

磁性流体スロッシングにおける液面挙動と周波数応答*

木倉 宏成^{*1}, 澤田 達男^{*2}, 棚橋 隆彦^{*2}Surface Behavior of Magnetic Fluid Sloshing
and its Frequency Response

Hiroshige KIKURA, Tatsuo SAWADA and Takahiko TANAHASHI

In the present paper, the dynamic behavior of magnetic fluid surfaces in containers were experimentally examined. Experiments were carried out for rectangular, cylindrical and spherical containers. These containers were horizontally oscillated. The vertical nonuniform magnetic field was applied by permanent magnets which were set underneath the containers. The test liquid was a magnetic fluid with fine magnetite particles in a water carrier. It was found that the harmonic wave motion, swirling waves and flow pattern of surface waves were influenced by the magnetic fields. The resonant frequency of the liquid-container system moved toward the high-frequency region with increase of the magnetic field intensity. This behavior was also studied by the linear theory. Theoretical results were qualitatively in good agreement with experimental results.

Key Words : Magnetic Fluids, Swirling Motion, Sloshing, Resonant Frequency, Water Wave

1. 緒 言

自由表面を持った流体が流体貯槽内で激しく動揺する現象をスロッシング(Sloshing, 液面動揺)と呼ぶ。スロッシング現象に関する研究はロケット・宇宙船関係およびプラントの液体貯槽に関する研究が多く行われている⁽¹⁾⁽²⁾。また、主として近似解析理論より固有振動数および貯槽内壁に作用する動的圧力の推定が行われ⁽³⁾⁽⁴⁾、近年では有限波高に基ずく非線形運動の研究が盛んである^{(5)~(7)}。

一方、磁性流体は、宇宙計画に関連して無重力下での液体ロケット燃料を磁石を利用して制御することを目的に開発された流体である⁽⁸⁾。そして、自由表面を有する磁性流体の各種界面現象についても、比較的多くの基礎研究がなされている^{(9)~(11)}。中でも自由表面を有する磁性流体の波動現象に関して Zelazo-Melcher⁽¹²⁾は、波動運動の共振振動数が磁場によって変化することを明らかにしている。また、須藤ら⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾は水平振動する容器内の磁性流体が磁場の作用を受ける場合の液体自由表面の挙動および、液体内部における圧力変動を実験的に調べている。そして、自由表面に発生する波動の振幅が磁場の強さの増加とともに減少し、流

体内の圧力変動の様相が磁場の印加によって変化するという結果を得ている。

しかし、このような振動実験は矩形容器を用いたものが多く、円筒容器および球形容器のような軸対称容器におけるスロッシング現象、特に共振振動数近傍における不規則な回転運動であるスワーリング現象⁽⁶⁾については不明な点が多い。

そこで、本研究では自由表面を有する磁性流体の波動現象の研究にあたり、磁性流体が満たされた水平振動する矩形容器および軸対称容器(円筒容器および球形容器)下部より垂直磁場を印加した場合の自由表面の挙動を調べた。特に、液面変位の周波数応答に着目して実験を行った。そして、磁性流体の垂直磁場作用下における固有角振動数を微小振幅波理論により求め、実験結果と比較検討した。

2. 磁性流体の固有角振動数

磁性流体の固有角振動数をポテンシャル理論を用いて求める。ここでは、円筒容器の場合を示す。図1に解析モデルを示す。

磁性流体の運動方程式は、非粘性および非極性を考慮すると、速度ポテンシャル $\phi(r, \theta, z, t)$ を導入し、次式の線形化された非定常ベルヌーイの式で表される⁽¹⁵⁾。

* 原稿受付 平成2年9月13日。

*¹ 正員、慶應義塾大学大学院 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。*² 正員、慶應義塾大学理工学部。

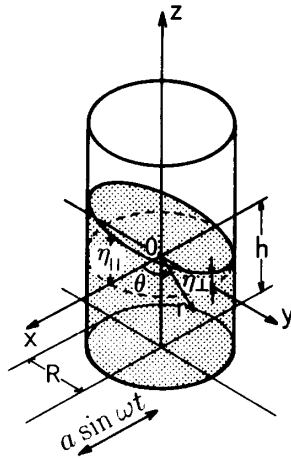


図1 解析モデル

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - gz + \frac{\mu_0 \chi_m H_0^2 e^{-2\alpha(z+h)}}{2\rho} \quad (1)$$

