

odd. Similarly, if the ordinates are

$$\begin{array}{cccc}
 z_{0, \frac{1}{2}} & z_{1, \frac{1}{2}} & z_{2, \frac{1}{2}} & \dots z_{m, \frac{1}{2}} \\
 z_{0, \frac{3}{2}} & z_{1, \frac{3}{2}} & z_{2, \frac{3}{2}} & \dots z_{m, \frac{3}{2}} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 z_{0, n-\frac{1}{2}} & z_{1, n-\frac{1}{2}} & z_{2, n-\frac{1}{2}} & \dots z_{m, n-\frac{1}{2}}
 \end{array}$$

the factors of m may be odd or even, but the factors of n must only be odd. The coefficients by which the respective ordinates are to be multiplied in this latter case are

$$\begin{array}{cccccc}
 \frac{1}{2} & 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{1}{2} \\
 \frac{1}{2} & 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{1}{2} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 \frac{1}{2} & 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{1}{2}
 \end{array}$$

Second Complément à l'Analysis Situs. Par H. POINCARÉ. Read at request of the President, June 14th, 1900, and received June 30th, 1900.

Introduction.

J'ai publié dans le *Journal de l'Ecole Polytechnique* (Tome c, N° 1) un travail intitulé "Analysis Situs"; je me suis occupé une seconde fois du même problème dans un mémoire portant pour titre "Complément à l'Analysis Situs," et qui a été imprimé dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (Tome XIII, 1899).

Cependant la question est loin d'être épuisée, et je serai sans doute forcé d'y revenir à plusieurs reprises. Pour cette fois, je me bornerai à certaines considérations qui sont de nature à simplifier, à éclaircir et à compléter les résultats précédemment acquis.

Les renvois portant simplement une indication de paragraphe ou de page se rapporteront au premier mémoire, celui du *Journal de l'Ecole Polytechnique*; les renvois où ces indications seront précédées de la lettre c se rapporteront au mémoire des *Rendiconti*.

Quant aux renvois aux paragraphes du présent mémoire, je les ferai précéder des lettres 2 c.

1. Rappel des principales Définitions.

Considérons une variété fermée à p dimensions. Nous supposons que cette variété a été subdivisée de manière à former un polyèdre P à p dimensions. Les éléments de ce polyèdre s'appelleront les a_i^p ; ils seront séparés les uns des autres par des variétés à $p-1$ dimensions qui s'appelleront les a_i^{p-1} ; celles-ci seront séparées les unes des autres par des variétés à $p-2$ dimensions qui s'appelleront les a_i^{p-2} ; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive aux sommets du polyèdre qui s'appelleront les a_i^0 .

Toutes ces variétés seront simplement connexes, c'est-à-dire homéomorphes à l'hypersphère.

Si une variété a_i^q a pour frontière complète les a_j^{q-1} , j'écrirai la congruence

$$(1) \quad a_i^q \equiv \sum \epsilon_{ij}^q a_j^{q-1},$$

où les ϵ sont égaux à 0, +1 ou -1 (c, § 2, p. 7).

Nous écrirons d'autre part l'homologie

$$(2) \quad \sum \epsilon_{ij}^q a_j^{q-1} \sim 0.$$

Nous combinerons les congruences (1) et les homologies (2) par addition, soustraction, multiplication, et quelquefois par division.

Parmi les congruences entre a_i^q et a_j^{q-1} obtenues par la combinaison des congruences (1), nous distinguerons celles qui ne contiennent que des a_i^q , et d'où les a_j^{q-1} ont disparu.

Nous désignerons quelquefois les a_i^0 sous le nom de *sommets*, les a_i^1 sous celui d'*arêtes*, les a_i^2 sous celui de *faces*, les a_i^3 sous celui de *cases*, les a_i^4 sous celui d'*hypercases*.

Au polyèdre P correspond un polyèdre réciproque P' (c, § 7), dont j'appellerai les éléments b_i^p au lieu de a_i^p , b_i^{p-1} au lieu de a_i^{p-1} , ..., et enfin b_i^0 au lieu de a_i^0 .

Entre les deux polyèdres, il y a une correspondance telle que b_i^{p-q} correspond à a_i^q . Les deux polyèdres proviennent de la subdivision d'une même variété V .

Entre les éléments de P' , nous avons les congruences

$$(1 \text{ bis}) \quad b_i^q = \sum \epsilon_{ji}^{p-q+1} b_j^{q-1}$$

analogues aux congruences (1) ; nous pouvons l'écrire également

$$b_i^q = \sum \epsilon_{ij}^q b_j^{q-1},$$

en posant

$$\epsilon_{ji}^{p-q+1} = \epsilon_{ij}^q.$$

Entre les éléments de P et ceux de P' , nous avons encore une autre relation.

Rappelons la notation $N(V, V')$ (§ 9, p. 38). Nous aurons alors

$$N(a_i^q, b_i^{p-q}) = 0,$$

si i n'est pas égal à k , et

$$N(a_i^q, b_i^{p-q}) = \pm 1.$$

Il reste à voir si l'on doit prendre le signe + ou le signe —.

Pour nous en rendre compte, considérons deux éléments correspondants de P et de P' que j'appellerai a_i^q et b_i^{p-q} ; considérons d'autre part deux éléments correspondants a_j^{q-1} et b_j^{p-q+1} de telle façon que a_j^{q-1} appartienne à a_i^q , et b_i^{p-q} à b_j^{p-q+1} .

Je pourrai toujours choisir mes coordonnées de telle façon que les équations de a_i^q soient

$$(3) \quad F_1 = F_2 = \dots = F_{p-q} = 0,$$

les F étant des fonctions de coordonnées y_1, y_2, \dots, y_p , qui définiront la position d'un point sur la variété V .

Soient de même

$$(4) \quad \phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_{q-1} = 0$$

les équations de b_j^{p-q+1} ; je pourrai alors supposer que les équations de a_j^{q-1} s'obtiennent en adjoignant aux équations (1) l'équation $\psi = 0$, et que celles de b_i^{p-q} s'obtiennent en adjoignant aux équations (2) l'équation $\psi = 1$. Je pourrai m'arranger pour que la même fonction ψ figure au premier membre de ces deux équations.

Alors parmi les inégalités, qui avec les égalités (1) complètent la définition de a_i^q , devra figurer l'inégalité

$$\psi > 0.$$

De même parmi les inégalités, qui avec les égalités (2) complètent la définition de b_j^{p-q+1} , devra figurer l'inégalité

$$\psi < 1.$$

Si nous voulons que ϵ_{ij}^q soit égal à +1, il faut d'après nos conventions que les équations de a_j^{q-1} se mettent dans l'ordre suivant :—

$$F_1 = F_2 = \dots = F_{p-q} = \psi = 0;$$

et si nous voulons en même temps que $\epsilon_j^{p-q+1} = +1$, il faut que les équations de b_i^{p-q} se mettent dans l'ordre suivant :—

$$\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_{q-1} = 1 - \psi = 0.$$

Le nombre $N(a_i^q, b_i^{p-q})$ dépend du signe du déterminant fonctionnel de

$$F_1, F_2, \dots, F_{p-q}, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{q-1}, 1 - \psi.$$

De même le nombre $N(a_j^{q-1}, b_j^{p-q+1})$ dépend du signe du déterminant fonctionnel de

$$F_1, F_2, \dots, F_{p-q}, \psi, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{q-1}.$$

Nous pouvons toujours supposer que les fonctions F , ϕ et ψ aient été choisies de telle sorte que ces déterminants ne s'annulent pas dans le domaine considéré.

Nous voyons alors que les deux déterminants sont de même signe si q est pair, et de signe contraire si q est impair.

Nous aurons dans le premier cas

$$N(a_i^q, b_i^{p-q}) = N(a_j^{q-1}, b_j^{p-q+1}),$$

et dans le second cas

$$N(a_i^q, b_i^{p-q}) = -N(a_j^{q-1}, b_j^{p-q+1}).$$

Comme nous pourrions toujours supposer

$$N(a_i^0, b_i^p) = +1,$$

nous trouverons successivement

$$N(a_i^1, b_i^{p-1}) = -1, \quad N(a_i^2, b_i^{p-2}) = -1, \quad N(a_i^3, b_i^{p-3}) = +1, \\ N(a_i^4, b_i^{p-4}) = +1, \quad \dots$$

La seule chose à retenir, c'est que le nombre $N(a_i^q, b_i^{p-q})$ ne dépend que de q .

Cela posé, on peut former avec les nombres ϵ_j^i un tableau que j'appellerai T_q , et où le nombre ϵ_j^i occupera la i^{e} ligne et la j^{e} colonne. Dans ce tableau T_q il y aura donc autant de lignes que de a_i^q et de colonnes que de a_j^{q-1} .

J'ai appelé α_q le nombre des a_i^q de sorte que le tableau T_q aura α_q lignes et α_{q-1} colonnes. En particulier, le tableau T_1 nous donnera la relation entre les arêtes et les sommets, le tableau T_2 entre les faces et les arêtes, etc.

J'appellerai T'_q le tableau qui est formé avec P' , comme T_q avec P . Nous voyons que le tableau T'_q s'obtient en partant du tableau T_{p-q+1} , permutant les lignes avec les colonnes, et réciproquement.

Nous avons désigné (c, § 3, p. 14) par $\alpha_q - \alpha'_q$ le nombre des homologies distinctes entre les a_i^q , et par $\alpha_q - \alpha''_q$ le nombre des congruences distinctes entre les a_i^q (les a_i^{q-1} étant éliminés) ; par

$$P_q = \alpha'_q - \alpha''_q + 1$$

le nombre de Betti correspondant aux a_i^q .

