

三次元貯槽内の非線形スロッシングに対する境界要素解法*

田 中 宏 明^{*1}, 中 山 司^{*2}

A Boundary Element Method for the Analysis of Nonlinear Sloshing in Three-Dimensional Containers

Hiroaki TANAKA and Tsukasa NAKAYAMA

A new computational method has been developed for the analysis of three-dimensional large-amplitude motion of liquids with free surfaces in moving containers. The problem is formulated mathematically as a nonlinear initial-boundary value problem under the assumption of irrotational flow of an inviscid fluid. The free surface is moved during each time step in a Lagrangian manner, and its new position is calculated using a forward-time Taylor series expansion. One of the key features of the present method exists in the algorithm to compute the values of Lagrangian time derivatives in the Taylor series. To evaluate these derivatives, a boundary element method is used. The use of the Taylor series expansion has enabled us to employ a variable time-stepping method. The size of a time increment is determined at each time step so that the remainders of the truncated Taylor series should be equal to or less than a given small error limit. Such a variable time-stepping technique has made a great contribution to numerically stable computations. As a numerical example, a swirl motion of liquid in a cylindrical container subjected to a forced horizontal oscillation has been analyzed.

Key Words: Sloshing, Numerical Analysis, Boundary Element Method, Potential Flow, Three-dimensional Flow, Swirl Motion of Wave

1. は じ め に

大量の液体を含む貯槽が加振を受けるとき、槽内の液体がどのような動的挙動を示すかを事前に把握しておくことは、工学の多くの分野で重要である。たとえば、全重量に対して液体燃料の占める割合の大きい液体ロケットや人工衛星の姿勢制御系の設計、原油タンクや原子力発電プラントの冷却水プールの耐震設計などにおいて、このスロッシングに関する情報は不可欠である。そして、設計変更などに柔軟に対応してデータを提供するためには、計算機の利用を前提とした数値解析が有効である。

これまで、有限要素法や差分法を用いた解法が種々提案され、いくつかの自由表面問題において成功を収めている。一般にこれらの領域分割形的手法では時々刻々変化する自由表面形状に合わせて解析領域を再分割しなければならず、複雑なアルゴリズムと多くの計算時間を必要とする。そして、その複雑さと計算時間の増加は三次元問題の解析において、より深刻なものとなる。そこで最近では、境界要素法が注目され、これ

を応用した解法が報告されるようになってきている^{(1)~(4)}。機器や貯槽の設計において重要なのは、共振点付近での液面の大振幅応答であり、この意味において、液体振動の非線形性に着目した解法が要求される。とくに、三次元軸対称貯槽内で発生するスワリング(swirling)と呼ばれる液面の回転運動は非線形応答として興味深い。

さきに著者の一人は、二次元の自由表面問題に対して、境界要素法と関数のテーラー級数展開を併用した新しい解法を提案した⁽⁵⁾⁽⁶⁾。これによれば、テーラー級数を有限項で打ち切ったときの打ち切り誤差を評価することによって、毎時刻、最適な時間増分を決めることができ、大振幅の液体運動に対して安定で精度の良い数値計算を実現することができる。そこで本研究では、この方法を拡張して、三次元軸対称貯槽内の大振幅スロッシングの解法を構築する。

2. 円筒形貯槽内の液体スロッシングの定式化

図1に示す円筒形貯槽が水平加振を受けるときの槽内液体の運動を考える。座標系は貯槽に固定され、貯槽とともに運動する動座標系とし、静止水平面内に x , y 軸を取り、貯槽の中心軸に一致させて鉛直上向きに z 軸をとる。液体は非粘性非圧縮性流体とし、流体内部

