

鉛直地震動を受ける多重円筒タンクの応答解析*

吉田 聖一^{*1}, 三好 俊郎^{*2}

Seismic Response Analysis of a Multi-Walled Coaxial Cylindrical Tank under Vertical Excitation

Shoichi YOSHIDA and Toshiro MIYOSHI

The seismic response under vertical excitation of the large-sized, multi-walled coaxial cylindrical tank filled with liquid is investigated theoretically. In this paper, the bulging motion which occurs in the relatively high frequency region due to the flexibility of the shell is analyzed by means of the finite element method. The natural frequency, the time history of the displacement response of the shell and the dynamic pressure response of the liquid are derived by the modal analysis approach.

Key Words: Vibration Coupled with Fluid Motion, Modal Analysis, Finite Element Method, Multi-Walled Coaxial Cylindrical Tank, Seismic Response, Vertical Excitation, Bulging

1. 緒 言

石油類を貯蔵する平底円筒タンクの内部を、いくつかの同心円壁で分割する多重円筒タンクは、1基のタンクで多油種を貯蔵できることから、最近の石油製品の多様化と関連し注目されている。この多重円筒タンクの設計の際に、重要な問題の一つとして、その耐震特性の把握がある。

貯蔵タンクの耐震設計は、水平地震動と鉛直地震動に対して通常行われる。著者ら⁽¹⁾は、水平地震動を受ける多重円筒タンクの、有限要素法(FEM)によるタンク本体と内容液との連成を考慮した応答解析を報告した。一方、鉛直加振を受ける場合、通常の円筒タンクでは多くの研究^{(2)~(6)}があるのに対し、二重円筒では、FEMと実験による千葉らの研究⁽⁷⁾、固有値解析を行った谷らの研究⁽⁸⁾およびBrownの解説⁽⁹⁾が見られるだけで、三重以上の多重円筒に関する報告は見られない。

タンクの連成振動には、二つの形態があることが知

られている。すなわち、比較的長周期領域において励起される自由液面の揺動(スロッシング)と比較的短周期領域において励起される側板主体の振動(バルジング)である。そして、スロッシングとバルジングの連成効果は極めて弱いことが知られている⁽²⁾。

本論文では、鉛直地震動を受ける剛基礎上の大形多重円筒タンクのバルジングを対象に、軸対称問題として、タンク本体および内容液をFEMで扱った応答解析法を述べ、解析例を示す。

2. 基 礎 式

2・1 解析モデルと有限要素 n 分割された多重円筒タンクの解析モデルを図1に示す。液体領域 V_i における境界を $S_{i1} \sim S_{in}$ 、液高を H_i とし、側板領域 T_i における半径を r_i とする。液体の運動は非圧縮性完全流体の渦なし流れを、またタンク本体は線形弾性体をそれぞれ仮定する。剛基礎上の円筒タンクが鉛直地震動を受けるとき、励起される振動モードは軸対称形のみである⁽⁴⁾。

液体は図2に示す4節点の軸対称長方形要素でモデル化する。要素内の動液圧 p は、節点での値を用いて次式で定義される。

$$p = [N_i] \{p\} \dots \dots \dots (1)$$

* 平成元年4月3日 第66期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和63年8月1日。

^{*1} 正員、甲陽建設工業(株) (〒141 東京都品川区西五反田1-27-2)。

^{*2} 正員、東京大学工学部 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)。

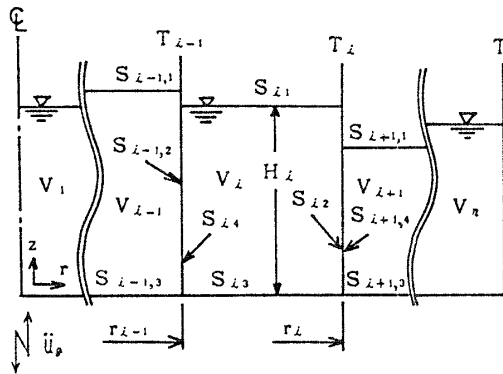


図 1 解析モデル

ここで、 $[N_i]$ は液体要素の形状マトリックス、 $\{p\}$ は要素内節点の動液圧ベクトルである。

タンク本体は図 3 に示す軸対称シェル要素でモデル化する。これは、Kirchhoff-Love の仮定を用い、子午線方向変位 u 一次、法線方向変位 w 三次の形状関数を持ち、要素内変位は次式で定義される。

$$\{\delta\} = [N_s]\{u\} \quad (2)$$

$[N_s]$ は軸対称シェル要素の形状マトリックス、 $\{u\}$ は要素内節点の変位ベクトルである。また、この場合、全体座標 z 軸と要素座標 s 軸とは方向が一致する。