ここで、 ρ は磁性流体の密度、 p は圧力、 g は重力加速度、 z は静水面からの高さ、 h は水深である。磁化 M と磁場 H は平行かつ磁化率 χ_m が一定であると仮定し、印加磁場 H は、指数関数を用いて次式で表している。

$$H(z) = H_0 e^{-\alpha(z+h)} \quad (2)$$

ただし、 α は定数であり、 H_0 は $z = -h$ 、すなわち容器底面での平均磁場である。

一方、自由表面上の任意の点での液面上昇量を η とすると、自由表面の方程式は、 $z = \eta = f(r, \theta, t)$ である。この表面が大気に接し、波動によって大気は動かないものと仮定すると、自由表面上で $p = \text{const.} = p_0$ が成立する。ここで、 p_0 は大気圧である。すなわち、自由表面は一つの等圧面となる。ゆえに次式が成り立つ。

$$\left[\frac{Dp}{Dt} \right]_{z=\eta} = \left[\frac{\partial p}{\partial t} + v_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} \right]_{z=\eta} = 0 \quad (3)$$

式(3)に式(1)を代入すると

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + v_r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial t} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial t} + v_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} + v_z \left(g + \frac{\alpha \mu_0 \chi_m H_0^2 e^{-2\alpha(z+h)}}{\rho} \right) \right]_{z=\eta} = 0 \quad (4)$$

となり、さらに速度成分 $v_r = \partial \phi / \partial r$ 、 $v_\theta = \partial \phi / (r \partial \theta)$ 、 $v_z = \partial \phi / \partial z$ より、上式は

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial t} + \left(g + \frac{\alpha \mu_0 \chi_m H_0^2 e^{-2\alpha(z+h)}}{\rho} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=\eta} = 0 \quad (5)$$

となる。式(5)の第二、第三および第四項の微小量を省略し、 $\eta = 0$ と近似すると次式を得る。

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \left(g + \frac{\alpha \mu_0 \chi_m H_0^2 e^{-2\alpha h}}{\rho} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} = 0 \quad (6)$$

さて、円筒座標系における理想流体の基礎式は、連続の条件、壁側面における境界条件、底面における境界条件、および自由表面における境界条件の四つの式より以下のように記述できる。

(1) 連続の条件

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

(2) 壁側面に置ける境界条件

$$-\left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{r=R} = 0 \quad \text{at } r = R \quad (8)$$

(3) 底面における境界条件

$$-\left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=-h} = 0 \quad \text{at } z = -h \quad (9)$$

(4) 自由表面における境界条件

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g^* \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad (10)$$

ここで、 R は円筒容器半径、 g^* は磁場勾配による見かけの重力の項であり、次式で表される。

$$g^* = g + \frac{\alpha \mu_0 \chi_m H_0^2 e^{-2\alpha h}}{\rho} \quad (11)$$

さらに、表面張力および磁場の表面への影響を無視し、波の振幅が波長に比べて十分小さいと仮定し、式(7)を線形近似する。この線形近似された方程式を解く過程で以下の分散関係式が得られる。

$$\omega_{m,i} = \sqrt{\frac{g^* \epsilon_i}{R} \tanh \left(\epsilon_i \frac{h}{R} \right)} \quad (12)$$

ここで、 ϵ_i は $J_1(\epsilon)$ を一次の第1種ベッセル関数としたときの $J_1'(\epsilon) = 0$ の第 i 番目の正根であり、 $\omega_{m,i}$ は印加磁場下での i 次モードの固有角振動数である。また、式(12)は、印加磁場がない場合、理想流体の線形理論より求めた固有角振動数

$$\omega_{0,i} = \sqrt{\frac{g \epsilon_i}{R} \tanh \left(\epsilon_i \frac{h}{R} \right)} \quad (13)$$

と一致する。

3. 実験装置および実験方法

実験装置の概略を図2に示す。供試流体には、水および水ベース磁性流体W-35（タイホー工業(株)製）を用いた。試験容器は、アクリル板で製作した幅94mm、高さ300mm、奥行き24mmの矩形容器、直径94mm、高さ300mmの円筒容器および直径94mmの球形容器である。試験容器を加振台に固定し、無段変速モータの回転運動をクランク式加振機により水平運動に変え、水平加振した。モーター付属の周波数コントローラーにより、加振振動数を順次上げて行き、静止状態で無磁