* 平成元年11月27日 第2回計算力学講演会において講演、原稿受付 平成2年3月19日。

^{*1} 学生員、中央大学大学院〔現在：(株)東芝〕。

^{*2} 正員、中央大学理工学部(〒112 東京都文京区春日1-13-27)。

部は非回転流れとする。このとき、座標系に対する流体の相対速度成分 (u, v, w) を用いて速度ポテンシャル $\phi(x, y, z, t)$ が $\nabla\phi = (u, v, w)$ で定義される。この速度ポテンシャルを用いると、液体の運動を表す支配方程式と境界条件は次のようにまとめられる。

$$\nabla^2\phi=0 \quad V \text{ 内} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + a(t)\xi + \mu\phi + g\zeta = 0 \quad S_1 \text{ 上} \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$u = \frac{D\xi}{Dt}, \quad v = \frac{D\eta}{Dt}, \quad w = \frac{D\zeta}{Dt} \quad S_1 \text{ 上} \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad S_2 \text{ 上} \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

ここに、 V は液体内部、 S_1 は自由表面境界、 S_2 は液体に接した貯槽壁境界である。 ∇^2 は三次元ラプラスアンであり、 $\partial/\partial n$ は境界上に立てた外向き法線 n に沿って微分することを意味する。 t は時間を表し、 D/Dt はラグランジュ微分演算子を表す。 $a(t)$ は x 軸方向の加振加速度、 g は重力の加速度である。 $\mu\phi$ は液体運動の減衰効果を考慮した項で、 μ は減衰係数である。また、 (ξ, η, ζ) は自由表面上の流体粒子の座標を表す。本手法では、自由表面上の流体粒子をラグランジュ的に移動させることによって、時々刻々の自由表面形状の変化を追跡する。

以上より、貯槽内の液体振動現象は、速度ポテンシャル ϕ と座標 (ξ, η, ζ) を未知量とする式(1)～(4)を、適当な初期条件のもとで解く非線形初期値境界値問題に帰着された。

3. 計算のアルゴリズム

図2のように、時刻 t の自由表面上で (ξ, η, ζ) の位置にあった流体粒子が、時刻 $t + \Delta t$ には自由表面上の (ξ', η', ζ') に移動したとする。このとき、 ξ', η', ζ' は

(ξ, η, ζ, t) を中心にしてテーラー級数に展開することができる。このテーラー級数を n 階微係数の項で打ち切ると

$$\xi' \approx \xi + \Delta t \frac{D\xi}{Dt} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{D^2\xi}{Dt^2} + \cdots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} \frac{D^n\xi}{Dt^n} \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\eta' \approx \eta + \Delta t \frac{D\eta}{Dt} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{D^2\eta}{Dt^2} + \cdots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} \frac{D^n\eta}{Dt^n} \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\zeta' \approx \zeta + \Delta t \frac{D\zeta}{Dt} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{D^2\zeta}{Dt^2} + \cdots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} \frac{D^n\zeta}{Dt^n} \quad \cdots\cdots\cdots(7)$$

を得る。そこで、これらのテーラー級数に含まれるラグランジュ微係数の値が計算できれば、時刻 $t + \Delta t$ の各流体粒子の位置を知ることができる。そしてそれらの流体粒子が作る曲面がその時刻の自由表面となる。

3・1 1階のラグランジュ微係数の計算 最初に、ラプラス方程式(1)を境界条件

$$S_1 \text{ 上で } \phi = \bar{\phi}, \quad S_2 \text{ 上で } \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

のもとで解く。ここに $\bar{\phi}$ は既知量であり、直前の時間ステップで計算されているものとする。この境界値問題を解くために境界要素法を用いる。まず、グリーンの公式を介して式(1)、(8)を境界積分方程式に変換する。次に、境界 S_1, S_2 を多数の三角形要素に分割し、各要素内で ϕ と $\partial\phi/\partial n$ を一次の形状関数で近似することにより、積分方程式を離散化する。さらに、選点法を用いて、 S_1 上で $\partial\phi/\partial n$ 、 S_2 上で ϕ を未知量とする連立一次代数方程式を導く。