2.2 液体の運動方程式 図 1 の領域 V_i における液体の動液圧 $p_{(i)}$ と速度ポテンシャル $\phi_{(i)}$ との関係は、線形化された Bernoulli の式より、次式で示される。

$$p_{(i)} = -\rho_{l(i)} \frac{\partial \phi_{(i)}}{\partial t} \quad (3)$$

ただし、下付き括弧内は液体領域を表し、 ρ_l は液体の密度、 t は時間である。液体の運動は、動液圧 $p_{(i)}$ を用いて、次に示す基礎方程式で与えられる。

$$\nabla^2 p_{(i)} = \frac{\partial^2 p_{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 p_{(i)}}{\partial z^2} = 0 \quad (V_i \text{ 内で}) \quad (4)$$

$$\frac{\partial p_{(i)}}{\partial z} + \frac{1}{g^*} \frac{\partial^2 p_{(i)}}{\partial t^2} = 0 \quad (S_{i1} \text{ 上で}) \quad (5)$$

$$\frac{\partial p_{(i)}}{\partial r} = -\rho_{l(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2} \quad (S_{i2} \text{ 上で}) \quad (6)$$

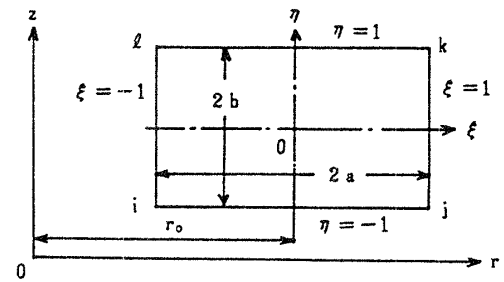


図 2 液体要素

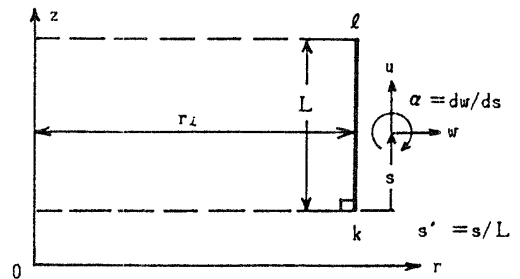


図 3 軸対称シェル要素

$$\frac{\partial p_{(i)}}{\partial r} = -\rho_{l(i)} \frac{\partial^2 w^{(i-1)}}{\partial t^2} \quad (S_{i4} \text{ 上で}) \quad (7)$$

$$\frac{\partial p_{(i)}}{\partial z} = -\rho_{l(i)} \ddot{u}_g \quad (S_{i3} \text{ 上で}) \quad (8)$$

ただし、上付き括弧内は、側板領域を表し、 $g^* = g + \ddot{u}_g$ であり g は重力加速度、 $\ddot{u}_g$ は地震動の加速度である。

$g \gg \ddot{u}_g$ を仮定すると、式(4)～(8)を満たすはん関数は次式で与えられる⁽⁴⁾。

$$I_{(i)} = \int_{t_1}^{t_2} (T_{(i)} + U_{(i)} - W_{(i)}) dt \quad (9)$$

ここで、 T 、 U 、 W はそれぞれ液体の運動エネルギー、ポテンシャルエネルギー、および液体の受ける外部仕事であり、次式で表される。

$$T_{(i)} = \frac{1}{2} \int_{V_i} \left\{ \left(\frac{\partial p_{(i)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial p_{(i)}}{\partial z} \right)^2 \right\} \cdot dV \quad (10)$$

$$U_{(i)} = -\frac{1}{2g} \int_{s_{i1}} \left(\frac{\partial p_{(i)}}{\partial t} \right)^2 \cdot r \cdot d\theta dr \quad (11)$$

$$W_{(i)} = -\rho_{l(i)} \int_{s_{i2}} p_{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2} \cdot r \cdot d\theta dz + \rho_{l(i)} \int_{s_{i4}} p_{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i-1)}}{\partial t^2} \cdot r \cdot d\theta dz + \rho_{l(i)} \int_{s_{i3}} p_{(i)} \cdot \ddot{u}_g \cdot r \cdot d\theta dr \quad (12)$$