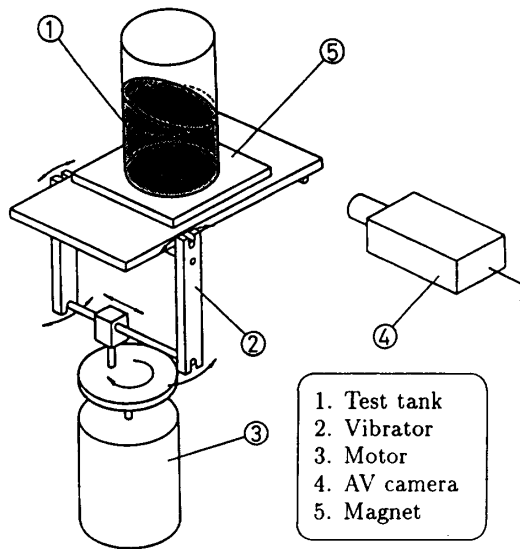


図2 実験装置の概略図

場での容器壁における液面位置を基準に、そこから上方の液面変位を目視により測定した。そして、液面応答が加振とともに急激に成長し、液面変位が最大となる時の振動数をスロッシングの共振振動数とした。また、液面状態をAVカメラで撮影し、ビデオの静止画面から動揺状態を観察した。フェライト磁石の磁化が同方向になるように接着した磁石板を容器下部に置き、無磁場での静水面に対して垂直に磁場を印加した。すなわち、磁石は試験容器と同時に水平加振される。また、磁場強度は磁石板を重ねることにより変化させた。

4. 実験結果および検討

4・1 矩形容器の周波数応答 矩形容器における磁性流体の液面変位の周波数応答に対する磁場の効果を図3に示す。ここでは水との比較のため、水での共振角振動数 ω_{water} を用いて、横軸は無次元振動数 $\omega/\omega_{\text{water}}$ を、縦軸は無次元液面変位 η/h を表している。加振振幅は $a = 2\text{mm}$ で、無次元水深 $h/L = 1.0$ および $h/L = 0.5$ の結果を表している。ただし、 L は容器幅である。なお、図中の B_0 は容器下部での磁束密度を表す。

周波数をゼロより上げていくと液面変位は上昇し、第一固有角振動数近傍において加振方向に激しい崩壊波を形成し共振を起こした。図3より、最大液面変位での振動数を一次モードの共振振動数とすると、磁場の強さの増加と共に共振振動数が高振動数側へ移行しているのがわかる。水深の違いで比較すると、水深が深い($h/L = 1.0$)方が共振振動数の移行が小さい。こ

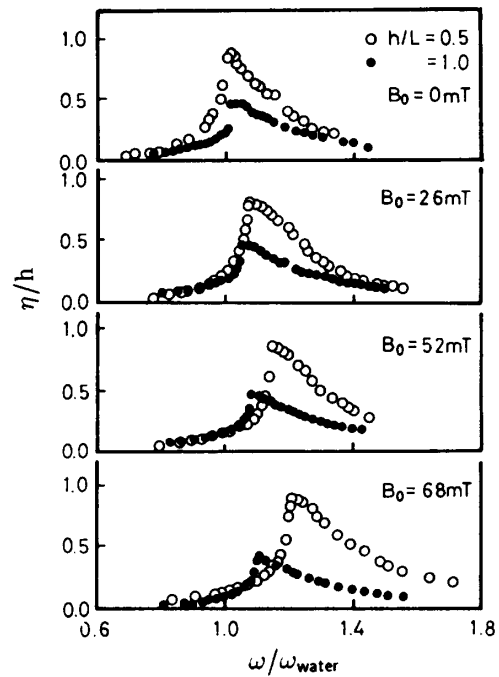


図3 印加磁場下での矩形容器における液面変位の周波数応答 (磁性流体)

れは印加磁場が式(2)で示されるように z に依存する磁場であるため、水深が深いほど磁場の影響が小さくなるためである。

4・2 円筒容器の周波数応答 円筒形あるいは球形貯槽のような軸対称の形状を持つ液体貯槽内では、水平一方向に加振されているにもかかわらず、加振方向とは無関係に内部液体の波頭が鉛直軸回りに不規則な回転運動(スワリング現象)を起こすことが知られている⁽⁶⁾。