この連立一次方程式を解いて、自由表面上で $\partial\phi/\partial n$ の値を得る。また自由表面上では ϕ の値が既知であることから、適当な数値微分公式を用いて $\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y$ を計算することができる。本方法ではこれらの微係数を、自由表面上の各要素ごとに形状関数を微分し、要

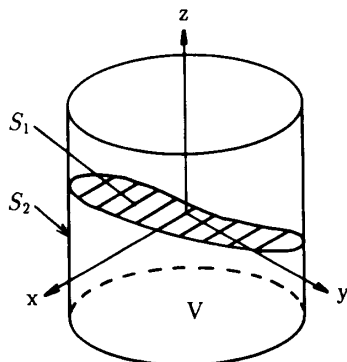


図1 円筒形液体貯槽

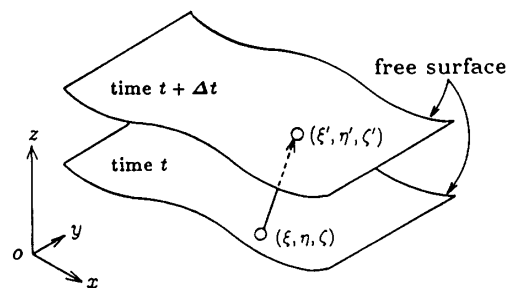


図2 流体粒子の移動

素平均を計算して節点値とする通常の有限要素法の手法によって求めている。そこで $D\xi/Dt$, $D\eta/Dt$, $D\zeta/Dt$ は次のように計算される。

$$\frac{D\xi}{Dt} = u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{D\zeta}{Dt} = w = \frac{\partial\phi}{\partial z} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial n} - \frac{\partial\phi}{\partial x} n_x - \frac{\partial\phi}{\partial y} n_y \right) / n_z \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに n_x , n_y , n_z は、それぞれ境界上に立てた外向き法線の x , y , z 軸に対する方向余弦である。

3.2 2階のラグランジュ微係数の計算 たとえば、 $D^2\xi/Dt^2$ は

$$\frac{D^2\xi}{Dt^2} = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (12)$$

と書ける。ここで、 $u = \partial\phi/\partial x$ であること、渦なしの条件より $\partial u/\partial z = \partial w/\partial x$ であることを考慮すると、上式は

$$\frac{D^2\xi}{Dt^2} = \frac{\partial\phi_t}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。ここに $\phi_t = \partial\phi/\partial t$ である。 u と w のこの配は、3.1節と同様の数値微分によって計算するものとするれば、 $D^2\xi/Dt^2$ を求めるためには、自由表面上で ϕ_t のこの配を知ることが必要である。そこでこれを以下のように計算する。

ラプラス方程式(1)を時間で微分すると、 ϕ_t もまたラプラス方程式を満たさなければならないことがわかる。そこで ϕ_t に関する次のような境界値問題を考える。

$$\nabla^2 \phi_t = 0 \quad V \text{ 内} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\phi_t = \frac{D\phi}{Dt} - (u^2 + v^2 + w^2) \quad S_1 \text{ 上} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{\partial\phi_t}{\partial n} = 0 \quad S_2 \text{ 上} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 $D\phi/Dt$ の値は圧力境界条件(2)を用いて3.1節で計算することができる。したがって、式(15)の右辺は既知であることに注意されたい。この境界値問題を境界要素法で解き、自由表面上で $\partial\phi_t/\partial n$ の値を得る。続いて、3.1節と同様の数値微分によって $\partial\phi_t/\partial x$, $\partial\phi_t/\partial y$ を求め、式(11)と同様の考え方で $\partial\phi_t/\partial z$ を求める。こうして式(13)および類似の式によって ξ , η , ζ の2階のラグランジュ微係数を計算することができる。

3.3 高階のラグランジュ微係数の計算 一般に、 $\Phi \equiv \partial^{n-1}\phi/\partial t^{n-1}$ とおくと、 Φ に関する境界値問題

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad V \text{ 内} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\Phi = \bar{\Phi} \quad S_1 \text{ 上} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad S_2 \text{ 上} \quad \dots\dots\dots (19)$$

