frac{1}{2}P_0^{(12)}\omega^2\right)(P_0^{(21)} - \omega^2 P_0^{(22)})\Delta_{01} \\
 &- \frac{1}{2\omega_2^2}P_2^{(11)}(P_2^{(21)} + \omega^2 P_2^{(22)}) \\
 &+ \left(\frac{3}{4}P_2^{(11)} + \frac{3}{2}P_2^{(12)}\omega^2\right)(P_2^{(21)} - \omega^2 P_2^{(22)})\Delta_{21} \\
 F^{(4)} &= \left(\frac{1}{4}P_0^{(11)} + \frac{1}{2}P_0^{(12)}\omega^2\right)(P_0^{(21)} - \omega^2 P_0^{(22)})\Delta_{02} \\
 &- \left(\frac{3}{4}P_2^{(11)} + \frac{3}{2}P_2^{(12)}\omega^2\right)(P_2^{(21)} - \omega^2 P_2^{(22)})\Delta_{22} \\
 F^{(5)} &= F^{(2)} - F^{(4)} \\
 F^{(6)} &= F^{(1)} - F^{(3)}
 \end{aligned}$$

文 献

- (1) Faltinsen, O. M., *J. Ship Res.*, **18**-4(1974), 224.
- (2) Hamlin, N. A., Lou, Y. K., Maclean, W. M., Seibold, F. and Chandras, L. M., *SNAME Trans.*, **94**(1986), 159.
- (3) 井関・新開, 日本造船学会論文集, **163**(1988), 294.
- (4) Abramson, H. N., *NASA*, SP-106(1966).
- (5) 田中・中山, 機論, **57**-538, B(1991), 1934.
- (6) Funakoshi, M. and Intue, S., *Fluid Dyna. Res.*, **5**(1990), 255.
- (7) 内海・木村・坂田, 機論, **52**-473, C(1986), 279.
- (8) 中山・鷺津, 日本航空宇宙学会誌, **27**-310(1979), 576.
- (9) 井関・新開・中武, 日本造船学会論文集, **166**(1989), 255.
- (10) Berlot, R. R., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **26**(1959), 513.
- (11) Hutton, R. E., *NASA*, TND-1870(1963).
- (12) Abramson, H. N., Chu, W. H. and Kana, D. D., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **33**(1966), 777.
- (13) Miles, J. W., *J. Fluid Mech.*, **149**(1984), 1.
- (14) 木村・大橋, 機論, **46**-401, C(1980), 42.
- (15) Kana, D. D., *J. Spacecraft and Rockets*, **24**-2(1987), 169.
- (16) Kana, D. D., *J. Spacecraft and Rockets*, **26**-3(1989), 188.
- (17) 木村・高原・伊東・坂田, 機論, **58**-556, C(1992), 3564.
- (18) 高原・木村・伊東・坂田, 機論, **59**-561, C(1993), 1378.
- (19) 木村・高原・坂田, 機論, **59**-565, C(1993), 2606.
- (20) 坂田・木村・内海, 機論, **49**-442, C(1983), 963.