Recherches sur la Convergence des Séries de Fourier.

Par

HENRI LEBESGUE à Rennes.

I.

Soit $f(x)$ une fonction définie pour $0 \leqq x < 2\pi$; je la définis dans tout intervalle par la condition $f(x+2\pi)=f(x)$. Je suppose que $f(x)$ a une intégrale dans $(0, 2\pi)$, alors $f(x)$ a une intégrale dans tout intervalle fini.

Pour donner à ce qui suit toute la généralité possible, le mot *intégrale* devra être pris dans le sens étendu que je lui ai donné dans ma Thèse*). On verra que de cette extension ne résulte aucune complication, mais je dois rappeler que si ma définition de l'intégrale comprend celle de Riemann comme cas particulier lorsqu'il s'agit de fonctions bornées, il n'en est pas de même lorsqu'il s'agit de fonctions non bornées, et qu'avec ma définition $f(x)$ et $|f(x)|$ ont en même temps une intégrale, ou n'en ont pas.

On sait que la série

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \cos px + b_p \sin px,$$

où

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos px\,dx, \quad b_p = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\sin px\,dx,$$

est dite la série de Fourier relative à $f(x)$ et que la somme de ses $m+1$ premiers termes est:

$$S_m = \frac{1}{\pi}\int_{\beta}^{\beta+\pi} \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t} f(x+2t)\,dt.$$

---

*) *Intégrale, Longueur, Aire*, Annali di matematica, 1902. — Voir aussi mes *Leçons sur l'Intégration et la Recherche des fonctions primitives*, Paris, Gauthier-Villars, 1904.

Prenons $\beta = -\frac{\pi}{2}$ et partageons cette intégrale en deux autres respectivement étendues à $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ et $\left(0, +\frac{\pi}{2}\right)$; dans la première de ces deux intégrales changeons t en $-t$ on a:

$$S_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t}\,[f(x+2t) + f(x-2t)]\,dt.$$

Si la fonction f avait toujours la valeur particulière qu'elle prend pour la valeur considérée x de la variable, la série de Fourier se réduirait à son premier terme et S_m serait égale à $f(x)$. Donc, dans la formule précédente, on aurait $S_m = f(x)$ si dans le second membre on remplaçait la quantité entre crochets par $2f(x)$. Pour étudier *la convergence de la série de Fourier vers la fonction correspondante* $f(x)$, il suffit donc d'étudier la convergence vers zéro de l'une ou l'autre des intégrales

$$I_m = \pi[S_m - f(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(t)}{\sin t}\sin(2m+1)t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(t)\sin(2m+1)t\,dt;$$

dans lesquelles on a posé

$$\varphi(t) = \sin t\,\psi(t) = f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x).$$

L'intégrale I_m, prise sous sa première forme, a été l'objet de nombreux travaux qui ont fait connaître des conditions sous lesquelles, pour la valeur x, $f(x)$ est la somme de la série de Fourier correspondante. Je vais énoncer les principales de ces conditions parce qu'elles me serviront dans la suite.

1° (Condition de Dirichlet) *$\varphi(t)$ est continue pour $t = 0$ et n'a qu'un nombre fini de maxima et de minima autour de $t = 0$* (Journal de Crelle, tome IV).

2° (Condition de Lipschitz) *$\varphi(t)$ est continue pour $t = 0$ et, dans un certain intervalle autour de $t = 0$, on a:*

$$|\varphi(t+\delta) - \varphi(t)| < \mathsf{A}\delta^{\alpha} \quad (\mathsf{A} \text{ et } \alpha > 0 \text{ étant constants})$$

(Journal de Crelle, tome LXIII).

3° (Condition de Lipschitz-Dini) *$\varphi(t)$ est continue pour $t = 0$ et, dans un certain intervalle autour de $t = 0$, on a:*

$$|[\varphi(t+\delta) - \varphi(t)]\log\delta| < \sigma,$$

quelque soit le nombre positif σ (Dini, Sopra la Serie di Fourier, Pise, 1872).

4° (Condition de Jordan) *$\varphi(t)$ est continue pour $t = 0$ et, dans un certain intervalle autour de $t = 0$, elle est à variation bornée* (Comptes Rendus, 1881).

