

## THÉORÈME SUR LES SÉRIES ENTIÈRES

PAR

JACQUES HADAMARD

à BORDEAUX.

1. Soient deux séries de Maclaurin

$$(1) \quad f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m + \dots$$

$$(2) \quad \varphi(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m + \dots,$$

convergentes dans des cercles ayant pour centre l'origine et pour rayons respectifs  $k$  et  $l$ .

La série

$$(3) \quad \psi(x) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \dots + a_m b_m x^m + \dots$$

dont chaque coefficient est égal au produit des coefficients correspondants des séries (1) et (2), a son rayon de convergence au moins égal à  $kl$ . Nous allons démontrer, plus généralement, que *la fonction  $\psi(x)$  n'a (et cela dans tout le plan) d'autres points singuliers que ceux que l'on obtient en multipliant les affixes des différents points singuliers de  $f(z)$  par celles des différents points singuliers de  $\varphi(t)$ .*

2. Une expression analytique bien connue de  $\psi(x)$  est la suivante

$$(4) \quad \psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta}) \varphi(te^{-i\theta}) d\theta,$$

$z$  et  $t$  étant deux nombres fixes quelconques de modules respectivement inférieurs à  $k$  et  $l$  et satisfaisant à la relation

$$(5) \quad zt = x.$$

A l'intégrale (4), nous allons en substituer une autre donnant aussi la valeur de  $\phi(x)$  et comprenant la première comme cas particulier.

Pour cela,  $x$  ayant une valeur déterminée quelconque, nous ferons encore correspondre à chaque valeur de  $z$  une valeur de  $t$  par l'équation (5); mais, au lieu de laisser  $z$  fixe, nous supposerons qu'il tourne autour de l'origine en décrivant un certain contour  $C$ ; alors, le point correspondant  $t$  tournera également autour de l'origine, mais en sens inverse, en décrivant le contour  $I'$  qui correspond à  $C$ ; on aura d'ailleurs évidemment

$$(6) \quad \frac{dz}{z} + \frac{dt}{t} = 0.$$

De plus, à une valeur de  $z$  extérieure à  $C$ , correspond une valeur de  $t$  intérieure à  $I'$ , et inversement.

Nous supposerons:

1° que la fonction  $f(z)$  est holomorphe à l'intérieur du contour  $C$  et sur ce contour;

2° que la fonction  $\varphi(t)$  est holomorphe à l'intérieur du contour  $I'$  et sur ce contour.

3. Cela posé, formons l'intégrale

$$(7) \quad I = \int f(z) \varphi\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z}$$

prise le long du contour  $C$ , dans le sens direct, laquelle équivaut, en vertu de la relation (6), à l'intégrale

$$\int f\left(\frac{x}{t}\right) \varphi(t) \frac{dt}{t},$$

prise (dans le sens direct) le long de  $I'$ , puisque le sens direct sur l'un des contours correspond au sens rétrograde sur l'autre.

L'intégrale  $I$  ne dépend pas du choix du contour  $C$ , tant que celui-ci vérifie les deux conditions spécifiées tout à l'heure: autrement dit, si l'on remplace le contour  $C$  par un contour  $C'$  satisfaisant aux mêmes conditions, l'intégrale n'est pas changée. Cela résulte immédiatement de ce que la fonction  $\frac{1}{z} f(z) \varphi\left(\frac{x}{z}\right)$  est holomorphe entre  $C$  et  $C'$ .

D'ailleurs  $I$  est, pour un choix déterminé du contour  $C$ , une fonction holomorphe de  $x$ .

Donc  $I$  est une fonction holomorphe de  $x$  tant que cette quantité et les contours  $C, \Gamma$  varient de manière que les conditions du n° précédent ne cessent pas d'être vérifiées.

Si enfin le module de  $x$  est inférieur à  $kl$ , on peut supposer les contours  $C, \Gamma$  respectivement intérieurs aux cercles de convergence des séries (1), (2) et, par conséquent, utiliser les développements de  $f$  et de  $\varphi$ : il vient alors immédiatement

$$I = 2i\pi\psi(x).$$

En un mot, l'intégrale  $\frac{I}{2i\pi}$  fournit la continuation analytique de la série (3).

4. Il reste à examiner pour quelles valeurs de  $x$  nous pourrions construire les contours  $C, \Gamma$  possédant les propriétés demandées.

