

多重円筒タンクの地震応答解析*

吉 田 聖 一^{*1}, 三 好 俊 郎^{*2}

Seismic Response Analysis of a Multi-Walled Coaxial Cylindrical Tank

Shoichi YOSHIDA and Toshiro MIYOSHI

The large-sized, multi-walled coaxial cylindrical tank has been studied in recent years because various kinds of oil can be stored in one tank. It is important to design such tanks considering seismic response. This paper describes theoretical studies of the coupled vibration of the contained liquid and the shell plate of the cylindrical tank in response to lateral earthquake excitation, by the finite element method. In this paper, the bulging motion which occurs in the relatively high frequency region due to the flexibility of the shell is analyzed. The natural frequency the time history of the displacement response of the shell and the dynamic pressure response of the liquid of the actual tank are derived by the modal analysis approach.

Key Words: Multi-Walled Coaxial Cylindrical Tank, Seismic Response, Vibration, Finite Element Method, Bulging, Modal Analysis

1. 緒 言

石油類を貯蔵する平底円筒タンクの内部を、いくつかの同心円壁で分割する多重円筒タンクは、1基のタンクで多油種を貯蔵できることから、最近の石油製品の多様化と関連し、注目されている。この多重円筒タンクの設計の際に、重要な問題の一つとして、その耐震特性の把握がある。

石油タンクでは、近年の大容量化、軽量化から、相対的にタンク本体の剛性が低下し、内容液とタンク本体との連成を考慮した振動解析が必要となっている。通常の円筒タンクの連成振動解析に関しては、多くの研究がある^{(1)~(10)}。一方、二重円筒に関するものとしては、はりとして解析的に扱った笠井の研究⁽¹¹⁾、アニュラス部の液体を解析的に、殻を有限要素法 (FEM) で扱った藤田の研究⁽¹²⁾、および、液体、殻とも FEM で扱った千葉らの研究⁽¹³⁾がある。三重以上の多重円筒に関しては、笠井⁽¹¹⁾が解析方法を示しているが、解析例を示した報告は見られない。また、これらの文献は、原

子力プラントあるいは化学プラント用の高さ/直径の値の大きな構造物を対象としており、高さ/直径が 0.3~1.0 程度の石油タンクを扱った報告も見られない。

タンクの連成振動には、二つの形態があることが知られている。すなわち比較的長周期領域において励起される自由液面の揺動 (スロッシング) と比較的短周期領域で励起される側板主体の振動 (バルジング) である。そして、スロッシングとバルジングとの連成効果は極めて弱いことが知られている⁽⁴⁾⁽⁶⁾。

本論文では、大形多重円筒タンクのバルジングを対象として、内容液を軸対称長方形要素、タンクを軸対称シェル要素で扱った FEM による、液体-タンク連成系の水平地震応答解析法を述べ、解析例を示す。

2. 基 礎 式

2.1 解析モデルと有限要素 n 分割された多重円筒タンクの解析モデルを図 1 に示す。液体領域 V_i における境界を $S_{i1} \sim S_{i4}$ 、液高を H_i とし、側板領域 T_i における半径 r_i とする。タンクは剛基礎上に固定され、円筒座標系における $\theta=0$ の方向から、水平加速度 $\ddot{u}_g$ で加振される。

液体の運動は非圧縮性完全流体の渦なし流れを仮定

* 昭和 62 年 4 月 2 日 第 64 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 61 年 10 月 20 日。

^{*1} 正員、甲陽建設工業 (株) (〒141 東京都品川区西五反田 1-27-2)。

^{*2} 正員、東京大学工学部 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)。

し、微小振幅波理論が適用できるものとする。またタンク本体は、微小変形の弾性体を仮定する。

タンクは軸対称構造物であるため、その振動モードは円周方向に Fourier 級数で展開できる。側板下端が剛基礎上に固定され、水平地震動が作用するとき、励起されるモードは、Fourier 級数の次数が 1 の場合のみである⁽²⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