式(1)、(2)を式(10)～(12)に代入し、はん関数 $I_{(i)}$ の停留条件より、液体の運動方程式として次式を得る。

$$[M_{l(i)}]\{\ddot{p}_{(i)}\} + [K_{l(i)}]\{p_{(i)}\} + [S_{l(i)}]\{\ddot{u}^{(i)}\} + [S_{l(i)}^{(i-1)}]\{\ddot{u}^{(i-1)}\} = -\{f_{l(i)}\} \cdot \ddot{u}_g \quad (13)$$

ここで、 $[M_l]$ 、 $[K_l]$ 、 $[S]$ 、 $\{f_l\}$ はそれぞれ液体の質量マトリックス、剛性マトリックス、連成マトリックスおよび底面での励振を表すベクトルであり、次式で表される。

$$[M_l] = \frac{a}{g} \int_{-1}^1 [N_l(\eta=1)]^T \cdot [N_l(\eta=1)] \cdot (r_0 + a\xi) \cdot d\xi \quad (14)$$

$$[K_l] = a \cdot b \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{a^2} \left[\frac{\partial N_l}{\partial \xi} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial N_l}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{b^2} \left[\frac{\partial N_l}{\partial \eta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial N_l}{\partial \eta} \right] \right\} \cdot (r_0 + a\xi) \cdot d\xi d\eta \quad (15)$$

$$[S_{li}^{(i)}] = 2\rho_{li(i)} \cdot b \cdot r_{i-1} \int_0^1 [N_l(\xi=1)]^T [N_s(w^{(i)})] \cdot ds' \quad (16)$$

$$[S_{li}^{(i-1)}] = -2\rho_{li(i)} \cdot b \cdot r_{i-1} \int_0^1 [N_l(\xi=-1)]^T [N_s(w^{(i-1)})] \cdot ds' \quad (17)$$

$$\{f_{li}\} = -\rho_{li(i)} \cdot a \int_{-1}^1 [N_l(\eta=-1)]^T \cdot (r_0 + a\xi) \cdot d\xi \quad (18)$$

式(16), (17)の $[N_l(\xi=\pm 1)]$ は液体要素の形状マトリックス $[N_l]$ に $\xi=\pm 1$ を代入し, η をシェル要素の座標 s' に変換したマトリックス, $[N_s(w^{(i)})]$ は, シェル要素の形状マトリックス $[N_s]$ より, 法線方向変位 w に関する行のみを抜き出したマトリックスである。

式(13)を系全体の方程式へ書き換えると, 次式を得る。

$$[\bar{M}_l]\{\ddot{p}\} + [\bar{K}_l]\{\bar{p}\} + [\bar{S}_l]\{\ddot{u}\} = -\{\bar{f}_l\} \cdot \ddot{u}_g \quad (19)$$

ただし, $[\bar{M}_l]$, $[\bar{K}_l]$ はそれぞれ $[M_{li(i)}]$, $[K_{li(i)}]$ を領域 V_1 から V_n まで対角に並べたマトリックス, $\{\bar{p}\}$, $\{\bar{u}\}$, $\{\bar{f}_l\}$ はそれぞれ各領域におけるベクトルを V_1 から V_n の順に並べたベクトルである。また $[\bar{S}_l]$ は次式となる。

$$[\bar{S}_l] = \begin{bmatrix} [S_{l1}^{(1)}] & & & 0 \\ [S_{l1}^{(2)}] & [S_{l2}^{(2)}] & & \\ & [S_{l2}^{(3)}] & [S_{l3}^{(3)}] & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & [S_{ln}^{(n-1)}] & [S_{ln}^{(n)}] \end{bmatrix} \quad (20)$$

2・3 液体-タンク連成系運動方程式 タンク本体の運動方程式は, 領域 T_i の側板について次式となる。

$$[M_s^{(i)}]\{\ddot{u}^{(i)}\} + \{e^{(i)}\} \cdot \ddot{u}_g + [K_s^{(i)}]\{u^{(i)}\} = \{f^{(i)}\} \quad (21)$$