Soient  $S, \Sigma$  deux aires comprenant l'origine, que nous supposons, pour fixer les idées, simplement connexes et dans lesquelles les fonctions  $f, \varphi$  sont respectivement holomorphes. Donnons-nous encore, pour un instant, la valeur de  $x$ : le lieu des points  $z$ , tels que les points  $t$  correspondants soient situés sur le contour de  $\Sigma$ , est une certaine courbe fermée  $c_x$  et un point  $t$  sera à l'intérieur ou à l'extérieur de  $\Sigma$ , suivant qu'il correspond à un point  $z$  extérieur ou intérieur à  $c_x$ .

Toutes les courbes  $c_x$  correspondant aux diverses valeurs de  $x$  seront d'ailleurs semblables entre elles.

Nous appellerons *produit* des aires  $S$  et  $\Sigma$ , et nous désignerons par la notation  $S\Sigma$ , l'aire lieu des points  $x$  tels que la courbe  $c_x$  soit comprise tout entière à l'intérieur de  $S$ : aire qui est limitée par la courbe lieu des points  $x$  tels, que  $c_x$  touche intérieurement le contour de  $S$ .

5. Ce produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs; car la définition précédente peut évidemment se remplacer par celle-ci:

*L'aire  $S\Sigma$  est formée par les points dont les affixes ne peuvent pas être obtenues en multipliant l'affixe d'un point extérieur à  $S$  par celle d'un point extérieur à  $\Sigma$ .*

6. A quelle condition cette aire  $S\Sigma$  sera-t-elle connexe? Considérons toutes les courbes  $c_x$  qui passent par un point déterminé  $\alpha$ , et supposons qu'il existe un arc  $\alpha\alpha_1$  intérieur à toutes ces courbes (ou pouvant avoir des points communs avec quelques unes d'entre elles) et partant du point  $\alpha$  pour aboutir à un point  $\alpha_1$  plus rapproché de l'origine que le premier. Alors, si l'on pose  $x_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha}x$ , on voit que la courbe  $c_{x_1}$  sera intérieure à  $c_x$ , quel que soit  $x$ ; et même on pourra aller de  $x$  à  $x_1$  par un arc (à savoir l'arc semblable à  $\alpha\alpha_1$ ) tel que, pour tout point  $y$  de cet arc, la courbe  $c_y$  soit intérieure à  $c_x$ .

Si donc le point  $x$  est intérieur à l'aire  $S\Sigma$ , il en est de même de tous les points de l'arc  $xx_1$ , et aussi de l'arc  $x_1x_2$  joignant le point  $x_1$  au point d'affixe  $x_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha}x_1$ ; et ainsi de suite. En un mot, on peut, sans sortir de l'aire  $S\Sigma$ , passer de tout point  $x$  intérieur à cette aire à des points infiniment voisins de l'origine.

Donc l'aire  $S\Sigma$  est connexe.

Il est clair, d'ailleurs, qu'on obtiendra une autre condition également suffisante, mais non nécessaire, en substituant, dans ce que nous venons de dire, l'aire  $S$  à l'aire  $\Sigma$  et inversement.

7. L'aire  $S\Sigma$  est celle dans laquelle nous pourrions faire varier  $x$  sans que la définition et les propriétés fondamentales de l'intégrale  $I$  cessent de subsister.

Si, en effet,  $x$  est intérieur à cette aire  $S\Sigma$ , on pourra prendre pour le contour  $C$  l'un quelconque de ceux qui contiennent  $c_x$  à leur intérieur, tout en étant eux mêmes intérieurs à  $S$ .

Au contraire, si  $x$  est extérieur à l'aire  $S\Sigma$ , le contour de  $\Sigma$  correspond à une courbe  $c_x$  qui sort de l'aire  $S$  et il en sera, a fortiori, de même de tout contour  $F$  intérieur à  $\Sigma$ .

8. Soient décrits, avec l'origine comme centre, un cercle de rayon  $K > k$  dans le plan de la variable  $z$ , un cercle de rayon  $L > l$  dans le plan de la variable  $t$ . Supposons que, dans ces cercles, les fonctions  $f(z)$ ,  $\varphi(t)$  aient chacune un certain nombre de points singuliers que nous supposons isolés, pour simplifier: soient

$$a_\mu$$

$$(\mu=1, 2, \dots, n)$$

les points singuliers de  $f(z)$ ,

$$b_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, p)$$

ceux de  $\varphi(t)$ . Nous joindrons les premiers à la circonférence de rayon  $K$ , les seconds à la circonférence de rayon  $L$ , par des rayons ou, plus généralement, par des spirales logarithmiques toutes semblables entre elles et ayant l'origine comme pôle.