Nous avons appelé β_q, β'_q et β''_q les nombres analogues à α_q, α'_q et α''_q , et se rapportant au polyèdre P' , de telle sorte que

$$\beta_q = \alpha_{p-q}.$$

2. Réduction des Tableaux.

Considérons un tableau T formé de nombres entiers rangés en un certain nombre de lignes et de colonnes. Tels sont nos tableaux T_q .

Supposons que l'on puisse faire sur ce tableau les opérations suivantes :—

- 1° Ajouter une colonne à une autre ou l'en retrancher ;
- 2° Permuter deux colonnes et changer le signe de l'une d'elles ;
- 3° Faire les mêmes opérations sur les lignes.

En combinant ces opérations, on pourra faire subir aux colonnes une substitution linéaire quelconque pourvu que les coefficients soient entiers et le déterminant égal à 1. De même pour les lignes.

Quel est, par le moyen de ces opérations, le plus grand degré de simplicité auquel on puisse réduire un tableau ?—C'est ce que nous allons examiner.

Supposons d'abord, pour fixer les idées, que le tableau T n'ait pas plus de lignes que de colonnes.

Lemme I.—Soit

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}$$

un tableau T que je suppose, pour fixer les idées, de trois lignes et de cinq colonnes.

Je suppose que les quinze nombres a, b, c soient premiers entre eux ; je dis qu'on pourra toujours trouver trois nombres $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, tels que les cinq nombres

$$h_{1i} = \alpha_i a_i + \beta_i b_i + \gamma_i c_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

soient premiers entre eux.

Pour cela les nombres $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ doivent d'abord remplir une première

condition: ils doivent être premiers entre eux. Si cette condition est remplie, on pourra trouver six autres nombres

$$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3,$$

tels que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Posons alors

$$h_{ki} = \alpha_k a_i + \beta_k b_i + \gamma_k c_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5; k = 1, 2, 3).$$

Soit

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

la règle de la multiplication des déterminants nous donnera

$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta.$$

Ce qui montre que le plus grand commun diviseur des trois nombres h_{11}, h_{12}, h_{13} , et par conséquent celui des cinq nombres h_{1i} , divise Δ . Il doit diviser de même tous les déterminants obtenus en supprimant deux colonnes dans le tableau, et par conséquent le plus grand commun diviseur, M , de tous ces déterminants.

Soit p un facteur premier quelconque de M . Comme nos quinze nombres a, b, c sont premiers entre eux, l'un d'eux au moins, par exemple c_3 , ne sera pas divisible par p .

Si nous prenons alors

$$(1) \quad \alpha_1 \equiv 0, \quad \beta_1 \equiv 0, \quad \gamma_1 \equiv c_3^{p-2} \pmod{p},$$

il viendra

$$h_{13} \equiv c_3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

de sorte que le plus grand commun diviseur des cinq nombres h_{1i} , ne sera pas divisible par p .

Nous obtiendrons un système de congruences analogues à (1) pour chacun des facteurs premiers de M . On pourra satisfaire à la fois à toutes ces congruences puisqu'elles ont lieu par rapport à des modules premiers différents.

Alors le plus grand commun diviseur des cinq nombres h_{1i} , ne sera

divisible par aucun des facteurs premiers de M ; et, comme il doit diviser M , il sera égal à 1.

1^{re} Corollaire.—Si l'on fait subir aux lignes du tableau la substitution linéaire

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3, \end{array}$$

il est clair que les éléments de la 2^e colonne qui étaient

$$a_i, \quad b_i, \quad c_i$$

deviendront

$$h_{1i}, \quad h_{2i}, \quad h_{3i},$$

d'où cette conséquence :

Si les éléments du tableau sont premiers entre eux, on peut réduire le tableau de telle sorte que les éléments de la première ligne soient premiers entre eux.

2^e Corollaire.—Si les éléments du tableau ont pour plus grand commun diviseur δ , on peut réduire le tableau de telle sorte que les éléments de la première ligne aient pour plus grand commun diviseur δ .

Théorème.—Soit m le nombre des colonnes et n celui des lignes ($m \geq n$); soit M_0 le plus grand commun diviseur de tous les déterminants obtenus en supprimant dans le tableau $m-n$ colonnes quelconques; soit M_1 le plus grand commun diviseur de tous les déterminants obtenus en supprimant dans le tableau $m-n+1$ colonnes et une ligne; soit M_2 celui des déterminants obtenus en supprimant $m-n+2$ colonnes et deux lignes, etc.; soit enfin M_{n-1} celui des déterminants obtenus en supprimant $m-1$ colonnes et $n-1$ lignes, c'est-à-dire en d'autres termes celui de tous les éléments.

Ces nombres M_0, M_1, \dots, M_{n-1} ne seront pas altérés par les opérations faites soit sur les lignes, soit sur les colonnes.

Il va sans dire que le nombre M_k devrait être considéré comme nul si tous les déterminants correspondants étaient nuls.

Nous pourrions alors énoncer notre corollaire sous la forme suivante :—

3^e Corollaire.—On peut réduire le tableau de telle sorte que le plus grand commun diviseur des éléments de la première ligne soit M_{n-1} .

Lemme II.—On peut, par une transformation entre les colonnes, réduire le tableau de telle sorte que le premier élément de la première

ligne devienne M_{n-1} , et que tous les autres éléments de la première ligne deviennent nuls.

Nous allons faire subir, en effet, aux colonnes (supposées comme plus haut au nombre de $m = 5$) la substitution linéaire

$$(2) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_1 & \dots & \dots & \dots & \beta_5 \\ \gamma_1 & \dots & \dots & \dots & \gamma_5 \\ \delta_1 & \dots & \dots & \dots & \delta_5 \\ \zeta_1 & \dots & \dots & \dots & \zeta_5 \end{pmatrix},$$

dont le déterminant doit être égal à 1. Soient

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$$

les éléments de la première ligne. Après les réductions que le tableau a déjà subies, le plus grand commun diviseur de ces cinq nombres est devenu M_{n-1} . Nous pouvons alors choisir la substitution (2) de telle sorte que l'on ait

$$\sum \alpha_i a_i = M_{n-1}, \quad \sum \beta_i a_i = \sum \gamma_i a_i = \sum \delta_i a_i = \sum \zeta_i a_i = 0.$$

Alors, après la transformation, les éléments de la première ligne seront

$$M_{n-1}, 0, 0, 0, 0.$$

Lemme III.—Je dis maintenant qu'on peut, par une transformation entre les lignes, réduire à zéro tous les éléments de la première colonne, sauf le premier qui reste égal à M_{n-1} .

En effet, après les réductions déjà faites, les éléments de la première colonne (supposés au nombre de $n = 3$) sont

$$M_{n-1}, q_2 M_{n-1}, q_3 M_{n-1},$$

q_2 et q_3 étant des entiers; et en effet, d'après nos hypothèses, tous nos éléments sont divisibles par M_{n-1} .

Si alors nous retranchons de la seconde ligne la première ligne multipliée par q_2 , et de la troisième ligne la première ligne multipliée par q_3 , la première colonne devient

$$M_{n-1}, 0, 0.$$

D'ailleurs la première ligne ne change pas.

Si l'on supprimait maintenant la première ligne et la première colonne du tableau T , il resterait un tableau T' de $m-1$ colonnes et de $n-1$ lignes, par rapport auquel les nombres

$$\frac{M_0}{M_{n-1}}, \frac{M_1}{M_{n-1}}, \dots$$

joueraient le même rôle que les nombres M_0, M_1, \dots par rapport au tableau T .

En particulier,

le plus grand commun diviseur des éléments de T' est $\frac{M_{n-2}}{M_{n-1}}$.

Nous pouvons maintenant continuer la réduction, mais en opérant seulement sur les $m-1$ dernières colonnes et sur les $n-1$ dernières lignes. La première ligne ne changera plus puisque ses $m-1$ derniers éléments sont nuls, ni la première colonne non plus puisque ses $n-1$ derniers éléments sont nuls.

On pourra opérer sur le tableau T' comme nous avons opéré sur le tableau T . Après cette nouvelle réduction :

1° Tous les éléments de la première ligne et ceux de la première colonne sont restés nuls, sauf le premier élément de la première ligne et de la première colonne qui est resté égal à M_{n-1} .

2° Tous les éléments de la seconde ligne et ceux de la seconde colonne sont devenus nuls, sauf le second élément de la seconde ligne et de la seconde colonne qui est devenu $\frac{M_{n-2}}{M_{n-1}}$.

3° Si on supprime les deux premières lignes et les deux premières colonnes, on obtient un tableau T'' de $m-2$ colonnes et de $n-2$ lignes, par rapport auquel les nombres

$$\frac{M_0}{M_{n-2}}, \frac{M_1}{M_{n-2}}, \dots, \frac{M_{n-3}}{M_{n-2}}$$

jouent le même rôle que les nombres M_0, M_1, \dots, M_{n-1} par rapport au tableau T . Et ainsi de suite.

A la fin de la réduction, l'élément qui appartient à la i° ligne et à la j° colonne est nul si i n'est pas égal à j ; l'élément qui appartient à la i° ligne et à la i° colonne est égal à $\frac{M_{n-i}}{M_{n-i+1}}$.

Les n nombres

$$(3) \quad M_{n-1}, \frac{M_{n-2}}{M_{n-1}}, \frac{M_{n-3}}{M_{n-2}}, \dots, \frac{M_1}{M_2}, \frac{M_0}{M_1}$$

peuvent s'appeler les *invariants* du tableau T .