ここで, $[M_s]$ は質量マトリックス, $[K_s]$ は剛性マトリックスである⁽¹⁰⁾。また, $\{e\}$, $\{f^{(i)}\}$ はそれぞれ鉛直動の励振ベクトル, 等価節点荷重ベクトルであり, 次式で表される。

$$\{e\} = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T \quad (22)$$

$$\{f^{(i)}\} = \frac{1}{\rho_{li(i)}} [S_{li}^{(i)}]^T \{p_{li(i)}\} + \frac{1}{\rho_{li(i+1)}} [S_{li(i+1)}^{(i)}]^T \{p_{li(i+1)}\} \quad (23)$$

なお, 式(22)の $\{e\}$ は, 節点変位の並びの順 $[u \ w \ a]^T$ に対応する。

式(23)を用いて, 式(21)を系全体の方程式へ書き換えると, 次式を得る。

$$[\bar{M}_s]\{\ddot{u}\} + [\bar{K}_s]\{\bar{u}\} + [\bar{S}_s]\{\bar{p}\} = -[\bar{M}_s]\{\bar{e}\} \cdot \ddot{u}_g \quad (24)$$

ただし, $[\bar{M}_s]$, $[\bar{K}_s]$ は $[\bar{M}_l]$ などの場合と, $\{\bar{e}\}$ は $\{\bar{u}\}$ などの場合と同様である。また, $[\bar{S}_s]$ は次のようになる。

$$[\bar{S}_s] = - \begin{bmatrix} [S_{l1}^{(1)}]^T/\rho_{li(1)} & [S_{l1}^{(2)}]^T/\rho_{li(2)} & & 0 \\ & [S_{l2}^{(2)}]^T/\rho_{li(2)} & [S_{l2}^{(3)}]^T/\rho_{li(3)} & \\ & & \ddots & \\ & & & [S_{ln}^{(n-1)}]^T/\rho_{li(n-1)} & [S_{ln}^{(n)}]^T/\rho_{li(n)} \\ 0 & & & & [S_{ln}^{(n)}]^T/\rho_{li(n)} \end{bmatrix} \quad (25)$$

液体の質量マトリックス $[\bar{M}_l]$ は, 自由液面のポテンシャルエネルギーに関連して導かれる量であり, スロッシングにおいては重要となるが, バルジングにはそれほど影響を及ぼさない⁽⁴⁾ため, 式(19)において, $[\bar{M}_l]=0$ と仮定すると, 動液圧 $\{\bar{p}\}$ は次のように表せる。

$$\{\bar{p}\} = -[\bar{K}_l]^{-1}([\bar{S}_l]\{\ddot{u}\} + \{\bar{f}_l\} \cdot \ddot{u}_g) \quad (26)$$

式(26)を式(24)に代入すると, 液体-タンク連成系運動方程式として次式を得る。

$$[\bar{M}_a]\{\ddot{u}\} + [\bar{K}_s]\{\bar{u}\} = -\{\bar{f}_a\} \cdot \ddot{u}_g \quad (27)$$

ただし, $[\bar{M}_a]$, $\{\bar{f}_a\}$ は次式となる。

$$[\bar{M}_a] = [\bar{M}_s] - [\bar{S}_s][\bar{K}_l]^{-1}[\bar{S}_l] \quad (28)$$

$$\{\bar{f}_a\} = [\bar{M}_s]\{\bar{e}\} - [\bar{S}_s][\bar{K}_l]^{-1}\{\bar{f}_l\} \quad (29)$$

2・4 地震応答解析 モード解析法を適用して, 地震波を入力した時刻歴応答解析を行う。式(27)右辺 $=0$ とおくと, 固有円振動数 ω_c , 固有ベクトル $\{\psi_c\}$ が得られる。変位 $\{\bar{u}\}$ は, 基準座標 q_c を用いて次式で表せるものとする。

$$\{\bar{u}\} = \sum_{c=1}^m \{\psi_c\} q_c = [\psi]\{q\} \quad (30)$$

式(30)を式(27)に代入し, 左側より $[\psi]^T$ を両辺に乘ずれば, 固有ベクトルの直交性より, 互いに独立な m 個の運動方程式が得られる。この各式に, 振動モード間の連成を無視して減衰項を加えれば, 次式を得

る。

$$\ddot{q}_c + 2\zeta_c \omega_c \dot{q}_c + \omega_c^2 q_c = -\beta_c \ddot{u}_g \dots\dots\dots (31)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \beta_c &= \bar{m}_c / m_c \\ \bar{m}_c &= \{\psi_c\}^T \{\bar{f}_a\} \\ m_c &= \{\psi_c\}^T [\bar{M}_a] \{\psi_c\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

