Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann
Series: Institut de Mathématiques, Université de Strasbourg
Adviser: P. A. Meyer

714

J. Jacod

Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1979

Author

Jean Jacod
Département de Mathématiques
et Informatique
Université de Rennes
Avenue du Général Leclerc
F-35042 Rennes Cédex

AMS Subject Classifications: (1970): 60G45

ISBN 3-540-09253-6 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-09253-6 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek. *Jacod, Jean:* Calcul stochastique et problèmes de martingales / J. Jacod. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1979. (Lecture notes in mathematics; Vol. 714: Ser. Inst. de Math., Univ. de Strasbourg)

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2141/3140-543210

INTRODUCTION

Ce qu'on appelle communément calcul stochastique est constitué de la théorie des intégrales stochastiques et des règles de calcul qui président à l'usage de ces intégrales.

Introduites par K. Ito, les intégrales stochastiques étaient d'abord prises par rapport au mouvement brownien, tandis que la classique "formule d'Ito" constituait l'essentiel des règles de calcul. Mais depuis une quinzaine d'années l'ensemble de la théorie a pris un essor considérable, d'abord à cause de son utilité pour la théorie des processus de Markov, ensuite et surtout sous la pression des applications, notamment de la théorie du filtrage.

En fait, à l'exception de A.N. Skorokhod dont le travail [1] est resté longtemps un peu méconnu, la plupart des auteurs ont d'abord traité de la partie de la théorie concernant le mouvement brownien et les processus continus, et il existe plusieurs ouvrages de synthèse dans ce cadre. Par contre pour le cas général où les processus peuvent être discontinus, on trouve des ouvrages et des articles présentant de manière synthétique la construction des intégrales stochastiques, mais aucun jusqu'à présent ne fournit une vue d'ensemble sur le "calcul" stochastique. C'est qu'en effet les règles de ce calcul ne se limitent plus à la formule d'Ito, mais couvrent la plupart des transformations auxquelles on peut soumettre un processus.

Tel est donc l'objectif de ces notes: présenter une synthèse des résultats récents sur les règles du calcul stochastique, règles qui semblent maintenant avoir atteint une forme à peu près stable et s'être débarassées d'une quantité d'hypothèses restrictives.

Plus précisément, ces notes sont divisées en trois parties (avec une certaine dose d'interpénétration):

1) La première partie (ch. I-V) jette les bases de la théorie. On y présente d'abord un résumé de la "théorie générale des processus" au sens de l'Ecole strasbourgeoise. Puis on y rappelle la construction de l'intégrale stochastique par rapport à une martingale et à une semimartingale (ch. II). Nous insistons sur la classe des semimartingales, dont on découvrira les belles propriétés tout au long de ce travail.

Ensuite on expose la théorie des mesures aléatoires (ch. III), avec beaucoup de détails puisqu'il s'agit du premier exposé systématique sur ce sujet. D'ailleurs, le lecteur remarquera sans doute que les mesures aléatoires, outre leur intérêt intrinsèque et leur aspect naturel (spécialement pour les applications), contribuent notablement à simplifier l'ensemble de la théorie. Les chapitres IV et V sont d'importance moindre.

2) Dans la seconde partie (ch. VI-X) on étudie les règles de transformation des processus, lorsqu'on change la probabilité, la filtration, l'échelle des temps, l'espace lui-même, etc... Les motivations d'une telle étude sont essentiellement d'ordre pratique. Par exemple dans la théorie du filtrage on utilise fréquemment les changements absolument continus de probabilité, tandis que le problème du changement de filtration constitue l'essence même du filtrage.

3) La troisième partie (ch. XI-XV) traite d'une application du calcul stochastique, aux problèmes de martingales. L'intérêt de ces problèmes s'est dégagé au fur et à mesure des progrès de l'application des intégrales et équations différentielles stochastiques à la théorie des processus de Markov, jusqu'à acquérir un statut autonome qui nous semble autoriser un traitement "abstrait". Cependant cette partie contient deux longs chapitres d'applications aux processus à accroissements indépendants, processus de Markov, processus de diffusion, équations différentielles stochastiques.

4) La quatrième partie est absente de ces notes, mais elle devrait être présente à l'esprit du lecteur, au moins à titre de motivation: il s'agit des applications au filtrage et au contrôle stochastique. Indépendamment de la fatigue de l'auteur, nous pouvons justifier cette absence par l'existence d'un grand nombre d'ouvrages traitant souvent des cas particuliers, mais couvrant cependant la plupart des applications "à la réalité", et aussi par le fait que la "théorie générale" du filtrage et du contrôle stochastique dans un cadre aussi général que celui où nous nous plaçons reste encore à faire (bien entendu, on peut aussi se poser la question de l'utilité pratique d'une telle théorie générale).

A la lecture de ce qui précède le lecteur aura compris (ou sinon, il le verra dès les premières lignes du texte) que ces notes ne constituent en aucune manière un cours de base sur l'intégrale stochastique: d'une part en effet les connaissances supposées sont assez nombreuses et incluent notamment l'essentiel de la "théorie générale des processus" et les bases de la théorie des martingales. D'autre part notre point de vue est systématique, dans le sens où partout où cela nous a été possible nous avons donné des résultats complets, des conditions nécessaires et suffisantes, avec le moins d'hypothèses possible, etc..., au détriment parfois des impératifs pédagogiques. Un tel point de vue conduit nécessairement à un texte long, parfois fastidieux, en tous cas d'aspect assez technique.

Pour éviter d'allonger encore l'ensemble, nous avons admis certains résultats "classiques", ce qui veut dire à la fois qu'on peut les trouver facilement dans la littérature, et qu'on peut les admettre sans dommages pour la compréhension du texte: nous nous sommes efforcé de rappeler ces résultats sous la forme d'énoncés précis, et pas seulement sous la forme de référence à tel ou tel livre.

Chaque chapitre est suivi de commentaires, parfois assez longs, où sont indiquées les références bibliographiques et où sont données également quelques appréciations sur le contenu du chapitre et l'intérêt de telle notion, parfois sur des méthodes différentes d'approche des problèmes. Nous avons également ajouté à la fin de la plupart des parties quelques exercices. Certains sont extrêmement simples; la plupart sont des compléments au texte lui-même, et à ce titre méritent d'être lus et résolus.

En ce qui concerne la bibliographie, nous avons essayé dans la mesure de nos connaissances de rendre compte de l'apport de chaque auteur à la théorie "générale" telle qu'elle est exposée ici. Par contre nous n'avons pas tenté de rendre justice aux très nombreux auteurs qui ont construit la théorie "dans le cas continu" et nous nous sommes contenté de citer certains articles marquants: pour une bibliographie complète sur ce sujet, nous préférons renvoyer au livre [2] de Liptzer et Shiryaev. De même la bibliographie relative aux applications (processus de Markov, diffusions, équations différentielles stochastiques) est tout-à-fait squelettique, dans la mesure où nous n'avons cité que les travaux ayant un rapport étroit avec notre texte: que les auteurs ayant contribué à ces théories veuillent bien nous en excuser.

Je remercie ici chaleureusement Marc Yor et Jean Mémin: d'abord parce qu'une part importante de l'aspect original de ces notes résulte de travaux que j'ai effectués en collaboration avec eux. Ensuite parce que Marc Yor a beaucoup contribué à me convaincre d'écrire ce texte et a activement collaboré à une rédaction primitive des premiers chapitres, tandis que Jean Mémin a largement aidé à la préparation du manuscrit en le lisant, en le corrigeant et en faisant nombre de remarques.

TABLE DES MATIERES