On peut remarquer :

- 1° Que chacun de ces invariants divise le suivant ;
- 2° Que quelques-uns de ces invariants peuvent être nuls, mais que, si l'un d'eux l'est, tous ceux qui le suivent le sont également.

Si le tableau T avait plus de lignes que de colonnes, la réduction se ferait de la même manière, seulement il faudrait intervertir le rôle des lignes et des colonnes.

On aurait alors $m < n$; le nombre M_0 serait le plus grand commun diviseur des déterminants obtenus en supprimant $n-m$ lignes; en général, M_i serait le plus grand commun diviseur des déterminants obtenus en supprimant $n-m+i$ lignes et i colonnes quelconques. Enfin, le plus grand commun diviseur des éléments du tableau T serait M_{m-1} .

En général, le nombre des invariants serait le plus petit des deux nombres n et m .

3. Comparaison des Tableaux T_q et T'_q .

Le tableau T_q nous fait connaître les relations entre les a_i^q et les a_j^{q-1} dans le polyèdre P . A chaque ligne de ce tableau correspond un a_i^q et à chaque colonne un a_j^{q-1} . A chaque ligne de ce tableau correspond également une congruence

$$(1) \quad a_i^q \equiv \sum \epsilon_{ij}^q a_j^{q-1}$$

entre les a_i^q et les a_j^{q-1} et une homologie

$$(2) \quad \sum \epsilon_{ij}^q a_j^{q-1} \sim 0$$

entre les a_j^{q-1} .

Qu'arrivera-t-il maintenant si, par les opérations du paragraphe précédent, on réduit le tableau T_q ?—A chaque ligne du tableau réduit correspondra une combinaison linéaire des a_i^q , à chaque colonne une combinaison linéaire des a_j^{q-1} . J'ai expliqué (c, § 8, p. 41) d'après quelles règles ces combinaisons linéaires doivent être formées. Voici comment ces règles peuvent être résumées.

Supposons que, pour passer du tableau T_q au tableau réduit, on applique aux lignes de T_q une certaine substitution linéaire S , et aux colonnes une autre substitution linéaire σ . Soit σ' la substitution contragrédiente de σ (je veux dire que, si l'on a deux séries de a_{q-1} variables x_i et y_i , et qu'on applique la substitution σ à la première série et la substitution σ' à la seconde, la forme $\sum x_i y_i$ ne devra pas être altérée).

Supposons alors que S change a_i^q en

$$c_i^q = \sum_{j=1}^{a_q} \lambda_{ij} a_j^q,$$

et que σ' change a_j^{q-1} en

$$d_i^{q-1} = \sum_{j=1}^{a_{q-1}} \mu_{ij} a_j^{q-1}.$$

Nous ferons correspondre à la i° ligne du tableau réduit la combinaison linéaire c_i^q , et à la i° colonne la combinaison linéaire d_i^{q-1} .

Dans notre tableau réduit, tous les éléments sont nuls, sauf ceux de la i° ligne et de la i° colonne, qui sont donnés d'après le paragraphe précédent par la formule

$$\frac{M_{n-i}}{M_{n-i-1}}$$

Je désignerai, pour abrégé, par ω_i^q cet élément de la i° ligne et de la i° colonne; et je conviendrai que ω_i^q doit être regardé comme nul, si i est plus grand que le plus petit des deux nombres α_q et α_{q-1} (nombre des lignes et nombre des colonnes).

A la i° ligne du tableau réduit correspondra alors la congruence

$$(1 \text{ bis}) \quad c_i^q \equiv \omega_i^q d_i^{q-1}$$

et l'homologie

$$(2 \text{ bis}) \quad \omega_i^q d_i^{q-1} \sim 0.$$

Les congruences et les homologies (1 bis) et (2 bis) peuvent se déduire des congruences et homologies (1) et (2) par addition, soustraction, multiplication, *mais sans division*, et réciproquement.

Si $\alpha_{q-1} > \alpha_q$, et si $i > \alpha_q$, ω_i^q est nul, de sorte que la congruence et l'homologie (1 bis) et (2 bis) se réduisent à

$$c_i^q \equiv 0 \quad \text{et} \quad 0 \sim 0.$$

Les nombres ω_i^q sont ce que j'ai appelé dans le paragraphe précédent les *invariants* du tableau T_q . Supposons que *parmi ces invariants il y en ait* γ_q *qui ne soient pas nuls*; on aura, bien entendu,

$$\gamma_q \leq \alpha_q, \quad \gamma_q \leq \alpha_{q-1}.$$

Parmi les congruences (1 bis), les γ_q premières contiendront à la fois c_i^q et d_i^{q-1} puisque ω_i^q ne sera pas nul. Au contraire, les $\alpha_q - \gamma_q$ dernières s'écriront

$$c_i^q \equiv 0,$$

et ne contiendront plus les d_i^{q-1} ; il est clair que toutes ces congruences sont distinctes, et qu'on obtient ainsi toutes les congruences entre les a_i^q d'où les a_i^{q-1} sont éliminés. On aura donc

$$a_q - a_q'' = \alpha_q - \gamma_q, \quad a_q'' = \gamma_q.$$

Maintenant, parmi les homologies (2 bis), les $\alpha_q - \gamma_q$ dernières se réduisent à des identités, mais les γ_q premières sont distinctes; on a donc

$$a_{q-1} - a_{q-1}' = \gamma_q,$$

d'où pour le nombre de Betti

$$P_q = \alpha_q - \gamma_{q+1} - \gamma_q + 1.$$

Comparons maintenant le tableau T_q au tableau correspondant T'_{p-q+1} relatif au polyèdre réciproque P' . Ce tableau, qui se déduit de T_q en permutant les lignes avec les colonnes, a $\beta_{p-q+1} = \alpha_{q-1}$ lignes et $\beta_{p-q} = \alpha_q$ colonnes. Le nombre γ_q est le même pour les deux tableaux, de sorte qu'il vient

$$\begin{aligned} \beta''_{p-q+1} &= \gamma_q = \alpha''_q, & \beta_{p-q} - \beta'_{p-q} &= \gamma_q, \\ \beta'_{p-q} &= \beta_{p-q} - \gamma_q = \alpha_q - \alpha''_q; \end{aligned}$$

d'où

$$\beta'_{p-q+1} = \alpha_{q-1} - \gamma_{q-1},$$

et pour le nombre de Betti P'_{p-q+1} relatif au polyèdre P'

$$P'_{p-q+1} = \beta'_{p-q+1} - \beta''_{p-q+1} + 1 = \alpha_{q-1} - \gamma_{q-1} - \gamma_q + 1.$$

Nous déduisons de là

$$P'_{p-q} = P_q,$$

ce qui, si l'on se rappelle que les nombres de Betti relatifs aux deux polyèdres réciproques P et P' sont les mêmes, montre que les nombres de Betti également distants des extrêmes sont égaux.

Revenons aux homologies (2 bis). Si l'on admet que l'on a le droit de diviser les homologies par un entier différent de zéro, les γ_q premières homologies nous donneront

$$d_i^{q-1} \sim 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \gamma_q),$$

et la plus générale des homologies entre les a_j^{q-1} s'écrira

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{\gamma_q} \lambda_i d_i^{q-1} \sim 0,$$

les λ_i étant des entiers quelconques. Si, au contraire, on n'admet pas que l'on ait le droit de diviser les homologies, l'homologie la plus générale s'écrira

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{\gamma_q} \lambda_i \omega_i^q d_i^{q-1} \sim 0,$$

les λ_i étant des entiers. Pour que les deux définitions des nombres de Betti (c, § 1, p. 2) coïncident, il faut, et il suffit, que les deux formules (3) et (4) concordent, c'est-à-dire que tous les invariants ω_i^q qui ne sont pas nuls soient égaux à 1 (c, § 9, p. 48).

Envisageons maintenant les combinaisons linéaires des a_j^{q-1} qui seraient homologues à zéro en vertu des homologies (3), et demandons-nous quelles sont parmi ces combinaisons celles qui restent distinctes,

si, abandonnant les homologies (3), on se borne aux homologies (4) sans admettre le droit de diviser les homologies.

Nous verrons tout de suite que le nombre de ces expressions qui sont ainsi distinctes est précisément le produit

$$\omega_1^q \omega_2^q \dots \omega_{q_4}^q.$$

Or, en se reportant aux notations du paragraphe précédent, on voit que ce produit n'est autre chose que l'un des nombres de la suite

$$M_0, M_1, M_2, \dots,$$

et précisément le premier nombre de cette suite qui n'est pas nul (c. § 9, p. 48).

Ce qui précède montre combien il importe de distinguer deux sortes de variétés.

Celles de la première sorte, que j'appellerai *variétés sans torsion*, seront celles pour lesquelles les invariants de tous les tableaux T_i sont tous égaux à 0 ou à 1; pour lesquelles, par conséquent, les deux formules (3) et (4) concordent et les deux définitions des nombres de Betti sont d'accord.

Celles de la seconde sorte, que j'appellerai *variétés à torsion*, seront celles pour lesquelles certains de ces invariants ne sont égaux ni à 0, ni à 1, et pour lesquelles, par conséquent, les deux définitions des nombres de Betti ne sont pas d'accord. Dans ce cas nous adopterons toujours, sauf avis contraire, la seconde définition (c. § 1).

Cette dénomination se justifie parce que la présence d'invariants plus grands que 1 est due, comme nous le verrons plus loin, à une circonstance assimilable à une véritable torsion de la variété sur elle-même.