であり、 ζ_c は c 次の減衰比、 β_c は c 次の刺激係数である。

式(30)、(31)より、加速度応答 $\{\ddot{u}\}$ が求まり、これを式(26)に代入することにより、動液圧が得られる。

3. プログラム検証

2章の理論に基づき開発したコンピュータプログラムの検証のため、図4に示すアニュラス部に液体の入っている二重円筒タンクの固有値解析をFEMで行った千葉ら⁽⁷⁾と同一例題を解析する。

表1 タンク諸元

	Inner	Middle	Outer
Diameter (mm)	20000	40000	60000
Height (mm)	20000	20000	20000
Liquid height (mm)	17500	17500	17500
Shell plate thickness from bottom (mm)	18, 13, 12, 10, 9.8, 7, 7	27, 20, 17, 15, 12, 11, 10, 10	22, 16, 14, 12, 10, 9, 8, 8
Shell plate width (mm)	@2500×8	@2500×8	@2500×8
Young's modulus (GPa)	206	206	206
Poisson's ratio	0.3	0.3	0.3
Shell density (kg/m ³)	7850	7850	7850
Liquid density (kg/m ³)	1000	1000	1000
Mesh division	Axial 16 Radial 3	16 3	16 3

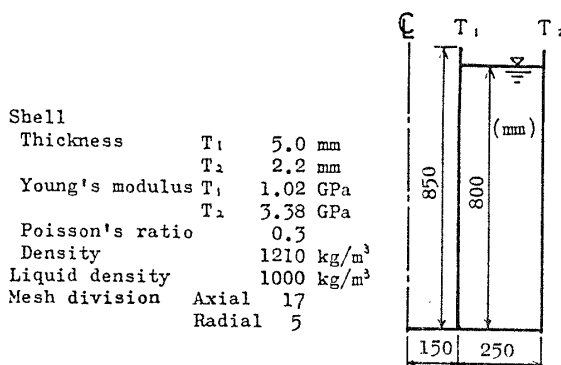


図4 検証例題

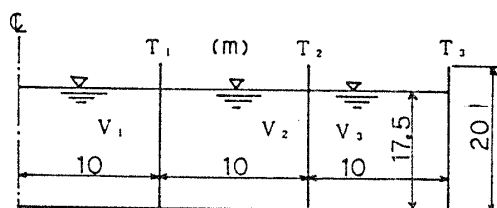


図5 三重円筒タンク

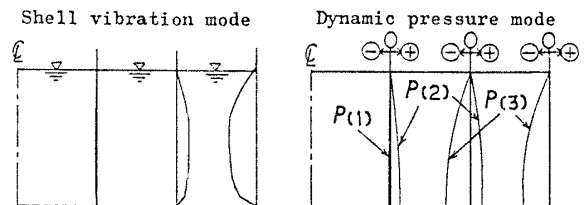
解析の結果、一次固有振動数は千葉らの27.5Hzに対し、本解析では27.2Hzとなり、良い一致を示した。

4. 解析例

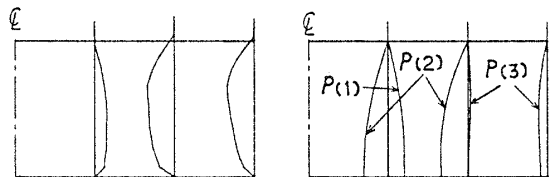
4.1 三重円筒タンク 前報⁽¹⁾と同じ三重円筒タンクを例に、鉛直地震動に対する液体-タンク連成応答解析を行う。タンクの寸法、材料定数等を図5および表1に示す。

4.2 固有値解析結果 図5に示す三重円筒タンクの液体領域 $V_1 \sim V_3$ が、すべて満液の場合(ケース1)と V_1 のみ空の場合(ケース2)の固有値解析結果を図6、7に示す。図6、7における刺激係数 β_c は、固有ベクトルの回転変位以外の成分の最大値を1として正規化したときの値である。