図4に円筒容器における水の液面変位の周波数応答を示す。振幅は $a = 2\text{mm}$ 、水深は $h/D = 0.5$ である。ただし、 D は容器直径である。スワリング現象を調べるため図1に示される円筒容器の加振方向面($x=0$

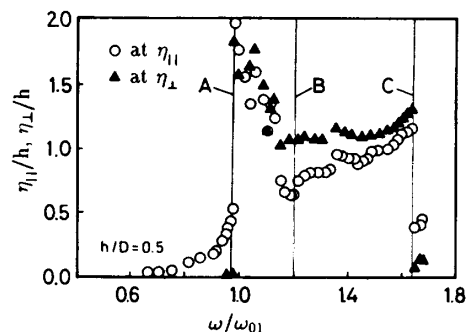


図4 円筒容器における液面変位の周波数応答 (水)

面)および直交方向面($y=0$ 面)における最大液面変位($\eta_{\perp}$ および $\eta_{\parallel}$)を測定した。周波数をゼロより上げていくと液面変位は上昇し、第一固有角振動数近傍において加振方向に激しい崩壊波を形成し、共振を起こした(図4 A)。崩壊波は液体内に気体を持ち込み、これによって液面動揺の規則性が乱され、ただちに崩壊波を伴った不規則な回転運動(不安定スワリング)に移った。このとき、回転の方向は一方向でなく、時計方向あるいは反時計方向のどちらにも起こった。また、一度ある方向に回転し始めたものが途中で一度停止し、それから逆方向に回転し始める場合もあった。この不安定スワリングによる液面上昇は、周波数の増加とともに減少し(図4 A~B)、やがて安定な一方向の旋回運動(安定スワリング)へと移った。そして周波数の増加に伴い回転の勢が増し、スワリングの最大液面変位を示した後、液面変位は急激に減少し、二次モードの液面挙動へと移行した(図4 C)。この安定スワリングの様子を図5に示す。

スワリングの発生機構は、理論的にはある加振面内の振動に関する応答曲線上での不安定特異点の存在を示唆するもので、加振方向成分の振動から直交方向成分が分岐成分として発生するものと考えられる⁽⁶⁾。そして、この不安定特異点は一次モードの振動では共振角振動数(図4 A)および液面変位が急激に減少した振動数(図4 C)の2ヶ所に存在すると考えられる。

次に容器下部より垂直磁場を印加した場合の液面挙動の周波数応答を図6に示す。磁場の作用していない場合($B_0=0\text{mT}$)、各応答値とも水の固有角振動数($\omega/\omega_{\text{water}}=1.0$)近傍で大きく動揺し、水の場合と同様の液面変位の様相を示した。ただし、二次モードに移る第二特異点は低周波数側にずれて現れている。

磁場を印加した場合、磁場の強さの増加と共に共振

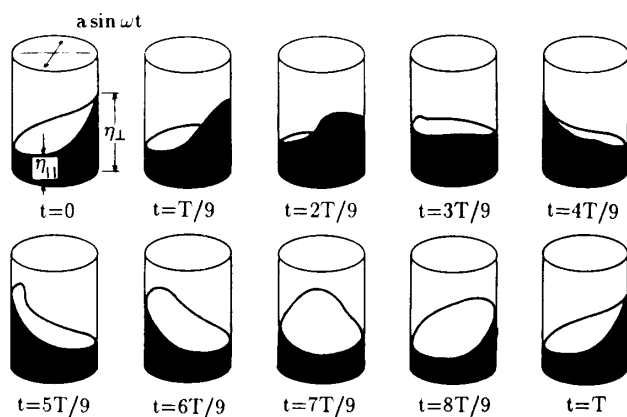


図5 円筒容器内液面挙動の時間的变化

振動数が高振動数側へ移行している。さらにスワリングにおける不安定特異点も、磁場の強さの増加に伴い高振動数側へと移行し、スワリング領域が拡大している。この共振振動数の移行は式(11)で示した見かけの重力の増加によるものである。また、安定なスワリング現象が見かけの重力効果で抑えられているため、スワリング領域が拡大したと考えられる。