を解いて、 n 階のラグランジュ微係数 $D^n\xi/Dt^n$, $D^n\eta/Dt^n$, $D^n\zeta/Dt^n$ を計算する。式(18)の右辺の $\bar{\Phi}$ に対する表式は圧力境界条件(2)を時間で逐次微分することによって導かれる。このとき、自由表面境界が移動境界であることから、ラグランジュ微分を行うことに注意しなければならない。

4. 自由表面上での節点の再配置と速度ポテンシャルの計算方法

本方法では、自由表面を境界要素に分割したときの各節点を流体粒子とみなしている。そこで、式(5)～(7)によって時刻 $t + \Delta t$ における節点の座標を計算し、節点を移動させると、各要素が変形し、要素の大きさにばらつきが生じる。このばらつきの度合いが大きいと数値計算の精度、とくに境界要素解析の精度が損なわれ、ひいては計算の不安定化につながる。そこで本方法では、各要素の大きさがほぼ均一になるように、毎時間ステップ、節点の再配置を行っている。

まず、時刻 $t=0$ のときの静止水面を要素面積がほぼ等しくなるように要素分割する。このとき節点 i の x , y 座標をそれぞれ ξ_i^0 , η_i^0 とする。式(5)～(7)で計算された時刻 $t + \Delta t$ での各節点の座標値 (ξ' , η' , ζ') をもとにして、(ξ_i^0 , η_i^0) における z 座標 ζ_i'' を補間によって求める。そこで、(ξ_i^0 , η_i^0 , ζ_i'') を時刻 $t + \Delta t$ での節点 i の座標とする。

こうして再配置された節点 i における、時刻 $t + \Delta t$ での速度ポテンシャルの値 ϕ_i' は、次のテーラー級数によって計算することができる。

$$\phi_i' = \phi_i + \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k!} \left(\Delta t \frac{\partial}{\partial t} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \right)^k \phi_i \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここに $\Delta z = \zeta_i'' - \zeta_i$ であり、 ϕ_i , ζ_i は時刻 t における値である。

5. 最適時間増分の計算

本方法では、各時間ステップごとに、そのときの液体運動の変化のしかたに応じた時間増分値を決めることができる。

ある時間の関数 $f(t)$ のテーラー級数は

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t f'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} f''(t) + \dots \quad \dots\dots\dots (21)$$

で与えられる。これを n 階の微係数を含む項で打ち切ると、そのときの打ち切り誤差 R は

$$R = \frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\tau) \quad t \leq \tau \leq t + \Delta t \quad \dots\dots\dots (22)$$

のように表される。そこで、あらかじめ与えられた微小量 ε を用いて、 $R=\varepsilon$ となるように時間増分 Δt の大きさが決定される。すなわち

$$\Delta t = \left\{ \frac{\varepsilon(n+1)!}{f^{(n+1)}(\tau)} \right\}^{1/(n+1)} \dots\dots\dots (23)$$

である。これを式(5)~(7)に適用するときは、 $f^{(n+1)}(\tau)$ に対して次のような値を近似的に用いる。

$$f^{(n+1)}(\tau) \approx \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \left| \left(\frac{D^{n+1}\xi}{Dt^{n+1}} \right)_i \right|, \left| \left(\frac{D^{n+1}\eta}{Dt^{n+1}} \right)_i \right|, \left| \left(\frac{D^{n+1}\zeta}{Dt^{n+1}} \right)_i \right| \right\} \dots\dots\dots (24)$$

ここに N は自由表面上の節点の総数である。 $(n+1)$ 階のラグランジュ微係数は、3章で求められた n 階のラグランジュ微係数を用いて後退時間差分で計算する。

6. 計算精度の検証

まず、液面の応答変位が小さい場合について線形理論⁽⁷⁾の厳密解との比較計算を行った。半径 R が 0.5 m の貯槽に深さ 0.6 m まで液体を入れ、 x 軸に平行に加