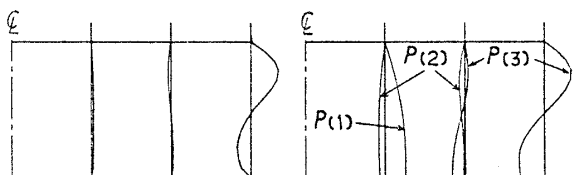
図6、7より、ケース1、2とも一次モードは中側板 T_2 と外側板 T_3 の振動が卓越し、内側板 T_1 は、わずかではあるが、ケース1で内側、ケース2では外側へ軸方向一次モードで変位しており、 T_1 と T_2 、 T_2 と T_3 がともに逆相モードとなる。また、二次モードでは、両ケースとも T_1 と T_2 が逆相モード、 T_2 と T_3 が同



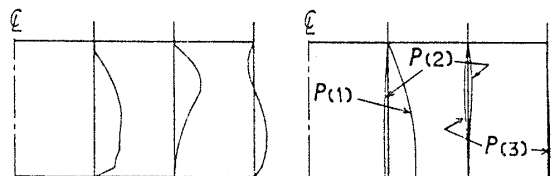
(a) 1st, 2.002Hz, $\beta_1=0.407$



(b) 2nd, 3.133Hz, $\beta_2=0.398$



(c) 3rd, 4.257Hz, $\beta_3=0.630$



(d) 4th, 4.574Hz, $\beta_4=0.291$

図6 ケース1の振動モード

相モードとなる。 T_1 の振動が軸方向一次モードで卓越するのは、ケース1では四次、ケース2では十次(9.640Hz)であり、それより低次の T_1 の振動モードはすべて軸方向一次モードである。また、両ケースとも、 $T_1 \sim T_3$ がすべて同相かつ軸方向一次モードは存在しない。

円周方向波数=1の水平地震動に対する前報⁽¹⁾の固有値解析結果と比較すると、両ケースとも一次モードで2%、二次モードでは8%程度、円周方向波数=0の本解析の固有振動数が高くなる。また T_1, T_2 が存在せず、 T_3 のみの通常の円筒タンクとして解析すると、一次固有振動数は2.473Hzであり、三重円筒の場合より、固有振動数は高くなる。

4・3 応答解析結果 図8に示す、昭和58年の日本海中部地震・秋田港波UD成分(最大加速度40.9 cm/s²)⁽¹¹⁾を入力し、減衰比 $\zeta_c=0.05$ として、ケース1の場合について時刻歴応答解析を行う。

地震時の大形石油タンクでは、タンク本体の慣性力より内容液の慣性力のほうが大きくなるため、応力解析を行ううえで動液圧が重要となる。側板 T_i に作用

する動液圧による円周方向力 F_i を次式で定義する。

$$F_i = r_i \left\{ \int_0^{H_i} p_{(i)}(r_i, z) dz - \int_0^{H_{i+1}} p_{(i+1)}(r_i, z) dz \right\} \quad \dots\dots\dots (33)$$

図9に時刻13.67s, 13.96s, 14.16sの動液圧分布を示す。時刻13.67sは T_3 、13.96sは T_2 、14.16sは T_1 の F_i 値が正值(引張り)で最大を示す時刻である。 F_i の絶対値が最大を示す時刻は、 T_1, T_3 では正值での最大を示す時刻と同じであるが、 T_2 では14.15sとなる。この時刻の動液圧分布は図9に示した時刻14.16sと

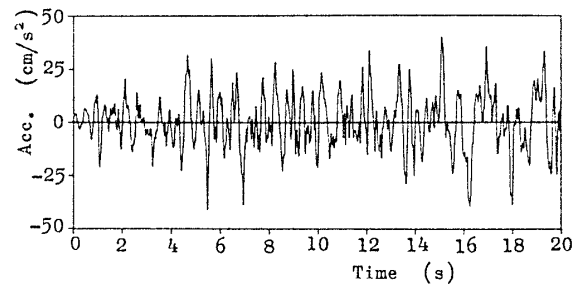


図8 地震波入力波形(秋田港UD)