4. Application à quelques Exemples.

Désireux d'appliquer ce qui précède aux exemples signalés dans l'“*Analysis Situs*” (p. 49, sqq.), je dois d'abord faire une distinction entre plusieurs sortes de polyèdres.

Les polyèdres ordinaires ou de la première sorte seront ceux dont tous les a_i^q sont des polyèdres simplement connexes (homéomorphes à des hypersphères) et tels que tous les éléments de ces a_i^q soient distincts; par exemple, dans l'espace ordinaire, le tétraèdre sera un polyèdre de la première sorte parce qu'il admet quatre faces qui sont des triangles et, par conséquent, des polygones simplement connexes (homéomorphes à des cercles), et que chacun de ces triangles a ses trois côtés distincts de même que ses trois sommets.

Les polyèdres de la seconde sorte seront ceux dont tous les a_i^q seront des polyèdres simplement connexes, mais tels que tous les éléments de ces a_i^q ne soient pas distincts. Soit, par exemple, dans l'espace ordinaire un tore; par un point A de la surface de ce tore menons un méridien et un parallèle. Ces deux coupures ne diviseront pas la surface du tore en deux régions, mais elles la rendront simplement connexe. Cette surface ainsi rendue simplement connexe sera homéomorphe à un rectangle, dont deux côtés opposés correspondraient aux deux lèvres de la coupure méridienne et les deux autres côtés aux deux lèvres de la coupure parallèle. Le tore forme ainsi une espèce de polyèdre qui n'a qu'une seule face; cette face est un quadrilatère; elle est donc simplement connexe; mais les quatre côtés de ce quadrilatère ne sont pas distincts, deux se confondent avec la coupure méridienne et deux avec la coupure parallèle; de même les quatre sommets ne sont pas distincts puisqu'ils se confondent tous les quatre avec le point A . Le polyèdre ainsi défini est donc un polyèdre de la seconde sorte.

Enfin, les polyèdres de la troisième sorte seront ceux dont tous les u_i^q ne sont pas simplement connexes.

Les propriétés des polyèdres de la première sorte s'étendent pour la plupart à ceux de la seconde sorte. Observons toutefois une différence. Dans un polyèdre de la première sorte, toute a_j^{p-1} sépare l'une de l'autre deux a_i^p , et n'appartient à aucun autre a_i^p . Par conséquent, dans chaque colonne du tableau T_p , il y aura un des nombres ϵ_{ij}^p qui sera égal à $+1$, un autre à -1 , et tous les autres à 0 .

Il n'en est plus de même avec les polyèdres de la seconde sorte. Il peut arriver que deux des a_j^{p-1} d'une même a_i^p ne soient pas distinctes. Dans ce cas, après avoir franchi cette a_j^{p-1} , on se retrouvera dans cette même a_i^p où l'on était déjà avant de l'avoir passée. Ainsi pour reprendre notre tore de tout à l'heure, qui était un polyèdre à une seule face: après avoir passé la coupure méridienne, par exemple, on se retrouvera toujours dans cette même et unique face où l'on était avant le passage. Il arrive alors que cette a_j^{p-1} n'a de relation qu'avec cette a_i^p ; et de plus, elle est deux fois en relation avec cette même a_i^p , une fois en relation directe, une autre fois en relation inverse, de sorte que les deux relations se compensant, le nombre ϵ_{ij}^p correspondant est égal à zéro. Dans ce cas, tous les nombres ϵ_{ij}^p qui figurent dans la colonne correspondante du tableau T_p sont nuls.

Dans les exemples en question (p. 49 sqq.), les variétés fermées à

trois dimensions que l'on envisage peuvent être regardées comme des polyèdres de la seconde sorte. Chacun de ces polyèdres a une seule case (qui dans les premier, troisième et quatrième exemples est un cube, et dans le cinquième un octaèdre), mais les faces de cette case se confondent deux à deux.

1^{er} Exemple.—

- 1^{ère} face $ABDC = A'B'D'C'$, 1^{ère} arête $AB = CD = A'B' = C'D'$;
 2^e „ $ACC'A' = BDD'A'$, 2^e „ $AC = BD = A'C' = B'D'$;
 3^e „ $CDD'C' = ABB'A'$, 3^e „ $AA' = BB' = CC' = DD'$;

Une case unique, un sommet unique.

Les trois tableaux T_1 , T_2 et T_3 se composent uniquement de zéros. Tous leurs invariants sont donc nuls.

3^e Exemple.—

- 1^{ère} face $ABDC = B'D'C'A'$, 1^{ère} arête $AB = B'D' = C'C'$;
 2^e „ $ABB'A' = C'CDD'$, 2^e „ $AC = DD' = B'A'$;
 3^e „ $ACC'A' = DD'B'B$, 3^e „ $AA' = C'D' = DB$;
 4^e „ $CD = BB' = A'C'$;
 1^{er} sommet $A = B' = C'' = D$, 2^e sommet $B = D' = A' = C$.

Tableau T_3 .	Tableau T_2 .	Tableau T_1 .
$ 0 \ 0 \ 0 $.	$\left \begin{array}{cccc} +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 \end{array} \right $.	$\left \begin{array}{cc} +1 & -1 \\ +1 & -1 \\ +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{array} \right $.

Le tableau T_3 n'a qu'un invariant qui est nul; le tableau T_1 en a deux qui sont 0 et 1; le tableau T_2 en a trois qui sont

1, 2 et 2.

4^e Exemple.—

- 1^{ère} face $ABDC = B'D'C'A'$, 1^{ère} arête $AA' = CC' = BB' = DD'$;
 2^e „ $ABB'A' = CDD'C'$, 2^e „ $AB = CD = B'D' = A'C'$;
 3^e „ $ACC'A' = BDD'B'$, 3^e „ $AC = BD = D'C' = B'A'$;

Une case unique, un sommet unique.

Tableau T_3 .	Tableau T_2 .	Tableau T_1 .
$ 0 \ 0 \ 0 $.	$\left \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & -1 \end{array} \right $.	$\left \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right $.

Les tableaux T_1 et T_3 n'ont qu'un invariant qui est 0 ; le tableau T_2 en a trois qui sont 1, 2 et 0.

5° *Exemple.*—

1 ^{ère} face $ABC = FED$,	1 ^{ère} arête $AB = FE$,	1 ^{er} sommet $A = F$;
2 ^e „ $ACE = FDB$,	2 ^e „ $AC = FD$,	2 ^e „ $B = E$;
3 ^e „ $AED = FBC$,	3 ^e „ $AE = FB$,	3 ^e „ $C = D$;
4 ^e „ $ADB = FCE$,	4 ^e „ $AD = FC$;	
	5 ^e „ $BC = ED$;	
	6 ^e „ $CE = DB$.	

Tableau T_3 .	Tableau T_2 .	Tableau T_1 .
$ 0 \ 0 \ 0 \ 0 $.	$\left \begin{array}{cccccc} +1 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \end{array} \right $.	$\left \begin{array}{ccc} +1 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & 0 \\ +1 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 \\ 0 & -1 & +1 \end{array} \right $.

Les invariants sont :

0 pour T_3 ; 2, 1, 1 et 1 pour T_2 ; 0, 1 et 1 pour T_1 .

Passons maintenant au sixième exemple (p. 57).

Ainsi qu'on l'a vu (§ 14, p. 71), les équivalences fondamentales s'écrivent

$$C_1 + C_2 \equiv C_2 + C_1,$$

$$C_1 + C_3 \equiv C_3 + \alpha C_1 + \gamma C_2,$$

$$C_2 + C_3 \equiv C_3 + \beta C_1 + \delta C_2.$$

Pour écrire les homologies qui peuvent se déduire des homologies fondamentales par addition et multiplication, *mais sans division*, il suffit de se donner le droit d'intervertir l'ordre des termes dans les deux membres de ces équivalences fondamentales ; on trouve ainsi

$$0 \sim 0; (\alpha - 1)C_1 + \gamma C_2 \sim 0; \beta C_1 + (\delta - 1)C_2 \sim 0.$$

Le déterminant $(\alpha - 1)(\delta - 1) - \beta\gamma$
est égal à $2 - \alpha - \delta$.

Soit, d'autre part, μ le plus grand commun diviseur des quatre nombres

$$\alpha - 1, \delta - 1, \beta, \gamma;$$

l'examen des homologies que nous venons d'écrire montre que les deux invariants du tableau T_2 qui ne sont pas égaux à 0 ou à 1 sont égaux à

$$\mu \text{ et } \frac{2 - \alpha - \delta}{\mu}.$$

(Le nombre μ peut d'ailleurs être égal à 1.)

Quant aux invariants des tableaux T_1 et T_3 , ils sont toujours tous, comme nous le verrons plus loin, égaux à 0 ou à 1.

Soit, par exemple,

$$\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = -1, \delta = 0.$$

On a $\mu = 1, 2 - \alpha - \delta = 3,$

de sorte que l'un de nos invariants est égal à 3 et l'autre à 1.

Cela peut d'ailleurs se vérifier en formant le tableau T_2 . Soient

$$(x + 1, y, z),$$

$$(x, y + 1, z),$$

$$(-x + y, -x, z + 1)$$

les trois substitutions du groupe G , que j'appellerai S_1, S_2 et S_3 , et qui correspondront aux trois contours fondamentaux C_1, C_2, C_3 (§ 13, p. 68).