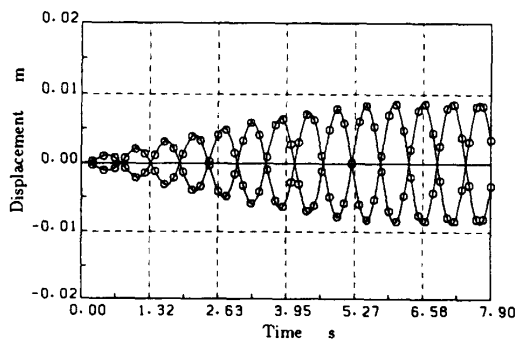


図3 線形理論解との比較(○:本手法, —:線形理論解)

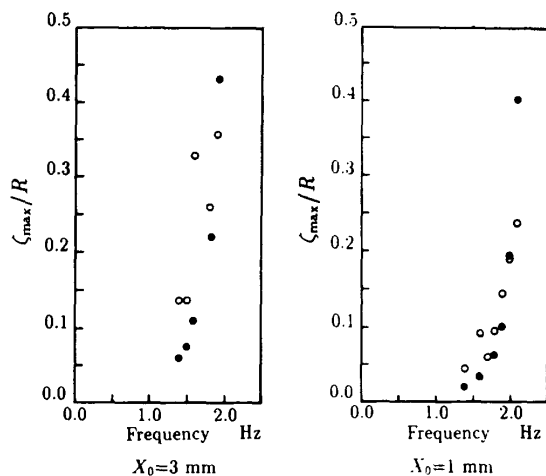


図4 実験値との比較(●:計算値, ○:実験値)

振加速度 $a(t)=0.00154g \sin(2\pi \times 0.875t)$ を与えて、強制加振を行った。図3は、このときの壁面上 ($x=\pm R$) における液面変位の時間変化を示している。実線が線形理論解、○印が本手法による計算結果である。両者の一致は良好である。

次に、実験値⁽⁸⁾との比較を示す。半径 0.092 m の貯槽に深さ 0.092 m まで水を入れ、 x 軸方向に強制変位 $X(t)=X_0 \sin(2\pi ft)$ を与える。加振振幅 X_0 が 1 mm と 3 mm の場合について、異なる加振周波数 f に対する液面変位を調べた結果が図4である。このとき計算では、それぞれの加振振動数について、液体静止状態から加振を開始した。図4の横軸には加振周波数、縦軸には液面変位の最大値を貯槽半径 R で無次元化した量をとってある。●印が計算値、○印が実験値を示す。全体として両者の傾向は良い一致を示している。

本計算では減衰係数 μ を零とし、式(23)の ε に対して 10^{-5} を用いた。なお、一次共振点 ($f=2.17$ Hz) 近傍では7章で述べるスワリングが起こる可能性があるが、この比較計算では液面の応答は面内運動に限定して行った。

7. スワリング現象のシミュレーション

一般に、水平加振される軸対称貯槽内の液面応答には、面内運動と面外運動の2種類があることが知られている。このうち面外運動は液面の波頭が貯槽内壁に沿って回転する現象で、スワリング (swirling) とも呼ばれる。スワリングに関しては、実験的研究が文献(9)に報告されており、現象の存在に関する理論解析が文献(10)~(13)でなされている。しかし、スワリングを直接数値的にシミュレートした報告はないようである。そこで本章では、著者らが提案する方法を用いてスワリング現象のシミュレーションを試みる。