J'ai énoncé les conditions relatives à $\varphi(t)$ qui sont fournies immédiatement par les raisonnements, pour les applications il faut remarquer que ces conditions sont vérifiées dès que la fonction f satisfait à des conditions analogues; mais en énonçant seulement les conditions relatives à f on restreint la portée des énoncés sans gagner en simplicité. Par exemple la condition que $\varphi(t)$, qui est nulle pour $t=0$, soit continue en ce point est remplie si $f(x)$ est continue au point x; mais elle l'est aussi dans le cas plus général où x est ce que j'appellerai un *point régulier* de f, c'est-à-dire si $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent et vérifient l'égalité

$$f(x+0)+f(x-0)=2f(x);$$

enfin elle l'est dans des cas bien plus généraux encore*).

A la seconde forme de l'intégrale I_m on peut rattacher le raisonnement de Riemann sur la décroissance des coefficients des séries de Fourier (Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique, § X). Riemann démontre que pour une fonction bornée et intégrable les coefficients de la série de Fourier tendent vers zéro, de plus il montre (§ XIII) que cela n'est plus nécessairement vrai pour les fonctions non bornées et intégrables par sa méthode. Au contraire, si l'on adopte ma définition de l'intégrale, les coefficients de la série de Fourier d'une fonction ayant une intégrale tendent toujours vers zéro (Sur les Séries trigonométriques, Annales de l'Ecole Normale, 1903). Dans ce mémoire, remarquant que I_m, prise sous sa seconde forme, est l'un des coefficients de la série de Fourier relative à une fonction égale à ψ de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et à 0 de $\frac{\pi}{2}$ à 2π, j'ai été conduit à une condition que M. Dini avait démontrée dans le cas particulier où l'on adopte, pour l'intégrale, la définition de Riemann.

---

*) Relativement aux conditions 1, 2, 3 je dois encore faire quelques remarques.

A la condition de Dirichlet on ajoute souvent la restriction: φ n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité. Cela n'intervient pas dans le raisonnement et n'était supposé par Dirichlet que parce qu'il ne connaissait pas la définition générale de l'intégrale qu'a donnéé Riemann. D'ailleurs Dirichlet a levé lui même en partie cette restriction en étendant le sens du mot intégrale. (Voir le mémoire cité de Lipschitz).

La condition de Lipschitz est presque toujours énoncée d'une manière incorrecte que l'on peut reproduire ainsi:

2′ Autour de $t=0$, on a $|\varphi(\delta)| < A\delta^{\alpha}$.

Il est évident que 2 entraine 2′, mais la réciproque n'est pas vraie et le raisonnement de Lipschitz ne prouve pas que la condition 2′ entraine la convergence.

Cela est vrai cependant comme on le verra à l'aide de la condition 5, mais il faut remarquer que si l'on faisait subir à la condition 3 une transformation analogue à celle que je viens d'indiquer, on aurait un énoncé peut-être incorrect et en tous cas non justifié jusqu'à présent, à ma connaissance du moins.

5° (Condition de Dini) $|\psi(t)|$ *a une intégrale* (Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale, Pise, 1880)*).

On peut d'ailleurs, dans cet énoncé, remplacer $\psi(t)$ par $\chi(t)$,

$$\chi(t) = \frac{\sin t}{t} \psi(t) = \frac{\varphi(t)}{t}.$$

Je me propose de prouver ici qu'on peut aussi rattacher à la seconde forme de I_m les quatre premières conditions énoncées; celà nous conduira à une nouvelle condition de convergence qui, à mon avis, présente quelque intérêt. Les cinq conditions énoncées ont deux grands inconvénients. D'abord elles ne font pas connaître des cas de convergence de plus en plus étendus, mais seulement des cas différents de convergence empiétant un peu les uns sur les autres; aucun des cinq énoncés ne contient les quatre autres comme cas particuliers. Ensuite il est évidemment possible de trouver deux fonctions f_1 et f_2 satisfaisant à deux des énoncés que j'ai donnés sans que leur somme ne satisfasse à aucun d'eux; il faut donc ajouter aux fonctions représentables par leurs séries de Fourier que fournissent les cinq conditions énoncées, les fonctions qui sont sommes de celles-là. Mais une telle remarque ne présentera vraiment d'intérêt que si nous avons un procédé permettant de reconnaître si une fonction donnée appartient ou non à cette nouvelle catégorie de fonctions. Il faudrait pour celà entreprendre des recherches analogues à celles qui ont conduit M. Jordan à la notion de fonction à variation bornée et donner, par exemple, une propriété caractéristique de la somme d'une fonction, satisfaisant à la condition 3 et d'une fonction satisfaisant à la condition 5.