図 2 に液体要素を示す。液体要素は、4 節点軸対称長方形要素である。要素内の動液圧 p は、節点での値を用いて次式で定義される。

$$p = \cos \theta [N_i] \{p\} \quad (1)$$

ここで、 $[N_i]$ は液体要素の形状マトリックス、 $\{p\}$ は要素内節点の動液圧ベクトルである。

図 3 に軸対称シェル要素を示す。これは、Kirchhoff-Love の仮定を用い、子午線方向変位 u 一次、円周方向変位 v 一次、法線方向変位 w 三次の形状関数を持ち、要素内変位は、次式で定義される。

$$\{\delta\} = [\lambda][N_s]\{u\} \quad (2)$$

ここで、 $[\lambda]$ は、 $\theta = 0-180^\circ$ の軸に対して対称な変位を規定する、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ から成る対角マトリックス、 $[N_s]$ は軸対称シェル要素の形状マトリックス、 $\{u\}$ は要素内節点の変位振幅ベクトルである。また、この場合、全体座標 z 軸と要素座標 s 軸は方向が一致する。

2.2 液体の運動方程式 図 1 の領域 V_i における液体の動液圧 $p_{(i)}$ と速度ポテンシャル $\phi_{(i)}$ との関係

は、線形化された Bernoulli の式より、次式で示される。

$$p_{(i)} = -\rho_{li} \frac{\partial \phi_{(i)}}{\partial t} \quad (3)$$

ただし、下付き括弧内は液体領域を表し、 ρ_l は液体の密度、 t は時間である。液体の運動は、動液圧 $p_{(i)}$ を用いて、次に示す基礎方程式で与えられる。

$$\nabla^2 p_{(i)} = \frac{\partial^2 p_{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p_{(i)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p_{(i)}}{\partial z^2} = 0 \quad (V_i \text{ 内で}) \quad (4)$$

$$\frac{\partial p_{(i)}}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 p_{(i)}}{\partial t^2} = 0 \quad (S_{i1} \text{ 上で}) \quad (5)$$

$$\frac{\partial p_{(i)}}{\partial r} = -\rho_{li} \left(\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2} + \ddot{u}_g \right) \quad (S_{i2} \text{ 上で}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial p_{(i)}}{\partial r} = -\rho_{li} \left(\frac{\partial^2 w^{(i-1)}}{\partial t^2} + \ddot{u}_g \right) \quad (S_{i4} \text{ 上で}) \quad (7)$$

$$\frac{\partial p_{(i)}}{\partial z} = 0 \quad (S_{i3} \text{ 上で}) \quad (8)$$

ただし、上付き括弧内は、側板領域を表し、 g は重力加速度である。

式 (4)～(8) を満たすはん関数は次式で与えられる⁽²⁾⁽⁷⁾。

$$I_{(i)} = \int_{t_1}^{t_2} (T_{(i)} + U_{(i)} - W_{(i)}) dt \quad (9)$$

ここで、 T 、 U 、 W はそれぞれ液体の運動エネルギー、ポテンシャルエネルギー、および液体が受ける外部仕事であり、次式で表される。

$$T_{(i)} = \frac{1}{2} \int_{V_i} \left\{ \left(\frac{\partial p_{(i)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial p_{(i)}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p_{(i)}}{\partial \theta} \right)^2 \right\} dV \quad (10)$$

$$U_{(i)} = -\frac{1}{2g} \int_{S_{i1}} \left(\frac{\partial p_{(i)}}{\partial t} \right)^2 r d\theta dr \quad (11)$$

$$W_{(i)} = -\rho_{li} \int_{S_{i2}} p_{(i)} \left(\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2} + \ddot{u}_g \right) r d\theta dz \\ + \rho_{li} \int_{S_{i4}} p_{(i)} \left(\frac{\partial^2 w^{(i-1)}}{\partial t^2} + \ddot{u}_g \right) r d\theta dz \quad (12)$$