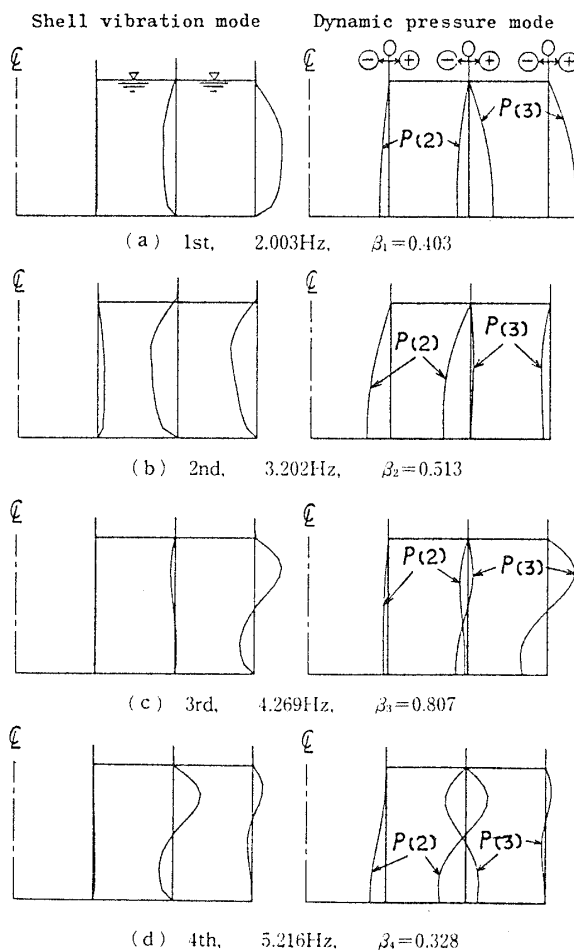


図7 ケース2の振動モード

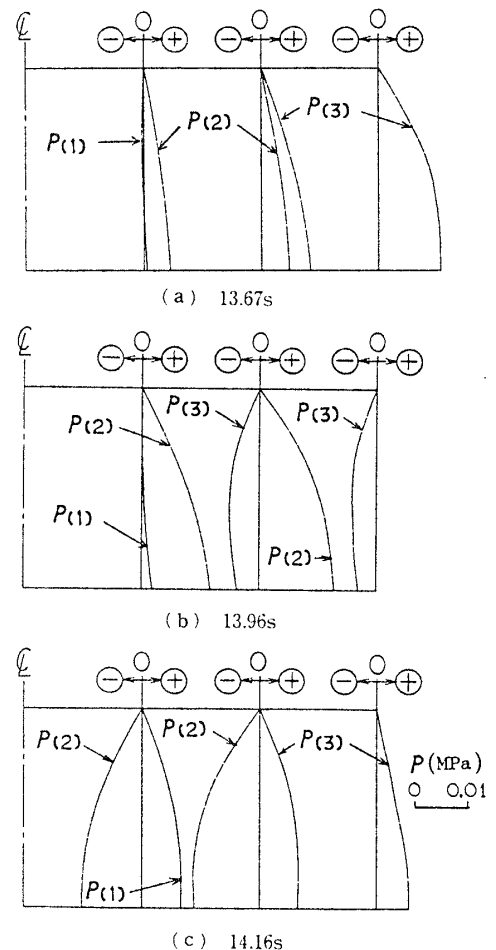


図9 ケース1の動液圧分布

ほぼ同一となる。また図9より、 T_3 に作用する動液圧に比べ、 T_1 、 T_2 に作用する動液圧が大きいことがわかる。

5. 結 言

鉛直地震動を受ける大形多重円筒タンクの耐震設計のため、通常円筒タンクで行われている有限要素法定式化を多重円筒へ拡張したコンピュータプログラムを開発し、解析例を示した。本プログラムにより、任意形状の多重円筒タンクの固有振動数、振動モード、地震応答を求めることが可能である。

文 献

- (1) 吉田・三好, 機論, 53-492, C (1987), 1670.
- (2) 近藤, 機論, 46-405, C (1980), 509.
- (3) 坂井・ほか2名, 第16回地震工学研究発表会講演概要集, (1981), 253.
- (4) 清水・ほか2名, 機論, 48-426, C (1982), 215.
- (5) 清水・ほか2名, 機論, 49-440, C (1983), 563.
- (6) 千葉・谷, 機論, 51-471, C (1985), 2980.
- (7) Chiba, T., ほか1名, ASME, PVP, 98-7 (1985), 25.
- (8) 谷・拝司, 機論, 52-484, C (1986), 3137.
- (9) Brown, S. J., Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol., 104-1 (1982), 2.
- (10) Zienkiewicz, O. C. (吉識・山田監訳), マトリックス有限要素法, (1984), 348, 培風館.
- (11) 倉田・ほか2名, 運輸省港湾技術研究所資料, 458 (1983), 1.