L'énoncé que nous obtiendrons contient les cinq précédents comme cas particuliers et, de plus, il s'applique à la somme de deux fonctions s'il s'applique à chacune d'elles.

II.

On sait en quoi consiste le raisonnement de Dirichlet. Raisonnant sur une intégrale qui s'écrit exactement comme notre première intégrale I_m, il suppose que la fonction $\varphi(t)$ qui y figure est positive et décroissante. Cela lui permet d'écrire l'intégrale sous la forme d'une suite alternée à termes décroissants. Or il est évident que les hypothèses faites sur φ n'interviennent dans cette transformation que par cette conséquence que $\psi = \frac{\varphi}{\sin t}$ est positive et décroissante. Nous allons donc pouvoir faire sur l'intégrale I_m écrite sous la seconde forme la transformation

*) Le signe «*valeur absolue*» a été mis pour le cas où l'on prendrait le mot intégrale dans le sens classique et non dans celui que je lui ai donné.

qu'utilise Dirichlet en supposant à ψ les propriétés indiquées; à cette modification, en apparence insignifiante, du raisonnement de Dirichlet nous trouverons grand avantage. Tandis que Dirichlet ne pouvait supposer, pour sa fonction φ, $\varphi(+0)=0$ sans que φ ne devienne identiquement nulle pour $t>0$, nous pourrons supposer $\varphi(+0)=0$ et celà est même l'hypothèse la plus simple, celle que nous devons tout d'abord examiner, car nous savons que $\varphi(+0)=0$ lorsque x est un point régulier pour f et à plus forte raison un point de continuité. On va voir qu'en faisant l'hypothèse $\varphi(+0)=0$ il suffira pour avoir des nombres comprenant I_m et convergeant vers la même limite de calculer le premier terme et la somme des deux premiers termes de la suite alternée, tandis que Dirichlet était obligé de prendre un nombre de termes croissant indéfiniment.

Puisque $\varphi(t)=\psi(t)\sin t$, les hypothèses indiquées sont les suivantes: $\psi(t)$ est une fonction positive décroissante et $\varphi(t)$ tend vers zéro avec t. Alors

$$I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\sin(2m+1)t\,dt=u_0(m)-u_1(m)+u_2(m)\cdots,$$

avec

$$u_i(m)=(-1)^i\int_{i\frac{\pi}{2m+1}}^{(i+1)\frac{\pi}{2m+1}}\psi(t)\sin(2m+1)t\,dt;$$

la suite écrite ne contient qu'un nombre fini de termes, elle est alternée et à termes décroissants en valeur absolue. Alors on a:

$$u_0(m)\geqq I_m\geqq u_0(m)-u_1(m),$$

ou

$$\int_0^{\frac{\pi}{2m+1}}\psi(t)\sin(2m+1)t\,dt\geqq I_m\geqq\int_0^{\frac{2\pi}{2m+1}}\psi(t)\sin(2m+1)t\,dt.$$

En valeur absolue ces deux intégrales sont au plus égales à

$$\int_0^{\frac{2\pi}{2m+1}}\varphi(t)\frac{|\sin(2m+1)t|}{\sin t}\,dt\leqq(2m+1)\int_0^{\frac{2\pi}{2m+1}}\varphi(t)\,dt\leqq 2\pi L_m,$$

L_m étant la limite supérieure dans $\left(0,\frac{2\pi}{2m+1}\right)$ de $\varphi(t)=\psi(t)\sin t$. Or L_m tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$, donc il en est de même de I_m.

Pour généraliser ce résultat supposons que ψ soit la différence de deux fonctions positives décroissantes ψ_1, ψ_2 telles que $\psi_1\sin t$ et $\psi_2\sin t$

tendent vers zéro avec t. Alors ψ est à variation bornée dans tout intervalle $\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$, si α est positif et inférieur à $\frac{\pi}{2}$. On pourra poser

$$\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \psi(t) = p(t) - n(t),$$

$p(t)$ et $n(t)$ étant les variations totales positive et négative de ψ dans $\left(t, \frac{\pi}{2}\right)$*). Mais on a aussi

$$\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \psi(t) = \left[\psi_2(t) - \psi_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[\psi_1(t) - \psi_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

et comme les fonctions entre crochets sont positives et décroissantes on a:

$$\psi_2(t) - \psi_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \geqq p(t), \qquad \psi_1(t) - \psi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \geqq n(t).$$

De ces inégalités et des hypothèses il résulte que $p(t)\sin t$ et $n(t)\sin t$ tendent vers zéro avec t, donc aussi que $v(t)\sin t$ tend vers zéro avec t, $v(t)$ désignant la variation totale $p(t) + n(t)$ dans $\left(t, \frac{\pi}{2}\right)$.