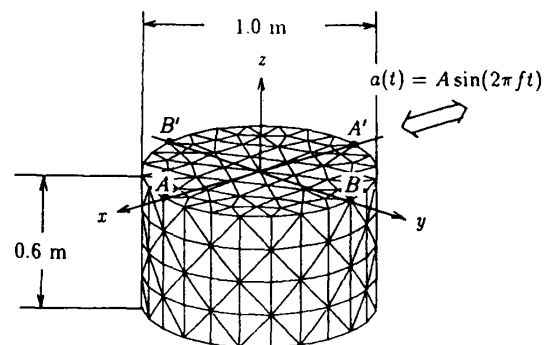


図5 解析モデルと要素分割

解析モデルとして、図5に示すような、半径0.5 mの貯槽に深さ0.6 mまで液体を入れたものを考え、自由表面を108要素、67節点、貯槽の側壁および底を300要素、187節点に分割する。これを x 軸方向に加速度 $a(t)=A \sin(2\pi ft)$ で強制加振する。

さて、上記の文献によれば、液面応答には加振振幅と加振周波数の組合せによって面内運動が安定な場合と面外運動が安定な場合があり、面外運動は共振点近傍で発生する。液体が静止している状態から、一次共振点付近の周波数で加振を始めると、液体はまず面内運動を起こし、次第に振幅を増していく。そしてあるところでスワリングに移行する。実験などで液面応答が面内運動からスワリングに移るきっかけとしては、実験装置の設置状況や初期外乱、壁面摩擦などが考えられるが、ポテンシャル流れ理論に基づく本方法においては壁面摩擦を考慮することは不可能である。そこで加振初期に微小外乱を与えてスワリングを発生させることにする。この外乱は、 y 軸方向にも強制加振を加え、 x 軸方向と y 軸方向の強制変位の合成によって貯槽を旋回させることで発生させることができる。そこで、圧力境界条件(2)の左辺に $b(t)\eta$ という項を新たに付加する。ここに $b(t)$ は次式のような y 軸方向の加振加速度である。

$$b(t) = \begin{cases} B \cos(2\pi ft) & 0 \leq t \leq 3 \\ 0 & 3 < t \end{cases} \quad \dots\dots\dots (25)$$

今回の計算では、 $B=A \sin(\pi t/6)$ とし、 f に対しては $a(t)$ と同じ周波数を用いた。この結果、加振開始から3 sの貯槽の強制変位の軌跡は、たとえば図7の場合について示すと図6のようになる。

図7は、 $A=-0.0178g$ 、 $f=0.940$ Hz（一次の固有周波数は0.944 Hzである）のときの液面変位の時間変化を示したものである。 A, A' 点、 B, B' 点は図5に示

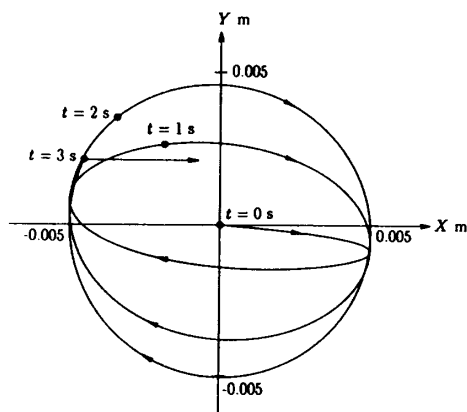


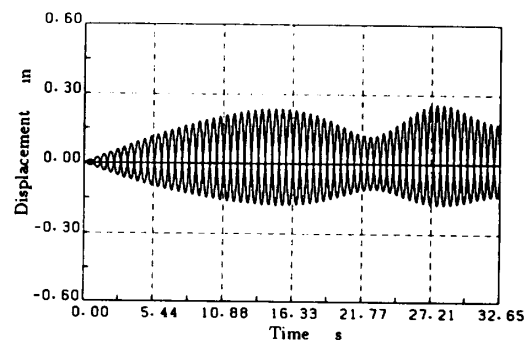
図6 加振初期の貯槽の動き（ X, Y はそれぞれ x 軸方向、 y 軸方向の強制変位を表す）

すとおりである。 B, B' 点の変位を見ると、外乱発生区間の3 sは変位が増加しているが、その後ほぼ一定の振幅で応答している。この区間の液面応答は面内運動と考えられる。そして、10 s付近から振幅が急激に増大し、液面応答がスワリングへ移行していることがわかる。スワリングへ移行した後の各時刻の液面形状を示したものが図8である。液面が時計回りに回転しているのがわかる。