La variété étudiée peut être regardée comme engendrée par le cube $ABCD A'B'C'D'$ (§ 10, p. 49). Seulement la face $ABCD$ devra être considérée comme décomposée en deux triangles ABD et ACD , de même que la face $A'B'C'D'$ en deux triangles $D'A'B'$ et $C'D'A'$.

Il est aisé de voir que la face $ABB'A'$ est changée en $ODD'C'$ par la substitution S_2 , la face $ACC'A'$ en $BDD'B'$ par la substitution S_1 , la face ABD en $D'A'B'$ par la substitution $S_3 S_1 S_2$, la face ACD en $C'D'A'$ par la substitution $S_3 S_2$.

Notre polyèdre a donc :

1° Une seule case ;

2° Quatre faces, à savoir :

$$1^{\text{ère}} \text{ face } ABB'A' = CDD'C',$$

$$2^{\text{e}} \text{ ,, } ACC'A' = BDD'B',$$

$$3^{\text{e}} \text{ ,, } ABD = D'A'B',$$

$$4^{\text{e}} \text{ ,, } ACD = C'D'A';$$

3° Quatre arêtes, à savoir :

$$1^{\text{re}} \text{ arête } AA' = BB' = CC' = DD',$$

$$2^{\circ} \text{ ,, } AB = CD = D'A',$$

$$3^{\circ} \text{ ,, } AC = BD = C'D' = A'B',$$

$$4^{\circ} \text{ ,, } AD = C'A' = D'B';$$

4° Un seul sommet.

Les tableaux T_1 et T_3 sont entièrement composés de zéros.

Voici le tableau T_2 :

$$\begin{vmatrix} 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & +1 & -1 \\ 0 & +1 & +1 & -1 \end{vmatrix}.$$

On voit que les invariants de ce tableau sont

$$1, 1, 3, 0.$$

Passons maintenant à l'exemple de M. Heegaard. Soient $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ les coordonnées d'un point dans l'espace à six dimensions ; soit

$$x = x_1 + x_2 \sqrt{-1} = |x| e^{\xi \sqrt{-1}},$$

$$y = y_1 + y_2 \sqrt{-1} = |y| e^{\eta \sqrt{-1}},$$

$$z = z_1 + z_2 \sqrt{-1} = |z| e^{\zeta \sqrt{-1}}.$$

Notre variété aura pour équations

$$z^2 = xy, \quad x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1,$$

d'où

$$|z^2| = |xy|, \quad \zeta = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad |x^2| + |y^2| = 1.$$

Pour obtenir la variété tout entière, il faut que nous fassions varier

1° $|x|$ de 0 à 1, ce qui fait varier en même temps $|y|$ de 1 à 0 ;

2° η de 0 à 2π ;

3° $\xi + \eta$ de 0 à 4π .

Le polyèdre ainsi obtenu a une seule case définie par les inégalités

$$0 < |x| < 1, \quad 0 < \eta < 2\pi, \quad 0 < \xi + \eta < 4\pi.$$

Il a deux faces définies par les relations suivantes :—

$$1^{\text{re}} \text{ face} \quad \eta = 0, \quad 0 < |x| < 1, \quad 0 < \xi < 4\pi ;$$

cette face est identique à la suivante :—

$$\eta = 2\pi, \quad 0 < |x| < 1, \quad -2\pi < \xi < 2\pi.$$

$$2^{\circ} \text{ face} \quad \xi + \eta = 0, \quad 0 < |x| < 1, \quad 0 < \eta < 2\pi;$$

cette face est identique à la suivante :—

$$\xi + \eta = 4\pi, \quad 0 < |x| < 1, \quad 0 < \eta < 2\pi.$$

Il a trois arêtes définies par les relations suivantes :—

$$1^{\text{re}} \text{ arête} \quad \xi = \eta = 0, \quad 0 < |x| < 1;$$

cette arête est identique aux trois suivantes :—

$$\xi = 0, \quad \eta = 2\pi, \quad 0 < |x| < 1;$$

$$\xi = -2\pi, \quad \eta = 2\pi, \quad 0 < |x| < 1;$$

$$\xi = \eta = 2\pi, \quad 0 < |x| < 1;$$

$$2^{\circ} \text{ arête} \quad x_1 = x_2 = 0, \quad 0 < \eta < 2\pi;$$

$$3^{\circ} \quad ,, \quad y_1 = y_2 = 0, \quad -2\pi < \xi < 0, \quad \text{identique aux deux suivantes :—}$$

$$y_1 = y_2 = 0, \quad 0 < \xi < 2\pi;$$

$$y_1 = y_2 = 0, \quad 2\pi < \xi < 4\pi.$$

Il a enfin deux sommets, à savoir :

$$1^{\text{er}} \text{ sommet} \quad x_1 = x_2 = 0, \quad \eta = 0, \quad \text{identique au suivant :—}$$

$$x_1 = x_2 = 0, \quad \eta = 2\pi;$$

$$2^{\circ} \quad ,, \quad y_1 = y_2 = 0, \quad \xi = -2\pi, \quad \text{identique aux trois suivants :—}$$

$$y_1 = y_2 = 0, \quad \xi = 0;$$

$$y_1 = y_2 = 0, \quad \xi = 2\pi;$$

$$y_1 = y_2 = 0, \quad \xi = 4\pi.$$

Le tableau T_3 est entièrement composé de zéros; quant aux tableaux T_1 et T_2 , ils s'écrivent

$$T_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & +2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad T_1 = \begin{vmatrix} +0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On voit que les invariants sont 0, 2 et 1 pour T_2 , 0 et 1 pour T_1 .

5. Extension au cas général d'un Théorème du Premier Complément.

Je voudrais revenir sur l'une des questions traitées dans un des mémoires antérieurs (c, § 10). Je n'ai envisagé dans l'endroit cité que le cas de $p = 3$, et je voudrais faire voir comment on peut étendre les mêmes raisonnements au cas général. Voici de quoi il s'agit :

Soient deux polyèdres réciproques P et P' ; considérons d'une part les éléments a_i^q de P , et d'autre part les éléments b_i^q de P' . Je suppose que l'on ait trouvé une congruence

$$(1) \quad \Sigma \lambda_i a_i^q \equiv 0$$

entre les a_i^q ; je dis qu'on pourra faire correspondre à cette congruence une autre congruence entre les b_i^q

$$(2) \quad \Sigma \mu_i b_i^q \equiv 0,$$

et cela de telle sorte que l'on ait l'homologie

$$(3) \quad \Sigma \lambda_i a_i^q \sim \Sigma \mu_i b_i^q.$$

Réciproquement à toute congruence de la forme (2) on pourra faire correspondre une congruence de la forme (1), et cela de telle sorte que les premiers membres de ces deux congruences soient liés par l'homologie (3).

Tel est le théorème qu'il s'agit de démontrer. J'en ai donné une démonstration simple dans le cas de $p = 3$, et il s'agit d'étendre cette démonstration au cas général. Je ferai d'abord une première remarque.

Considérons les congruences

$$(4) \quad a_i^q \equiv \Sigma \epsilon_{ij}^q a_j^{q-1}.$$

Nous savons qu'en les combinant linéairement, on peut en éliminer les a_j^{q-1} et obtenir des congruences de la forme

$$(5) \quad \Sigma \zeta_i a_i^q \equiv 0.$$

Le nombre des congruences distinctes de la forme (5) est celui que nous avons appelé $\alpha_q - \alpha_q''$.

Supposons maintenant que nous considérons les différents éléments a_i^h du polyèdre P , où le nombre h des dimensions doit être plus grand que q , mais peut être égal à $q+1$, $q+2$, ..., $p-1$ ou p . Nous donnons une fois pour toutes à ce nombre h une valeur déterminée.

Nous répartirons alors les congruences (4) en groupes, en mettant dans le même groupe deux de ces congruences si les deux a_i^q correspondants appartiennent à un même a_i^h ; il est clair qu'il y aura autant de groupes que de a_i^h , et qu'une même congruence pourra se retrouver dans plusieurs groupes, puisque un a_i^q fait partie de plusieurs a_i^h .

En combinant linéairement les congruences (4) d'un même groupe, on pourra alors éliminer les a_j^{q-1} et obtenir des congruences de la forme

$$(5 \text{ bis}) \quad \Sigma \zeta'_i a_i^q \equiv 0.$$

Les congruences (5 bis) font évidemment partie du système des congruences (5), puisque ce dernier système est celui de toutes les congruences distinctes de cette forme que l'on peut obtenir par la combinaison des congruences (4). En revanche, il peut y avoir dans le système (5) des congruences qui ne font pas partie du système (5 bis); et en effet nous avons obtenu ce dernier système en imposant des restrictions à notre faculté de combiner les congruences (4) puisque nous ne pouvions combiner que celles d'un même groupe.

Je dis d'abord que la congruence (5 bis) entraîne l'homologie

$$(6) \quad \sum \xi'_i a_i^q \sim 0.$$

En effet, la congruence (5 bis) est une congruence entre les éléments du polyèdre a_i^h , et, comme par hypothèse ce polyèdre est simplement connexe, cette congruence doit entraîner l'homologie correspondante.

Réciproquement, si l'homologie (6) a lieu, la congruence correspondante fera partie du système (5 bis). En effet, l'homologie (6) ayant lieu entre les éléments du polyèdre a_i^h , doit entraîner la congruence correspondante, et cette congruence doit pouvoir se déduire des congruences fondamentales de la forme (4) relatives au polyèdre a_i^h , c'est-à-dire appartenant à un même groupe.

Il résulte de là que le nombre des congruences distinctes du système (5 bis) est $a_q - a'_q$.