Nous pourrions prendre, pour les aires  $S$  et  $\Sigma$ , celles qu'on obtient en pratiquant, suivant ces spirales, des sections dans les deux cercles précédents. L'aire  $S\Sigma$  sera alors celle qu'on déduira d'un cercle  $C$  ayant pour rayon la plus petite des quantités  $kL$  et  $lK$ , en y pratiquant des sections suivant des spirales logarithmiques semblables aux précédentes et partant des points

$$c_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu. \quad (\mu = 1, 2, \dots, n; \nu = 1, 2, \dots, p)$$

Donc la fonction  $\phi$  est holomorphe à l'intérieur de l'aire ainsi définie; comme, d'ailleurs, la forme des spirales logarithmiques employées est arbitraire, *les seuls points singuliers de  $\phi(x)$ , à l'intérieur du cercle  $C$ , sont les points  $c_{\mu\nu}$ .* C'est le résultat même que nous avons en vue.

9. Ce résultat peut être considéré comme généralisant, à un certain point de vue, celui qui figure dans ma thèse<sup>1</sup> et qui se rapporte aux points singuliers de la série

$$(8) \quad \Sigma C_m a_m x^m$$

où

$$C_m = \int_0^1 V(t) t^m dt.$$

Il présente, comme ce dernier, cette particularité d'être valable dans toute l'étendue du plan, tant en dehors qu'à l'intérieur du cercle de convergence: en un mot, de fournir une propriété du prolongement analytique d'une fonction donnée par son développement en série de puissances.

---

<sup>1</sup> Journal de M. Jordan, 4<sup>e</sup> série, tome 8; 1892; nos 35—37.

On doit toutefois observer qu'il lui manque, pour servir à la connaissance de ce prolongement analytique, un autre caractère important: ce caractère est l'invariance vis à vis de la transformation par laquelle on passe du développement de  $f(x)$  à celui de  $f(x+h)$  ( $h$  étant une constante quelconque).

Les difficultés que l'on rencontre dans l'étude des fonctions d'après leur développement taylorien tiennent, en effet, à la complication des formules qui lient entre eux les coefficients de ces deux développements (supposés ordonnés suivant les puissances de  $x$ ); et l'un des problèmes dont la solution serait le plus essentielle pour cette étude est la recherche de fonctions des coefficients invariants, non seulement vis à vis de la transformation que ces formules définissent (ce qui ne présenterait aucune difficulté, au moins pour les petites valeurs de  $h$ , et serait, d'autre part, sans utilité), mais encore par cette transformation, combinée avec l'addition d'un polynôme quelconque à  $f(x)$ .

Malheureusement nous ne connaissons guère, dans cet ordre d'idées, qu'un seul exemple d'invariance ou plutôt de covariance: c'est celui des dérivées de  $f(x)$  et, plus généralement, ainsi que je l'ai remarqué,<sup>1</sup> du symbole

$$D_x^\alpha f(x) = \int_0^x (x-z)^\alpha f(z) dz.$$

Quoiqu'il en soit, on serait très probablement conduit à des applications intéressantes par l'examen des cas où la série  $\phi(x)$  aurait un rayon de convergence supérieur au produit des rayons de convergence primitifs  $k$  et  $l$ : ce qui pourra se produire lorsque la quantité  $|\sqrt[m]{a_m}|$  ne tendra pas régulièrement vers  $\frac{1}{k}$ .

10. En terminant, signalons quelques formules analogues à la formule (4) et relatives aux séries de la forme  $a_m e^{-\lambda_m u}$ .

Soient

$$(9) \quad F(u) = \sum_m a_m e^{-\lambda_m u}$$

$$(10) \quad \Phi(v) = \sum_m b_m e^{-\lambda_m v}$$

---

<sup>1</sup> loc cit., n° 31, note.

deux telles séries, absolument convergentes pour certaines valeurs de  $R(u)$ <sup>1</sup> et de  $R(v)$ . Considérons la quantité

$$(11) \quad \frac{1}{2A} \int_{-A}^{+A} F(u + wi) \Phi(v - wi) dw.$$

Comme on a

$$\begin{aligned} & F(u + wi) \Phi(v - wi) \\ &= \sum_{m, m'} a_m b_{m'} e^{-(\lambda_m u + \lambda_{m'} v)} [\cos(\lambda_m - \lambda_{m'})w + i \sin(\lambda_m - \lambda_{m'})w], \end{aligned}$$

le développement de l'expression (11) comprendra deux parties: l'une (celle qui correspond à  $m = m'$ ) sera égale à  $\Psi(u + v)$ , où l'on a posé