式(12)より固有角振動数は水深 h に依存する。そこで、水深に対する共振角振動数の変化を図7に示す。ここで、プロット点は実験値であり、実線、一点鎖線、二点鎖線および破線は式(12)より得られた理論値である。磁場の作用していない場合、水および磁性流体の実験値はほぼ一致しているため、両者の線形理論値は同じ実線で示した。図7より実験値と理論値は定性的に一致しているが、定量的な一致は見られない。そこで、 $h/D=1.0$ での磁性流体(無磁場)の共振角振動数 ω_s 、水深 h および式(11)の見かけの重力 g^* を用いて次のような半実験式をたてた。

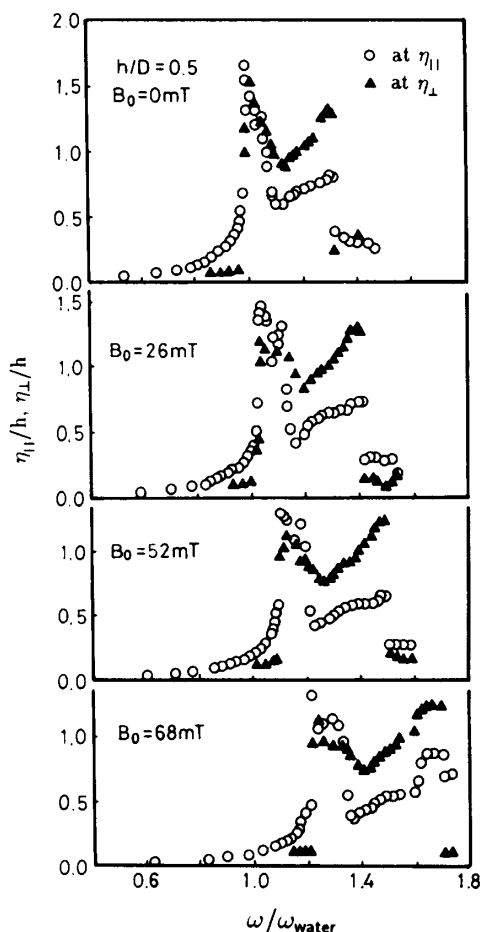
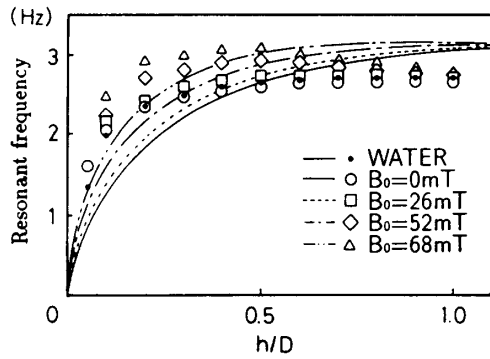
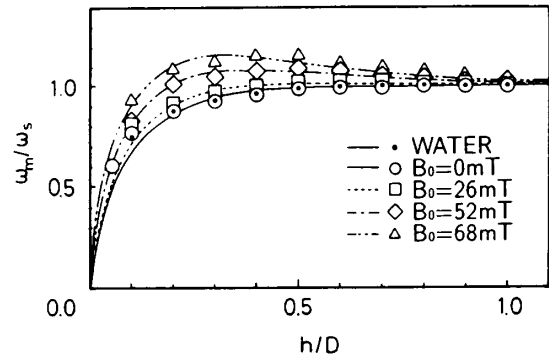


図6 印加磁場下での円筒容器における液面変位の周波数応答(磁性流体)


 図7 円筒容器の水深と共振振動数の関係
(線形理論と実験値の比較)

 図8 円筒容器の水深と共振振動数の関係
(実験式との比較)