Le système (5 bis) reste donc toujours le même quelle que soit la valeur attribuée au nombre h .

Nous voyons en même temps que cette considération permettrait de trouver le nombre de Betti P_q en considérant seulement le tableau T'_q , pourvu que l'on sût en outre si deux congruences (4) appartiennent ou non à un même groupe.

Introduisons maintenant une notion qui peut être considérée comme la généralisation de la notion de pyramide. Soit a_q un domaine appartenant à un espace plan P_q à q dimensions; soit b_m un domaine appartenant à un autre espace plan P'_m à m dimensions. Je supposerai que ces deux espaces plans n'ont aucun point commun. Je pourrai alors par ces deux espaces faire passer un espace plan Π à $q+m+1$ dimensions, et un seul.

Cela posé, joignons par des droites chacun des points du domaine a_q à chacun des points du domaine b_m . L'ensemble de ces droites engendrera un certain domaine appartenant à l'espace plan Π , ayant $q+m+1$ dimensions que je désignerai par la notation $a_q b_m$, et que je pourrai appeler pyramide généralisée rectiligne.

Si, en effet, le domaine a_q se réduisait à un polygone plan ($q = 2$),

et le domaine b_m à un point ($m = 0$), le domaine $a_q b_m$ se réduirait à une pyramide ordinaire ayant a_q pour base et b_m pour sommet.

Toute figure homéomorphe à une pyramide généralisée rectiligne pourra s'appeler pyramide généralisée.

Cela posé, envisageons un élément a_i^q du polyèdre P et un élément b_j^m du polyèdre réciproque P' ; cet élément b_j^m correspond à un élément a_j^{p-m} du polyèdre P . Je suppose que l'élément a_i^q fasse partie de l'élément a_j^{p-m} ; nous aurons donc

$$q < p - m; \quad p \geq q + m + 1.$$

Je remarque de plus que tout point de b_j^m fera partie de l'un des a_k^p dont fait partie a_j^{p-m} , et par conséquent de l'un des a_k^p dont fait partie a_i^q . Il suffit de le montrer pour les sommets de b_j^m ; or, si b_k^0 est l'un de ces sommets, il sera à l'intérieur de a_k^p , et comme b_k^0 appartient à b_j^m , en vertu de la définition même des polyèdres réciproques, a_j^{p-m} appartiendra à a_k^p .

Cela posé, nous pouvons à l'intérieur de chacun des a_k^p définir un système de lignes L , tel que par deux points quelconques intérieurs à cet a_k^p on puisse mener une ligne L , et une seule. Le système des lignes L jouit donc des mêmes propriétés qualitatives que le système des lignes droites. Cela tient à ce que a_k^p est supposé simplement connexe.

Joignons maintenant chacun des points de b_j^m à chacun des points de a_i^q par une ligne L située dans celui des a_k^p auquel appartient à la fois a_i^q et le point considéré de b_j^m .

L'ensemble de ces lignes L engendrera une figure que j'appellerai $a_i^q b_j^m$, qui sera homéomorphe à une pyramide généralisée rectiligne et qui aura $q + m + 1 \leq p$ dimensions.

Quelle sera la frontière de cette variété $a_i^q b_j^m$? Supposons que l'on ait les congruences

$$a_i^q \equiv \sum \epsilon_{ih}^q a_h^{q-1}; \quad b_j^m \equiv \sum \epsilon'_{jk}{}^m b_k^{m-1}.$$

La frontière se composera des pyramides généralisées $a_h^{q-1} b_i^m$ et $a_i^q b_k^{m-1}$, et l'on aura

$$(7) \quad a_i^q b_j^m \equiv \sum \epsilon_{ih}^q a_h^{q-1} b_j^m + \sum \epsilon'_{jk}{}^m a_i^q b_k^{m-1}.$$

Cela ne serait plus vrai si l'on avait $m = 0$. Dans ce cas, en effet, la variété a_i^q aurait $q = (q + m + 1) - 1$ dimensions; elle devrait donc

faire partie de la frontière complète de $a_i^q b_j^m$, et la congruence (7) deviendrait

$$(7 \text{ bis}) \quad a_i^q b_j^0 \equiv \sum \epsilon_{ih}^q a_h^{q-1} b_j^0 - a_i^q$$

(les termes en ϵ' disparaissant); de même pour $q = 0$ on aurait

$$(7 \text{ ter}) \quad a_i^0 b_j^m \equiv \sum \epsilon'_{jk} a_i^0 b_k^{m-1} + b_j^m.$$

Des congruences (7), (7 bis) et (7 ter) se déduisent les homologies

$$(8) \quad \sum \epsilon_{ih}^q a_h^{q-1} b_j^m \sim -\sum \epsilon'_{jk} a_i^q b_k^{m-1},$$

$$(8 \text{ bis}) \quad a_i^q \sim \sum \epsilon_{ih}^q a_h^{q-1} b_j^0,$$

$$(8 \text{ ter}) \quad b_j^m \sim -\sum \epsilon'_{jk} a_i^0 b_k^{m-1}.$$

La congruence (8 bis) suppose que a_i^q fasse partie de a_j^p ; c'est celle que nous avons envisagée ailleurs (c, § x., p. 49, éq. 2).

Supposons maintenant que nous ayons trouvé une congruence de la forme

$$(9) \quad \sum \lambda_{ij} a_i^q b_j^m \equiv 0.$$

Je dis que nous pourrions trouver une congruence de la même forme, mais où le nombre q a augmenté d'une unité et le nombre m diminué d'une unité, et cela de telle sorte que les premiers membres des deux congruences soient homologues.

En effet, nous avons identiquement en vertu de (7)

$$\sum \lambda_{ij} a_i^q b_j^m \equiv \sum \lambda_{ij} \epsilon_{ih}^q a_h^{q-1} b_j^m + \sum \lambda_{ij} \epsilon'_{jk} a_i^q b_k^{m-1}.$$

On doit donc avoir (en annulant dans le second membre le coefficient de $a_h^{q-1} b_j^m$)

$$\sum_i \lambda_{ij} \epsilon_{ih}^q = 0.$$

On en déduit la congruence

$$(10) \quad \sum_i \lambda_{ij} a_i^q \equiv \sum_i \lambda_{ij} \epsilon_{ih}^q a_h^{q-1} \equiv 0.$$

Tous les éléments a_i^q qui figurent dans le premier membre de (10) appartiennent à a_j^{p-m} ; or a_j^{p-m} par hypothèse est simplement connexe; toute congruence entre ses éléments entraîne donc l'homologie correspondante de sorte que l'on a

$$\sum_i \lambda_{ij} a_i^q \sim 0,$$

d'où

$$\sum_i \lambda_{ij} a_i^q \equiv \sum_p \mu_{pj} a_p^{q+1},$$

les μ étant des coefficients entiers et les a_p^{q+1} étant des éléments appartenant à a_j^{p-m}

Or

$$\sum_p \mu_{pj} a_p^{q+1} \equiv \sum_{pi} \mu_{pi} \epsilon_{pi}^{q+1} a_i^q.$$

On a donc

$$\lambda_i = \sum_p \mu_{pi} \epsilon_{pi}^{q+1}.$$

La congruence (9) peut alors s'écrire

$$\sum \mu_{\rho i} \epsilon_{\rho i}^{q+1} a_i^q b_j^m \equiv 0$$

(la sommation s'étend aux trois indices ρ, i, j).

Or nous pouvons former l'homologie suivante qui n'est autre que l'une des homologies (8) :—

$$(11) \quad \sum \epsilon_{\rho i}^{q+1} a_i^q b_j^m \sim - \sum \epsilon'_{jk}{}^m a_p^{q+1} b_k^{m-1}.$$

On a alors

$$\sum \lambda_{ij} a_i^q b_j^m \sim - \sum \mu_{\rho j} \epsilon'_{jk}{}^m a_p^{q+1} b_k^{m-1},$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Le cas de $m = 0$ est, bien entendu, laissé de côté et doit être traité à part. Dans ce cas l'homologie (11) doit être remplacée par la suivante qui est l'une des homologies (8 bis) :—

$$(11 \text{ bis}) \quad \sum \epsilon_{\rho i}^{q+1} a_i^q b_j^0 \sim a_p^{q+1},$$

d'où

$$\sum \lambda_{ij} a_i^q b_j^0 \sim \sum \mu_{\rho j} a_p^{q+1}.$$

Donc à la congruence

$$(9 \text{ bis}) \quad \sum \lambda_{ij} a_i^q b_j^0 \equiv 0$$

correspondra la congruence

$$\sum \mu_{\rho j} a_p^{q+1} \equiv 0$$

qui est de la forme (1), et les premiers membres de ces deux congruences seront homologues.

Soit maintenant

$$(2) \quad \sum \lambda_j b_j^q \equiv 0$$

une congruence de la forme (2); on aura par une homologie analogue à (8 ter)

$$b_j^q \sim - \sum \epsilon'_{jk}{}^q a_i^0 b_k^{q-1},$$

si b_i^{q-1} est l'un des éléments de P' auquel appartient b_i^q .

Nous avons donc l'homologie

$$\sum \lambda_j b_j^q \sim - \sum \lambda_j \epsilon'_{jk}{}^q a_i^0 b_k^{q-1},$$

de sorte qu'à notre congruence (2) correspondra une congruence

$$(12) \quad - \sum \lambda_j \epsilon'_{jk}{}^q a_i^0 b_k^{q-1} \equiv 0$$

dont le premier membre est homologue à celui de (2).