$$(12) \quad \Psi(u) = \sum_m a_m b_m e^{-\lambda_m u}.$$

Quant aux termes restants, qui sont de la forme

$$(13) \quad a_m b_{m'} e^{-(\lambda_m u + \lambda_{m'} v)} \frac{\sin(\lambda_m - \lambda_{m'})A}{(\lambda_m - \lambda_{m'})A}, \quad (m \neq m')$$

ils constituent un ensemble qui tend vers zéro pour  $A$  infini; car chacun d'eux tend vers zéro et, d'autre part, la série qu'ils forment est uniformément convergente quel que soit  $A$ , puisque ses termes sont plus petits en valeur absolue que ceux de la série

$$\sum_{m, m'} a_m b_{m'} e^{-(\lambda_m u + \lambda_{m'} v)},$$

laquelle est absolument convergente, d'après les hypothèses faites sur  $F$  et  $\Phi$ .

Si donc nous appelons *valeur moyenne* de  $f(w)$  l'expression

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{+A} f(w) dw,$$

---

<sup>1</sup>  $R(u)$  désigne la partie réelle de  $u$ .

il viendra

$$\text{Val. moy. } (F(u + wi)\Phi(v - wi)) = \Psi(u + v).$$

On aura ainsi

$$\text{Val. moy. } [\zeta(u + wi)\zeta(v - wi)] = \zeta(u + v),$$

$\zeta$  étant la fonction de Riemann; et, plus généralement, le symbole  $D$  représentant une différentiation,

$$\text{Val. moy. } [D^p \zeta(u + wi)D^q \zeta(v - wi)] = D^{p+q} \zeta(u + v).$$

Les fonctions

$$\zeta(u)(1 - 2^{1-u}) = \Sigma (-1)^m m^{-u} \quad \text{et} \quad \frac{\zeta(2u)}{\zeta(u)} = \prod \frac{1}{1 + \frac{1}{p^u}}$$

ont des développements identiques à celui de  $\zeta$ , aux signes des termes près. On aura donc

$$\begin{aligned} & \text{Val. moy. } [\zeta(u + wi)(1 - 2^{1-u-wi})\zeta(v - wi)(1 - 2^{1-v+wi})] \\ &= \text{Val. moy. } \left( \frac{\zeta[2(u + wi)]}{\zeta(u + wi)} \frac{\zeta[2(v - wi)]}{\zeta(v - wi)} \right) = \zeta(u + v), \end{aligned}$$

et autres formules analogues.

En particulier, pour  $u$  réel, il vient

$$\begin{aligned} & \text{Val. moy. } |\zeta(u + wi)|^2 = \zeta(2u), \\ & \text{Val. moy. } |D^p \zeta(u + wi)|^2 = D^{2p} \zeta(2u), \\ & \text{Val. moy. } |\zeta(u + wi)(1 - 2^{1-u-wi})|^2 = \zeta(2u), \\ (14) \quad & \text{Val. moy. } \left| \frac{\zeta[2(u + wi)]}{\zeta(u + wi)} \right|^2 = \zeta(2u). \end{aligned}$$

Il est intéressant de remarquer que le second membre de cette dernière formule reste fini, pour  $u$  compris entre  $\frac{1}{2}$  et 1; et on peut se

demander si la formule ne subsisterait pas pour ces valeurs de  $u$ ; ce qui exigerait, bien entendu, la réalité de racines de l'équation <sup>1</sup>

$$(15) \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + wi\right) = 0.$$

Cenon, 18 août 1897.

<sup>1</sup> Il est probable qu'il ne faudrait pas chercher à démontrer la réalité des racines de l'équation (15) par des considérations de cette espèce, non plus que par toute autre voie reposant sur la décomposition de  $\zeta(u)$  en produit. Cette décomposition ne permet, en effet, d'utiliser que les propriétés suivantes de la fonction  $\zeta$ :

1°  $\zeta(u)$  (pour  $R(u) > 1$ ) est le produit de facteurs de la forme  $\frac{1}{1 - p^{-u}}$ , où les nombres  $p$  sont positifs et croissent indéfiniment;

2°  $\zeta(u)$  est uniforme dans tout le plan et égal au quotient, par  $\frac{u(u-1)}{2} \pi^{-\frac{u}{2}} \Gamma\left(\frac{u}{2}\right)$ , d'une fonction entière de genre zéro par rapport à  $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2$ .

Or rien ne porte à croire qu'il n'existe pas une infinité de fonctions satisfaisant aux conditions précédentes, sans avoir leurs zéros situés sur la droite  $R(u) = \frac{1}{2}$ .

Bien entendu, il se peut que les racines de l'équation (15) soit réelles sans que la formule (14) soit vraie et sans même que son premier membre ait un sens.