式 (1)、(2) を式 (10)～(12) に代入し、はん関数 $I_{(i)}$ の停留条件より、液体の運動方程式として次式を得る。

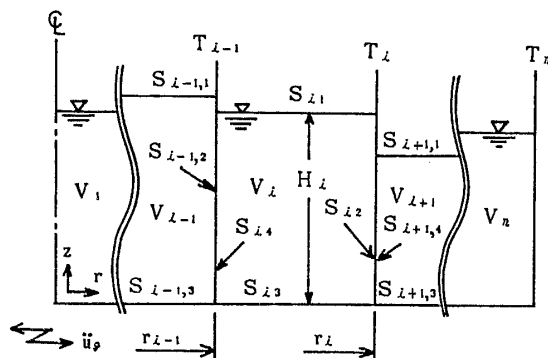


図 1 解析モデル

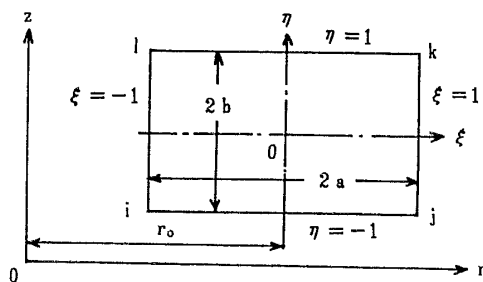


図 2 液体要素

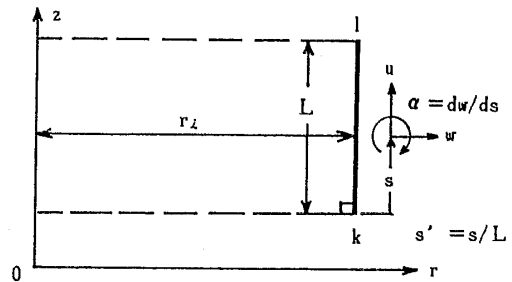


図 3 軸対称シェル要素

$$[M_{i(i)}]\{\ddot{p}_{(i)}\} + [K_{i(i)}]\{p_{(i)}\} + [S_{(i)}^i]\{\ddot{u}^{(i)}\} + [S_{(i)}^{(i-1)}]\{\ddot{u}^{(i-1)}\} = -([S_{(i)}^i]\{e^{(i)}\} + [S_{(i)}^{(i-1)}]\{e^{(i-1)}\})\ddot{u}_g \quad (13)$$

ここで, $[M_i]$, $[K_i]$, $[S]$, $\{e\}$ はそれぞれ液体の質量マトリックス, 剛性マトリックス, 連成マトリックス, および水平動の励振ベクトルであり, 次式で表される.

$$[M_i] = \frac{a}{g} \int_{-1}^1 [N_i(\eta=1)]^T [N_i(\eta=1)] (r_0 + a\xi) d\xi \quad (14)$$

$$[K_i] = ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{a^2} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right]^T \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{b^2} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right]^T \left[\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{(r_0 + a\xi)^2} [N_i]^T [N_i] \right\} (r_0 + a\xi) d\xi d\eta \quad (15)$$

$$[S_{(i)}^i] = 2\rho_{i(i)} b r_i \int_0^1 [N_i(\xi=1)]^T [N_s(w^{(i)})] ds' \quad (16)$$

$$[S_{(i)}^{(i-1)}] = -2\rho_{i(i)} b r_{i-1} \int_0^1 [N_i(\xi=-1)]^T [N_s(w^{(i-1)})] ds' \quad (17)$$

$$\{e\} = [0 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0]^T \quad (18)$$

式(16), (17)の $[N_i(\xi=\pm 1)]$ は, 液体要素の形状マトリックス $[N_i]$ に $\xi=\pm 1$ を代入し, η をシェル要素の座標 s' に変換したマトリックス, $[N_s(w^{(i)})]$ は, シェル要素の形状マトリックス $[N_s]$ より, 法線方向変位 w に関する行のみを抜き出したマトリックスである. また, 式(18)の $\{e\}$ は, 節点変位の並びの順, $[u \ v \ w \ a]^T$ に対応する.

2.3 液体-タンク連成系運動方程式 タンク本体の運動方程式は, 質量マトリックスを $[M_s]$, 剛性マトリックスを $[K_s]$, 動液圧により生じる等価節点荷重ベクトルを $\{f\}$ とすると, 領域 i の側板について次式となる.

$$[M_s^{(i)}]\{\ddot{u}^{(i)}\} + \{e^{(i)}\}\ddot{u}_g + [K_s^{(i)}]\{u^{(i)}\} = \{f^{(i)}\} \quad (19)$$

$[M_s]$, $[K_s]$ は次式となる⁽¹⁴⁾.

$$[M_s] = \rho_s h L \int_0^1 [N_s]^T [N_s] r ds' \quad (20)$$

$$[K_s] = L \int_0^1 [B]^T [D] [B] r ds' \quad (21)$$

ここで, ρ_s , h は, それぞれシェル要素の密度と板厚, $[B]$ はひずみ-変位マトリックス, $[D]$ は応力-ひずみマトリックスである. また $\{f^{(i)}\}$ は次式で表される.

$$\{f^{(i)}\} = -\frac{1}{\rho_{i(i)}} [S_{(i)}^i]^T \{p_{(i)}\} - \frac{1}{\rho_{i(i+1)}} [S_{(i+1)}^i]^T \{p_{(i+1)}\} \quad (22)$$