Si donc nous avons une congruence de la forme (2), nous en déduirons la congruence (12), qui est une congruence de la forme (9), où les nombres que nous appelions plus haut q et m ont respectivement pour valeurs 0 et $q-1$. Nous en déduirons ensuite une autre

congruence également de la forme (9), mais où ces deux nombres auront pour valeurs 1 et $q-2$, et ainsi de suite; on finira par arriver à une congruence de la forme (9 bis), c'est-à-dire à une congruence où ces deux nombres auront pour valeurs $q-1$ et 0; et nous en déduirons alors finalement une congruence de la forme (1).

Les premiers membres de toutes ces congruences seront homologues entre eux.

Le théorème énoncé au début de ce paragraphe se trouve ainsi démontré.

Pour en tirer toutes les conséquences qu'il comporte, nous devons remarquer ceci: Nous devons distinguer plusieurs sortes d'homologies. Soit v_q une variété quelconque à q dimensions faisant partie de notre variété v , et v_{q-1} sa frontière complète, ce qui s'exprime par la congruence

$$v_q \equiv v_{q-1}.$$

Nous en déduisons l'homologie

$$v_{q-1} \sim 0.$$

Les homologies ainsi obtenues sont les homologies fondamentales.

En combinant les homologies fondamentales par addition, soustraction et multiplication, on en obtient d'autres qui sont les *homologies sans division*. Enfin, en les combinant par addition, multiplication et division, on en obtient encore d'autres qui sont les *homologies par division*.

Eh bien, toutes les homologies que nous avons rencontrées dans ce paragraphe sont des *homologies sans division*.

Cela posé, revenons à nos tableaux T_q et T'_q et à leurs invariants, et en particulier à ceux de ces invariants qui ne sont égaux ni à 0, ni à 1, et que nous appellerons *coefficients de torsion*.

Supposons que nous ayons l'homologie suivante:—

$$(13) \quad \sum k \lambda_i a_i^q \sim 0,$$

où les λ_i sont des entiers premiers entre eux; que (13) soit une homologie sans division, mais que l'homologie

$$(14) \quad \sum \lambda_i a_i^q \sim 0$$

ne puisse être obtenue que par division. D'après ce que nous avons vu dans l'un des paragraphes précédents, cela voudra dire que k est l'un des coefficients de torsion du tableau T'_q .

Nous aurons la congruence

$$(14 \text{ bis}) \quad \sum \lambda_i a_i^q \equiv 0.$$

De (14 bis) nous pourrons, par le procédé de ce paragraphe, déduire une congruence entre les b_i^q que j'écrirai

$$(14 \text{ ter}) \quad \Sigma \mu_i b_i^q \equiv 0.$$

On aurait d'ailleurs, d'après le théorème que nous venons d'établir,

$$\Sigma \lambda_i a_i^q \sim \Sigma \mu_i b_i^q.$$

C'est là une homologie sans division, et on en déduirait immédiatement, également sans division,

$$\Sigma k \lambda_i a_i^q \sim \Sigma k \mu_i b_i^q.$$

De là on déduit que l'on a, sans division,

$$\Sigma k \mu_i b_i^q \sim 0,$$

et que l'on n'a pas, sans division,

$$\Sigma \mu_i b_i^q \sim 0,$$

sans quoi l'on aurait, sans division,

$$\Sigma \lambda_i a_i^q \sim 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Cela veut dire que k est un coefficient de torsion du tableau T_q'' .

Ainsi les coefficients de torsion des deux tableaux T_q et T_q'' sont égaux (la démonstration est aisée à compléter), et, si l'on observe que les deux tableaux T_q' et T_{p-q} ont mêmes invariants, on conclura que *les tableaux également distants des extrêmes ont mêmes coefficients de torsion.*

On pourrait arriver au même résultat par une autre voie.

Nous avons vu dans un des mémoires antérieurs (§ 16) définir l'opération que nous avons appelée l'annexion; je suppose que deux éléments d'un polyèdre, par exemple a_i^q et a_j^q , soient séparés l'un de l'autre par un élément a_k^{q-1} , que ce soit le seul élément à $q-1$ dimensions commun à a_i^q et à a_j^q , et enfin que a_k^{q-1} n'appartienne à aucun élément à q dimensions en dehors de a_i^q et de a_j^q ; on aura donc $\epsilon_{ik}^q = 1$, $\epsilon_{jk}^q = -1$; tous les autres ϵ_{hk}^q seront nuls quel que soit l'indice h , de même que tous les produits $\epsilon_{ih}^q \epsilon_{jh}^q$.

Dans ces conditions, on peut annexer l'un à l'autre les deux éléments a_i^q et a_j^q en supprimant l'élément a_k^{q-1} . Quel est l'effet de cette opération sur nos tableaux T_q ? Le tableau T_q perd une ligne et une colonne; le tableau T_{q-1} perd une ligne. L'un des invariants égaux à 1 de T_q disparaît; quant au tableau T_{q-1} , il perd un invariant s'il n'a

pas plus de lignes que de colonnes ; dans ce cas, l'invariant qu'il perd est égal à zéro. Tous les autres invariants des deux tableaux ne changent pas ; ces deux tableaux conservent donc leurs coefficients de torsion.

Or il est aisé de former un polyèdre dérivé à la fois de P et de P' ; on pourrait ensuite remonter de ce polyèdre soit à P , soit à P' , par des annexions régulières. Comme ces annexions n'altèrent pas les coefficients de torsion, les tableaux T_q et T'_q doivent avoir mêmes coefficients de torsion.

6. Torsion intérieure des Variétés.

Considérons l'un de nos tableaux T_q . Nous dirons qu'une suite d'éléments, tous distincts, de ce tableau, rangés dans un certain ordre forme une *chaîne*, si chaque élément de rang impair appartient à la même ligne que l'élément suivant et à la même colonne que l'élément précédent. La chaîne sera *fermée* si le dernier élément est identique au premier. Il est clair qu'une chaîne fermée contiendra toujours un nombre impair d'éléments et un nombre pair d'éléments *distincts*. Par exemple, les éléments

$$(1) \quad \epsilon_{11}^q, \epsilon_{12}^q, \epsilon_{22}^q, \epsilon_{23}^q, \epsilon_{33}^q, \epsilon_{31}^q, \epsilon_{11}^q$$

formeront une chaîne fermée.

Comme tous les éléments du tableau T_q sont égaux à 0, +1 ou -1, le produit des éléments distincts d'une chaîne fermée sera toujours 0, +1 ou -1.

Supposons que les éléments de la chaîne (1) aient les valeurs suivantes :—

$$\epsilon_{12}^q = \epsilon_{23}^q = \epsilon_{31}^q = 1, \quad \epsilon_{11}^q = \epsilon_{22}^q = \epsilon_{33}^q = -1 ;$$

le produit des éléments de la chaîne sera -1 ; considérons alors les trois variétés a_1^q, a_2^q, a_3^q , et les trois variétés $a_1^{q-1}, a_2^{q-1}, a_3^{q-1}$; en supprimant les variétés a_1^{q-1}, a_2^{q-1} et a_3^{q-1} , on annexe les unes aux autres les trois variétés a_1^q, a_2^q et a_3^q , et la variété ainsi obtenue

$$a_1^q + a_2^q + a_3^q$$

est une variété bilatère.

Si, au contraire, nous avons

$$\epsilon_{12}^q = \epsilon_{23}^q = \epsilon_{31}^q = 1, \quad \epsilon_{22}^q = \epsilon_{33}^q = -1, \quad \epsilon_{11}^q = 1,$$

on pourra encore supprimer a_1^{q-1}, a_2^{q-1} et a_3^{q-1} et obtenir par annexion la variété $a_1^q + a_2^q + a_3^q$; mais cette variété sera unilatère.

Plus généralement, si tous les éléments de la chaîne (1) sont égaux

à $+1$ et à -1 , nous supprimerons d'abord a_2^{q-1} et a_3^{q-1} ; nous obtiendrons ainsi par annexion la variété

$$(2) \quad a_1^q - \epsilon_{12}^q \epsilon_{22}^q a_2^q + \epsilon_{12}^q \epsilon_{22}^q \epsilon_{13}^q \epsilon_{23}^q a_3^q.$$

Supprimant ensuite a_1^{q-1} , nous voyons que la variété (2) est désormais formée d'une chaîne fermée de a_i^q au sens du paragraphe 8 (p. 26) de l'« Analysis Situs, » et que cette chaîne est bilatère ou unilatère selon que le produit des éléments distincts de la chaîne (1) est égal à -1 ou à $+1$.

Nous dirons dans le premier cas que la chaîne (1) est bilatère, dans le second cas qu'elle est unilatère.

Nous sommes donc conduits à distinguer trois catégories parmi les chaînes fermées formées à l'aide d'éléments des tableaux T_q :

1° Les chaînes nulles, c'est-à-dire celles dont le produit des éléments est nul.

2° Les chaînes bilatères.

Il est aisé de voir que ce sont celles dont le produit des éléments est $+1$ si le nombre des éléments est multiple de 4, ou celles où ce produit est -1 si le nombre des éléments est multiple de 4 plus 2.

3° Les chaînes unilatères.

Ce sont celles où ce produit est -1 si le nombre des éléments est multiple de 4, ou $+1$ si ce nombre est multiple de 4 plus 2.

Cela posé, nous dirons que le tableau T_q (ou plus généralement tout tableau ou tout déterminant dont tous les éléments sont 0, $+1$ ou -1) est bilatère s'il ne contient que des chaînes nulles ou bilatères.