$$\omega_m = \omega_s \sqrt{\frac{g^*}{g} \tanh nh} \quad (14)$$

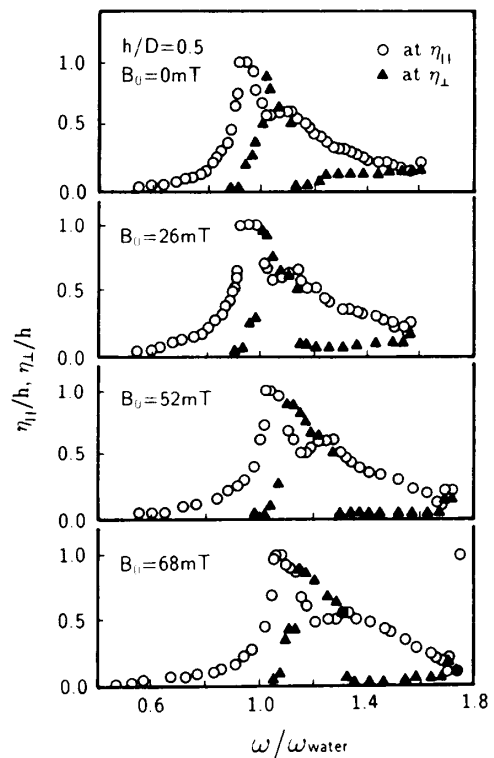
ただし、 n は実験より得られる定数であり、 $n=53.20$ である。式(14)を用いて実験値と比較したのが図8である。ここで、 g^* を g とすれば式(14)は無磁場での実験値とほぼ一致する。図8より磁場作用下においても式(14)の実験式は実験値と比較的によく一致しているのがわかる。印加磁場下では、実験値は水深が浅いところでは磁場の効果が大きく共振振動数の差も大きい。そして、水深が深くなるにしたがい磁場の効果が弱まり、共振振動数の変化は小さくなる。これらより、磁性流体の固有振動数は式(11)のように、重力加速度に磁場の項を加えた見かけの重力に依存することがわかる。

以上の線形理論では、貯槽が受ける動揺がかなり大きい場合や共振に近い液体運動が貯槽に及ぼす動圧などは、必ずしも十分に説明できない。しかし、この線形理論は磁性流体の挙動を調べるにあたり、有効な手段の一つであると考えられる。

4・3 球形容器の周波数応答 円筒容器と同一の実験条件下で、液面変位の周波数応答に対する磁場の効果を図9に示す。周波数をゼロより上げていくと液面変位は上昇し、第一主固有角振動数近傍において加振方向に激しい崩壊波を形成し共振を起こした。このとき不安定スワリングが生じるが、円筒容器の場合ほど液面動揺の規則性が乱されず、円筒容器の場合とは逆に加振周波数の増加とともに側面の液面変位は上昇した。これは、加振方向の液面振動から垂直方向の液面振動に変わりつつあることを示している。そして、安定スワリング領域では円筒容器の場合とは逆に、周波数の増加に伴い側面の液面変位が減少する傾向を示している。これは、加振方向の振幅が強まり垂直方向の加振が弱まったためである。共振振動数は円筒容器と同様、磁場の強さの増加と共に高振動数側へ移行

している。これも円筒容器と同様、磁場による見かけの重力が増したためである。しかし、スワリング領域は円筒容器の場合に比べると広がり小さい。

図10に水深と共振角振動数の関係を示す。球形容器の場合、円筒容器の場合とは水深による共振周波数応答が異なっている。これは水深による液面動揺の様相に差異があるためである。球形容器における磁性流体の液面動揺形態を水深の違いによって次の三つの動揺パターンに分けて示す(図11)。


 図9 印加磁場下での球形容器における
液面変位の周波数応答(磁性流体)