式(22)を用いて, 式(19)を系全体の方程式へ書き換えると, 次のようになる.

$$[\bar{M}_s]\{\ddot{\bar{u}}\} + [\bar{K}_s]\{\bar{u}\} = -[\bar{S}_s]\{\bar{p}\} - [\bar{M}_s]\{\bar{e}\}\ddot{u}_g \quad (23)$$

ただし, $[\bar{M}_s]$, $[\bar{K}_s]$ は, それぞれ $[M_s^{(i)}]$, $[K_s^{(i)}]$ を領域 1 から n まで対角に並べたマトリックス, $\{\bar{u}\}$, $\{\bar{e}\}$, $\{\bar{p}\}$ は, それぞれの各領域におけるベクトルを, 1 から n の順に並べたベクトルである. また $[\bar{S}_s]$ は次のようになる.

$$[\bar{S}_s] = \begin{bmatrix} [S_{(1)}^1]^T/\rho_{i(1)} & [S_{(2)}^1]^T/\rho_{i(2)} & & 0 \\ & [S_{(2)}^2]^T/\rho_{i(2)} & [S_{(3)}^2]^T/\rho_{i(3)} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & [S_{(n)}^n]^T/\rho_{i(n)} \end{bmatrix} \quad (24)$$

次に, 液体の運動方程式(13)を系全体の方程式へ書き換えると, 次式を得る.

$$[\bar{M}_i]\{\ddot{\bar{p}}\} + [\bar{K}_i]\{\bar{p}\} + [\bar{S}_i]\{\ddot{\bar{u}}\} = -[\bar{S}_i]\{\bar{e}\}\ddot{u}_g \quad (25)$$

$[\bar{M}_i]$, $[\bar{K}_i]$ については, $[\bar{M}_s]$ などの場合と同様であり, $[\bar{S}_i]$ は次式となる.

$$[\bar{S}_i] = \begin{bmatrix} [S_{(1)}^i] & & & 0 \\ [S_{(2)}^i] & [S_{(3)}^i] & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & [S_{(n-1)}^i] & [S_{(n)}^i] \end{bmatrix} \quad (26)$$

液体の質量マトリックス $[\bar{M}_i]$ は, 自由液面のポテンシャルエネルギーに関連して導びかれる量であり, スロッシングには重要であるが, バルジングにはそれほど影響を及ぼさない⁽⁷⁾. したがって, $[\bar{M}_i]=0$ を仮定

すると, 式(25)より動液圧 $\{\bar{p}\}$ は次のように表せる.

$$\{\bar{p}\} = -[\bar{K}_i]^{-1} [\bar{S}_i] (\{\ddot{\bar{u}}\} + \{\bar{e}\}\ddot{u}_g) \quad (27)$$

式(27)を式(23)に代入して整理すると連成系運動方程式として次式を得る.

$$[\bar{M}_a]\{\ddot{\bar{u}}\} + [\bar{K}_s]\{\bar{u}\} = -[\bar{M}_a]\{\bar{e}\}\ddot{u}_g \quad (28)$$

ただし, $[\bar{M}_a]$ は次式となる.

$$[\bar{M}_a] = [\bar{M}_s] - [\bar{S}_s][\bar{K}_i]^{-1} [\bar{S}_i] \quad (29)$$

式(29)右辺第2項は, 液体の効果が側板に付加される付加質量マトリックスである.

2.4 地震応答解析 式(28)右辺=0とおくと, 固有円振動数 ω_c , 固有ベクトル $\{\psi_c\}$ が求まる. 時刻歴応答解析にモード解析法を適用するために, 変位 $\{\bar{u}\}$ は, 基準座標 q_c を用いて次式で表せるとする.

$$\{\ddot{u}\} = \sum_{c=1}^m \{\psi_c\} \dot{q}_c = [\phi] \{\dot{q}\} \quad \cdots \cdots \cdots (30)$$

式(30)を式(28)に代入し、左側より $[\phi]^T$ を両辺に乘ずれば、固有ベクトルの直交性より、互いに独立な m 個の運動方程式が得られる。この各式に、振動モード間の連成の影響を無視して減衰項を加えれば、次式を得る。

$$\ddot{q}_c + 2\zeta_c \omega_c \dot{q}_c + \omega_c^2 q_c = -\beta_c \ddot{u}_g \quad \cdots \cdots \cdots (31)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \beta_c &= \bar{m}_c / m_c \\ \bar{m}_c &= \{\psi_c\}^T [\bar{M}_a] \{\bar{e}\} \\ m_c &= \{\psi_c\}^T [\bar{M}_a] \{\psi_c\} \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (32)$$