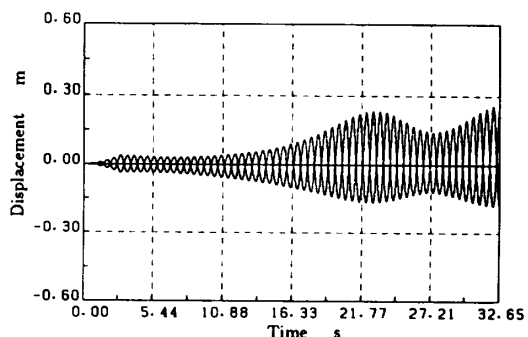
図9は、 $A=-0.0128g$ 、 $f=0.796$ Hzのときの液面変位の時間変化を示したものである。初期外乱によって生じた B, B' 点の変位は時間とともに減少し、この加振振幅と加振周波数の組合せに対しては面内運動が安定な応答であることがわかる。

なお、以上の計算では $\mu=0.1$ 、 $\varepsilon=10^{-6}$ とした。

さて、初期外乱を与えることなくスワリングを発生させる手段として、減衰係数 μ に対して $y>0$ と $y<0$ でそれぞれ異なる値を与えるという方法が考えられる。実際に、 μ の値を y 軸方向に線形に変化させて μ の不均一さを与え、最初から x 軸方向のみの加振を続けると、静止状態から面内応答、そしてスワリングへの一連の変化をシミュレートすることができる。しかし、前述の初期外乱を与える方法に比べると、ス