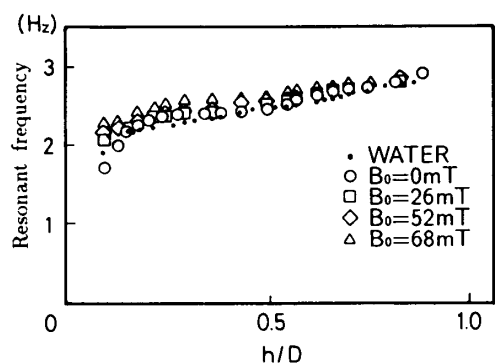


図 10 球形容器の水深と共振周波数の関係

- (a) $h/D < 0.3$ の場合 液体は比較的、静止時の形状を保ったまま滑るように運動した。磁性流体の場合、液体の表面はほとんど平面を保って乱れを生じない。ただし、印加磁場下では表面にスパイク現象が生じた。また、円筒容器の場合と同様に共振点において不安定なスワリングが発生した。
- (b) $0.3 < h/D < 0.8$ の場合 (a) で観測された、表面が平面として動揺する一次モードと、表面が細かく動揺する高次モードとが重なり複雑な動揺パターンを示した。また、共振点において不安定スワリングは発生しにくい傾向があった。このパターンは $h/D=0.5$ 付近でもっとも顕著であった。また、印加磁場時の表面のスパイクはわずかに現れるだけで水深が増すにつれ小さくなった。
- (c) $0.8 < h/D$ の場合 液体の先端が壁面に沿って上側に持ち上がる球形容器特有の動揺パターンを示した。表面形状は (a) の場合よりも安定であった。そして、不安定スワリングは発生せず、共振の後、安定スワリング現象へと移った。また、スパイク現象はほとんど生じなかった。

これらより、液面の動揺パターンが共振周波数応答に影響していると考えられる。また、球形容器では不安定スワリング領域は水深に依存していることがわかった。

5. 結 言

水平振動する矩形容器、円筒容器および球形容器内の磁性流体に、容器下部より垂直磁場を印加した場合の液体自由表面の挙動を実験的に調べた結果、以下のことが明らかとなった。

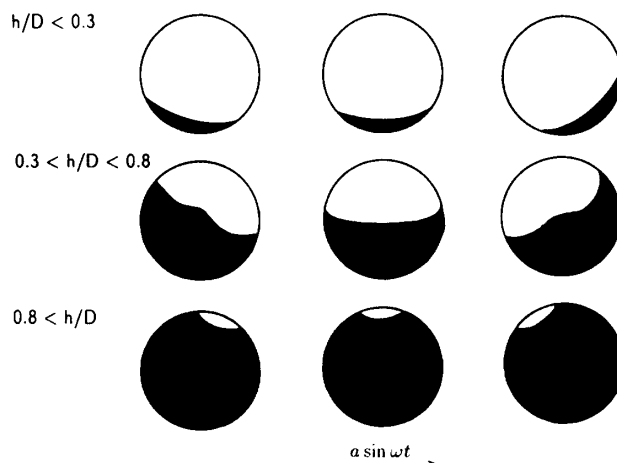


図 11 球形容器内の液面挙動

- (1) 垂直磁場を印加することにより、共振角振動数は磁場の強さの増加に伴い高振動数側へ移行する。
- (2) 軸対称容器では固有角振動数近傍でスワリングが生じ、スワリングの不安定特異点も磁場の強さの増加につれて高振動数側へと移行する。また、スワリングの発生する領域が拡大する。
- (3) 線形理論から求めた磁場による見かけの重力の効果は共振振動数の移行を定性的に説明できた。
- (4) 球形容器における液面の動揺パターンは共振角振動数に影響をおよぼす。

最後に、本研究の一部に対して倉田奨励金およびゼネラル石油研究奨励助成金の補助を受けたことを記して謝意を表する。

文 献

- (1) NASA SP-8009 (1968).
- (2) 橋本, 機誌, 89-810 (1986), 48.
- (3) Senda, K. and Nakagawa, K., Tech. Rep. Osaka Univ., 117-4 (1954), 247.
- (4) Housner, G.W., Bull. Seismol. Soc. Am., 47-1 (1957), 15.
- (5) 木村・大橋, 機論, 44-385 (1978), 3024.
- (6) 大森・ほか 3 名, 日本建築学会大会学術講演梗概集, (1986), 245.
- (7) 大森・ほか 3 名, 日本建築学会構造系論文報告集, 385 (1988), 69.
- (8) Charles, S.W. and Rosensweig, R.E., J. Magn. Magn. Mat., 39, 1-2 (1983), 190.
- (9) Sudo, S., Hashimoto, H. and Katagiri, K., J. Magn. Magn. Mat., 85, 1-3 (1990), 159.
- (10) Okubo, M. et al., J. Magn. Magn. Mat., 85, 1-3 (1990), 163.
- (11) Kikura, H. et al., J. Magn. Magn. Mat., 85, 1-3 (1990), 167.
- (12) Zelazo, R.E. and Melcher, J.R., J. Fluid Mech., 39 (1969), 1.
- (13) Sudo, S. et al., J. Magn. Magn. Mat., 65, 2-3 (1987), 219.
- (14) 須藤・ほか 3 名, 機論, 53-495, B (1987), 3242.
- (15) 志澤・棚橋, 機論, 52-473, B (1986), 325.