であり、 ζ_c は c 次の減衰比、 β_c は c 次の刺激係数である。

式(30)、(31)より、加速度応答 $\{\ddot{u}\}$ が求まり、これを式(27)に代入することにより、動液圧が得られる。

3. プログラム検証

2章の理論により開発したコンピュータプログラムの検証を行う。二重円筒では、はりとして扱った解析例はあるが、高さ/直径の値の小さな殻として扱った例は見あたらないため、通常の円筒タンクの固有値解析をFEMで行った幕田⁽⁹⁾と同一例題を解析する。モデルタンクを図4、解析結果を表1に示す。両結果は良い一致を示している。

4. 解析例

4.1 三重円筒タンク 図5に示すように、側板半径10, 20, 30 m, 高さ20 m, 液高17.5 mの三重円

表1 固有振動数 (Hz)

h		1 st	2 nd	3 rd
H	Present	6.27	11.81	16.67
	Makuta, et al. ⁽⁹⁾	6.27	11.82	16.77
H/2	Present	10.18	19.55	28.63
	Makuta, et al. ⁽⁹⁾	10.19	19.75	29.72

Diameter 36580 mm
Height (H) 12190 mm
Shell thickness 25.4 mm
Young's modulus 206 GPa
Poisson's ratio 0.3
Shell density 7840 kg/m³
Liquid density 980 kg/m³
Liquid height (h) H/2, H
Mesh division Axial 12
Radial 5

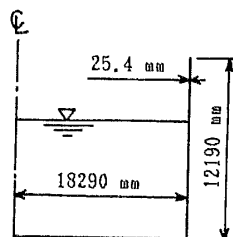


図4 検証例題

筒タンクの液体-タンク連成地震応答解析を行う。タンクの各寸法、材料定数を表2に示す。また、一つの領域を側板・16軸対称シェル要素、液体・42軸対称長方形

表2 タンク諸元

	Inner	Middle	Outer
Diameter (mm)	20000	40000	60000
Height (mm)	20000	20000	20000
Liquid height (mm)	17500	17500	17500
Shell plate thickness from bottom (mm)	18, 13, 12, 10, 9, 8, 7	27, 20, 17, 15, 12, 11, 10, 10	22, 18, 14, 12, 10, 9, 8, 8
Shell plate width (mm)	2500×8	2500×8	2500×8
Young's modulus (GPa)	206	206	206
Poisson's ratio	0.3	0.3	0.3
Shell density (kg/m ³)	7850	7850	7850
Liquid density (kg/m ³)	1000	1000	1000
Mesh division	Axial 16	16	16
	Radial 3	3	3

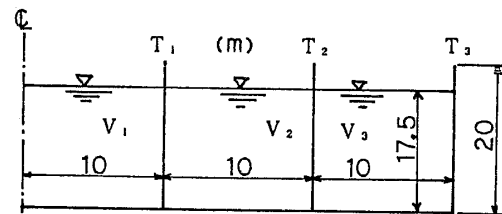
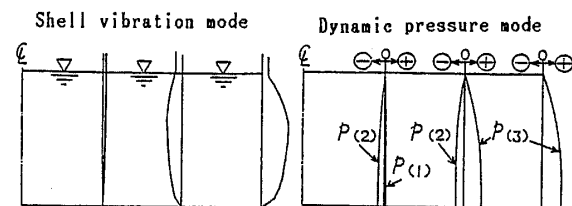
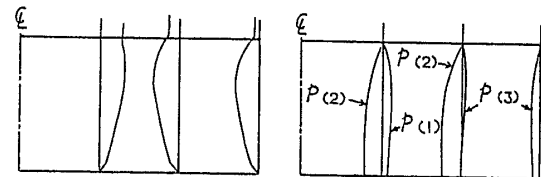