Il résulte de cette définition :

1° Qu'un tableau bilatère reste bilatère si l'on change tous les signes d'une colonne, ou tous les signes d'une ligne; ou encore si l'on permute deux colonnes ou deux lignes.

Théorème.—Un déterminant bilatère ne peut être égal qu'à 0, $+1$ ou -1 .

En effet, on peut toujours, en changeant au besoin tous les signes de certaines colonnes, s'arranger de façon que tous les éléments de la première ligne soient 0 ou $+1$.

Supposons, par exemple, que les deux premiers éléments de la première ligne soient égaux à $+1$, et que je retranche la première colonne de la seconde, la valeur du déterminant ne sera pas changée; je dis que le déterminant restera bilatère.

Considérons, en effet, dans le déterminant primitif une chaîne dont le premier et le dernier élément appartiennent à la deuxième colonne

et tous les autres éléments à d'autres colonnes. Soient a et c ce premier et ce dernier élément; soit ξ le produit de tous les autres éléments de la chaîne; soient b et d les éléments de la première colonne qui sont respectivement dans la même ligne que a et c .

Le produit des éléments de notre chaîne que j'appellerai la chaîne (1) sera $ac\xi$, et nous aurons

$$ac\xi = 0 \text{ ou } 1 \quad \text{si le nombre des éléments} \equiv 0 \pmod{4},$$

$$ac\xi = 0 \text{ ou } -1 \quad \text{,, ,, ,,} \equiv 2 \pmod{4}.$$

Le produit des éléments de la chaîne que j'appellerai (2) et qui est formée avec les éléments correspondants du déterminant nouveau sera

$$(a-b)(c-d)\xi,$$

et, en effet, les éléments de notre chaîne ne changent pas, excepté les éléments a et c qui deviennent $a-b$ et $c-d$.

La chaîne formée dans le déterminant primitif par les deux éléments de la première ligne et par les éléments a et b doit être bilatère, de sorte qu'on doit avoir

$$a-b=0 \quad \text{ou} \quad a=0 \quad \text{ou} \quad b=0.$$

On doit avoir de même

$$c-d=0 \quad \text{ou} \quad c=0 \quad \text{ou} \quad d=0.$$

Si $(a-b)$ ou $(c-d)$ est nul, le théorème est démontré puisque le produit $(a-b)(c-d)\xi = 0$.

Si $b=d=0$, on a

$$(a-b)(c-d)\xi = ac\xi,$$

et le théorème est démontré puisque les deux produits des chaînes (1) et (2) sont les mêmes, que le nombre des éléments est le même et que (1) est bilatère ou nulle.

Si $a=c=0$, on a

$$(a-b)(c-d)\xi = bd\xi.$$

La chaîne (3) qui appartient au déterminant primitif, et qui a mêmes éléments que la chaîne (1), sauf que a et c sont remplacés par b et d —cette chaîne (3), dis-je, est bilatère ou nulle; elle a même nombre d'éléments que (2) et son produit est $bd\xi$, égal dans ce cas au produit de (2). Donc, dans ce cas encore, la chaîne (2) est bilatère ou nulle.

Si $a=d=0$, on a

$$(a-b)(c-d)\xi = -bc\xi.$$

Il faut cette fois considérer dans le déterminant primitif une

chaîne (4) dont les éléments seront les deux éléments de la première ligne, les éléments b et c et les éléments de la chaîne (1), sauf a et c . Cette chaîne (4) doit être bilatère ou nulle.

Elle contient deux éléments de plus que la chaîne (2).

Son produit est égal à $bc\xi$ et, par conséquent, égal et de signe contraire au produit de (2).

Donc (2) est bilatère ou nulle.

Si, enfin, $b = c = 0$, on a

$$(a-b)(c-d)\xi = -ad\xi,$$

et on démontrerait, tout à fait comme dans le cas précédent, que la chaîne (2) est bilatère ou nulle.

Nous venons de traiter le cas des chaînes dont deux éléments appartiennent à la seconde colonne. Le résultat est le même quel que soit le nombre des éléments appartenant à la seconde colonne, nombre qui d'ailleurs doit être toujours pair.

Si ce nombre est nul, le théorème est évident, car la chaîne du déterminant nouveau ne diffère pas de celle du déterminant primitif.

Supposons que ce nombre soit 4, pour fixer les idées. Soient a, c, e, g quatre éléments de la seconde colonne, et imaginons que l'on rencontre successivement l'élément a , divers éléments ξ appartenant à d'autres colonnes, les éléments c et e , divers éléments η appartenant à d'autres colonnes, et enfin g . Notre chaîne sera fermée.

$$a\xi c e \eta g e$$

peut se décomposer en deux chaînes fermées

$$a\xi c a, e \eta g e,$$

et, pour qu'elle soit bilatère, il suffit que les deux composantes le soient. On est donc ramené au cas des chaînes n'ayant que deux éléments dans la seconde colonne.

J'ajouterai que tous les éléments du déterminant nouveau sont 0, +1 ou -1. En effet, comme on a

$$a-b = 0 \quad \text{ou} \quad a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0,$$

on aura $a-b = 0, a$ ou $-b$,

d'où $a-b = 0, 1$ ou -1 .

Cela posé, retranchons de cette façon la première colonne de toutes les colonnes dont le premier élément est +1. Le déterminant conservera sa valeur; il restera bilatère; mais tous les éléments de la première ligne seront nuls, sauf le premier qui sera +1.

Ce raisonnement est applicable dans tous les cas, sauf si tous les éléments de la première ligne sont nuls ; mais alors le déterminant est nul et le théorème est évident.

Si maintenant on supprime la première ligne et la première colonne, on obtiendra un déterminant nouveau qui sera égal au premier et, comme lui, bilatère. Sur ce déterminant nouveau, qui a une ligne et une colonne de moins que le premier, on opérera de la même façon, et on finira par arriver à un déterminant qui n'aura plus qu'un seul élément, lequel devra être 0, +1 ou -1.

Notre déterminant est donc égal à 0, +1 ou -1.

1^{er} Corollaire.—Si un tableau T_q est bilatère, ses invariants sont tous 0 ou 1.

2^e Corollaire.—Si un polyèdre a tous ses tableaux T_q bilatères, c'est-à-dire si on ne peut pas composer avec ses éléments a_i^j une variété unilatère, ce polyèdre n'a pas de coefficients de torsion.

On voit que l'existence des coefficients de torsion (qui nécessite la distinction entre les deux définitions des nombres de Betti, ou entre les homologies par division ou sans division) est due à ce fait que les éléments du polyèdre peuvent engendrer des variétés unilatères, c'est-à-dire que le polyèdre est pour ainsi dire tordu sur lui-même.

C'est ce qui justifie l'expression de coefficients de torsion, ou celle de variétés avec ou sans torsion.

Si la variété V formée par l'ensemble des éléments a_i^j du polyèdre P n'est pas elle-même unilatère, les deux tableaux T_1 et T_p sont bilatères.

En effet, chaque ligne pour l'un, chaque colonne pour l'autre a tous ses éléments nuls, sauf deux qui sont égaux à +1 et -1. Si donc une chaîne n'est pas nulle, ses éléments sont deux à deux égaux et de signe contraire ; elle est donc bilatère.

Il résulte de là que les tableaux extrêmes T_1 et T_p ont tous leurs invariants égaux à 0 ou à 1. C'est ce qui explique pourquoi l'on ne rencontre pas les coefficients de torsion avec les polyèdres de l'espace ordinaire ; ces polyèdres ne comportent en effet que deux tableaux T_1 et T_2 .

Cela ne serait plus vrai si la variété V était unilatère. Ainsi la variété considérée au septième exemple (§ 15, p. 87) peut être subdivisée en polyèdre, et, suivant la manière dont la subdivision se fait, on trouve pour le tableau T_2

$$| 2 |, \quad \begin{vmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \dots\dots$$

Pour ne pas trop allonger ce travail, je me bornerai à énoncer le théorème suivant dont la démonstration demanderait quelques développements :—

Tout polyèdre qui a tous ses nombres de Betti égaux à 1 et tous ses tableaux T_q bilatères est simplement connexe, c'est-à-dire homéomorphe à l'hypersphère.

A Proof of the Directro-Focal Property of the Plane Sections of a Cone in non-Euclidean Space. By IRVING STRINGHAM, Ph.D. Communicated June 14th, 1900. Received June 18th, 1900.

In the analysis of the homogeneous equation of the second degree in three variables, interpreted as coordinates in the non-Euclidean plane, it is made evident that the curve represented by that equation possesses the directro-focal property, but from this fact it does not follow that the curve exists also as the plane section of a cone. In order to make sure that the curve is really a conic section, it must be shown geometrically that the plane sections of a cone have also the directro-focal property. I have long supposed that such a geometrical proof exists somewhere, and I still suspect that Prof. Killing has one in his possession, but my search for it, in the literature of the subject, has thus far resulted unsuccessfully. The following proof supplies the missing link and is offered as a possible contribution to the subject. It should be noted that the argument is applicable in either elliptic or hyperbolic geometry.

The right circular cone is here defined, in the usual manner, as the surface generated by a straight line turning about a fixed point and forming with a fixed straight line through this point a constant angle. Any plane meets the cone in a conic section AUV . A sphere FES may be so constructed as to touch the cone in the circle FQE (its centre at G) and the plane in the point S . The plane of the circle is perpendicular to the axis of the cone, GC . Through any point on the conic section, as P , pass a plane, also perpendicular to the axis of the cone, forming with the conical surface the circle TPB ,