(a) A, A' 点の変位



(b) B, B' 点の変位

図7 加振周波数 $f=0.940$ Hzのときの液面変位の時間変化

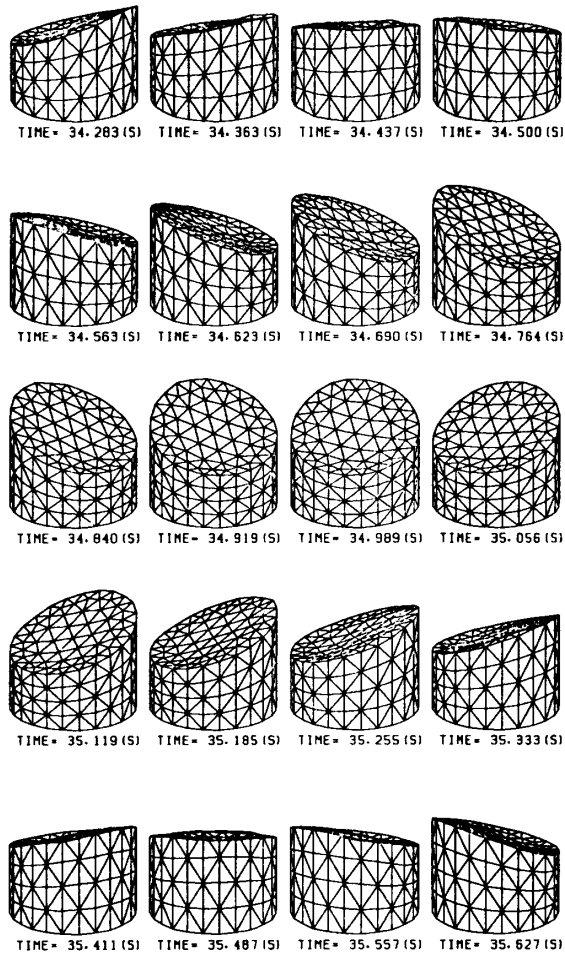


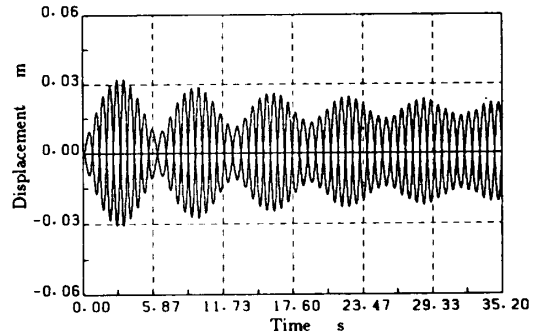
図 8 加振周波数 $f=0.940$ Hz のときの
各時刻の液面形状

ワーリングに移行するまでの時間が長く、ほぼ倍の計算時間を必要とした。したがって、この方法はワーリングをシミュレートする手段としては、実用的とは言えない。

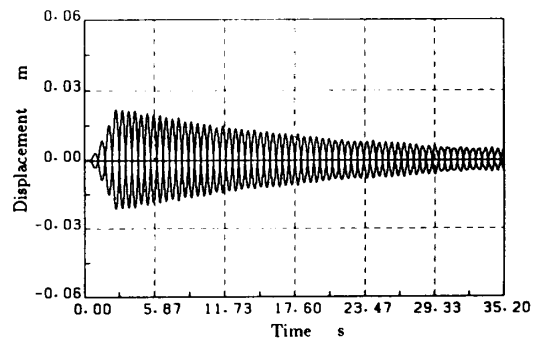
8. お わ り に

三次元軸対称貯槽内の液体の非線形振動の解析のための数値解法を構築した。微小振幅振動に対する理論解や実験値との比較を行い、実用上十分な精度を有することを確認した。さらに、非線形性の強い液面応答として知られるスワーリング現象のシミュレーションを行った。本研究の目的は、三次元軸対称貯槽内の非線形スロッシングに対する数値解法を構築し、その実用性を検証することであり、この意味において、所期の目的を達することができた。

そこで、この手法を用いてスワーリング現象の数値実験を行うために、今後検討すべき課題をまとめると、



(a) A, A' 点の変位



(b) B, B' 点の変位

図 9 加振周波数 $f=0.796$ Hz のときの
液面変位の時間変化

まず第 1 に、計算されたスワーリング応答の定量的な精度検証がある。この応答は共振点付近で計算しなければならないため、減衰項 $\mu\phi$ の使用が不可欠である。そのとき減衰係数 μ に対してどのような値が適当なのかは、実験値との比較を通して詳細に検討していかなければならない。第 2 に、初期外乱を発生させるために用いた加速度項 $b(t)$ の決め方が挙げられる。今回は試行錯誤により、一つの可能性として式(25)を用いた。これに関しては、スワーリング時の流体粒子の挙動を理論的に検討することが必要であろう。

以上のように、検討すべき課題はあるが、軸対称貯槽内でのスワーリング現象の直接数値シミュレーションの手段として本方法はきわめて有望であると考えられる。

文 献

- (1) Faltinsen, O. M., *J. Ship Res.*, **22** (1978), 193.
- (2) Nakayama, T., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **17** (1981), 1631.
- (3) 新聞・ほか 3 名, 西部造船会会報, **64** (1982), 103; 66

- (1983), 25.
- (4) 井関・新開, 日本造船学会論文集, **163** (1988), 294.
- (5) Nakayama, T., *Proc. 7th Int. Conf. Finite Element Methods Flow Problems*, (1989), 659.
- (6) Nakayama, T., *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **10** (1990), 683.
- (7) 曾我部・柴田, 生産研究, **26-3** (1974), 119.
- (8) 須藤・橋本, 機論, **52-483, B** (1986), 3655.
- (9) Abramson, H. N., ほか2名, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **33-4** (1966), 777.
- (10) Hutton, R. E., *NASA Tech. Note*, D-1870 (1963).
- (11) Miles, J. W., *J. Fluid Mech.*, **75-3** (1976), 419.
- (12) 木村・大橋, 機論, **44-385**, 第1部, (1978), 3024; **44-386**, 第1部, (1978), 3446; **46-401, C** (1980), 42.
- (13) 大森・ほか3名, 日本建築学会構造系論文報告集, **385** (1988), 69.
-