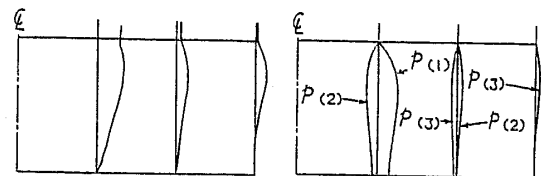
図5 三重円筒タンク



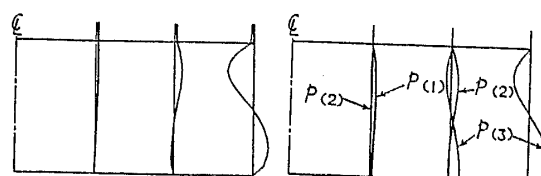
(a) 1st, 1.958 Hz, $\beta_1=0.228$



(b) 2nd, 2.904 Hz, $\beta_2=0.690$



(c) 3rd, 3.817 Hz, $\beta_3=1.941$



(d) 4th, 4.170 Hz, $\beta_4=0.495$

図6 ケース1, $\theta=0$ の断面における振動モード

要素(半径方向3等分×高さ方向14等分)で分割する。

4.2 固有値解析結果 図5に示す三重円筒タンクの、内槽タンク(V_1)、中間タンク(V_2)、外槽タンク(V_3)ともに満液の場合(ケース1)と、 V_1 のみ空の場合(ケース2)の固有値解析を行った結果、側板の振動モードとそれに対応する動液圧分布モードを図6, 7に示す。図6, 7における刺激係数 β_c は、固有ベクトルの回転変位以外の成分の最大値を1となるように正規化したときの値である。

両図より、ケース1, 2とも、一次モードは内側板(T_1)がほとんど振動せず、中側板(T_2)と外側板(T_3)のみが振動し、振動数、モード形とも両ケースに差異

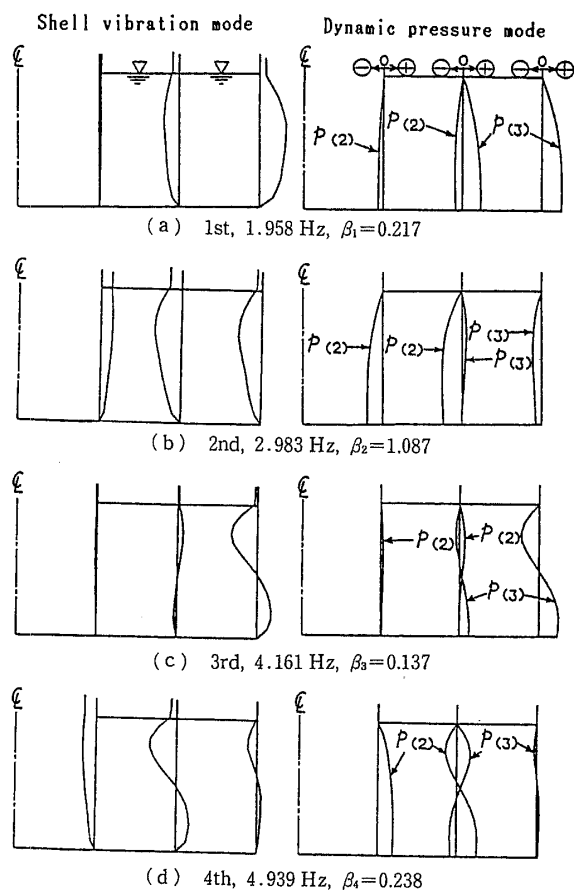


図7 ケース2, $\theta=0$ の断面における振動モード

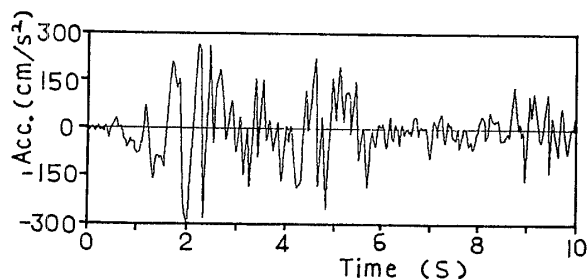


図8 地震波入力波形 (EI Centro NS)

がない。また T_1 と T_2 , T_2 と T_3 がともに逆相モードとなる。一方、二次モードでは、両ケースとも、 T_1 と T_2 が逆相モード、 T_2 と T_3 が同相モードとなる。またケース1の三次モードは、 $T_1 \sim T_3$ がすべて同相モードとなり、刺激係数が最も高い。

ケース1では三次モードまで、ケース2では二次モードまで側板の振動は、すべてが軸方向一次モードとなり、ケース2では、 $T_1 \sim T_3$ がすべて同相モードで、軸方向一次のモードは存在しない。

4.3 応答解析結果 図8に示す、1940年米国のImperial Valley地震EI Centro波NS成分を最大加速度 300 cm/s^2 として入力したときの、時刻歴応答解析をケース1の場合について行った。なお、式(31)の積分は線形加速度法で行い、減衰比 ζ_c を0.05とした。

図9に時刻2.29, 2.40, 2.76sでの、タンクの応力解析を行ううえで重要となる動液圧の分布を示す。この動液圧には、式(27)の右辺第2項で示される、タンクの剛体移動による成分も含まれる。時刻2.29sは T_3 , 2.40sは T_2 , 2.76sは T_1 に作用する動液圧による水平力がそれぞれ最大となる時刻である。図9より、 T_3 に作用する動液圧に比べ、 T_1 , T_2 に作用する動液圧が大きくなり、側板自身、および側板と底板との接

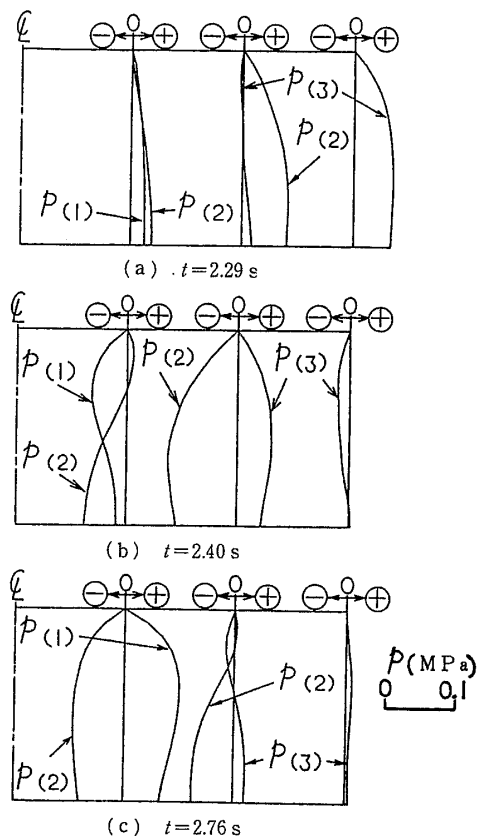


図9 $\theta=0$ の断面における動液圧分布 (ケース1)

合部における応力に大きな影響を与えるものと考えられる。

5. 結 言

大形多重円筒石油タンクの耐震設計のため、有限要素法による地震応答解析プログラムを開発し、実際のタンクの解析を行った。これにより、任意形状の多重円筒タンクの固有振動数、振動モード、地震応答を求めることが可能となった。

なお、本研究に当たり、ご協力いただいた東京大学工学部 吉田有一郎助手に謝意を表す。

文 献

- (1) Edwards, N. W., *Disert, Univ. Michigan*, (1969), 1.

- (2) 岡田・ほか2名, 川崎技報, 59 (昭50), 1.
 (3) 小松, 機論, 45-391, (昭54), 295.
 (4) 近藤, 機論, 46-405, C (昭55), 509.
 (5) Housner, G. W., ほか1名, *ASME*, 80-C2/PVP-79 (1980), 1.
 (6) 藤田, 機論, 47-413, C (昭56), 20.
 (7) 清水・ほか2名, 機論, 48-426, C (昭57), 215.
 (8) 宇治橋・ほか2名, 機論, 48-431, A (昭57), 939.
 (9) 幕田・ほか4名, 三菱重工技報, 21-2 (昭59), 1.
 (10) 内海・ほか2名, 機論, 52-473, C (昭61), 279.
 (11) 笠井, 機論, 48-435, C (昭57), 1703.
 (12) 藤田, 機論, 51-466, C (昭60), 1170.
 (13) Chiba, T., ほか1名, *ASME*, PVP, 98-7 (1985), 25.
 (14) Zienkiewicz, O. C. (吉識・山田監訳), マトリックス有限要素法, (昭59), 348, 培風館.

討 論

〔質問〕 原 文 雄〔東京理科大学工学部〕
 解析対象の構造物が三次元的に複雑になった場合について、この解析手法の適用性、応用性はいかにか。

〔回答〕 軸対称問題として展開した本論文の理論を三次元へ拡張するのは容易であるが、大容量の計算機を必要とする。