Réciproquement, si $v(t)\sin t$ tend vers zéro avec t, il en est de même de $p(t)\sin t$, de $n(t)\sin t$ et de $\psi_1(t)\sin t$, $\psi_2(t)\sin t$, si l'on prend

$$\psi_1(t) = \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left|\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| + n(t), \qquad \psi_2(t) = p(t) + \left|\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|.$$

De plus, ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions positives décroissantes, leur différence est ψ de sorte que ψ est bien de la forme considérée.

Avant d'énoncer le résultat obtenu je fais une remarque, qu'il fallait déjà employer pour arriver aux énoncés 1, 2, 3, 4, et qui ne diffère pas d'un théorème de Riemann qu'on peut énoncer ainsi: la convergence au point x de la série de Fourier relative à $f(x)$ ne dépend que de l'allure de $f(x)$ au voisinage du point considéré.

$f(x)$ ayant une intégrale dans tout intervalle, il en est de même pour $\varphi(t)$, par suite aussi pour $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\sin t}$, sauf cependant dans les intervalles où $\sin t$ s'annule. Dès lors, de la proposition que Riemann démontre au § X de son mémoire et qui a été rappelée précédemment, il résulte que l'intégrale I_m, écrite sous la seconde forme et par suite sous la première, n'est modifiée que d'une quantité tendant vers zéro avec $\frac{1}{m}$ si on l'étend à $(0, \alpha)$ compris dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ au lieu de l'étendre à $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

---

*) J'emploie ici les dénominations adoptées au chapitre IV de mes Leçons sur l'Intégration et la Recherche des fonctions primitives. Il suffit d'ailleurs de savoir que, par leurs définitions mêmes, $p(t)$ et $n(t)$ sont les deux plus petites fonctions *positives et décroissantes* dont la différence est égale à $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \psi(t)$.

Grâce à cette remarque on peut, dans ce qui précède, remplacer $\frac{\pi}{2}$ par α et énoncer le résultat suivant:

6. *La série de Fourier converge au point x vers la fonction s'il est possible de trouver $\alpha > 0$ tel que, quelque soit $t \neq 0$ dans $(0, \alpha)$, $\psi(t)$ soit à variation bornée dans (t, α), la variation totale correspondante $v(t)$ croissant assez lentement avec $\frac{1}{t}$ pour que $tv(t)$ tende vers zéro avec t.*

Dans cet énoncé, comme dans l'énoncé 5, on peut remplacer $\psi(t)$ par $\chi(t) = \psi(t)\frac{\sin t}{t}$. Celà résulte de ce que $\frac{\sin t}{t}$ est à variation bornée et d'une formule, concernant la variation totale d'un produit, que je rappelle.

Soient f_1 et f_2 deux fonctions, dont les variations totales, prises dans (t, α), sont p_1, n_1, v_1; p_2, n_2, v_2. Comme on a:

$$f_1(t)f_2(t) = [p_1 - n_1 + f_1(\alpha)]\,[p_2 - n_2 + f_2(\alpha)],$$

le produit $f_1(t)\cdot f_2(t)$ est à variation bornée, sa variation totale étant au plus égale à

$$[p_1 + n_1 + |f_1(\alpha)|]\,[p_2 + n_2 + |f_2(\alpha)|] = [v_1 + |f_1(\alpha)|]\,[v_2 + |f_2(\alpha)|].$$

L'application de cette formule au remplacement indiqué de $\psi(t)$ par $\chi(t)$ est immédiate; cette même formule va nous montrer que l'énoncé 6 contient l'énoncé 4, donc l'énoncé 1.

Soit, comme le suppose l'énoncé 4, $\varphi(t)$ continue à l'origine et à variation bornée; soit $v(t)$ sa variation totale de 0 à t, $v(t)$ est continue et nulle au point $t = 0$. La variation totale de $\varphi(t)$ dans (t, β) $(t < \beta)$ est $v(\beta) - v(t)$; celle de $\psi(t)$ dans le même intervalle sera donc inférieure à

$$[v(\beta) - v(t) + |\varphi(\beta)|]\left[\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{\sin\beta} + \left|\frac{1}{\sin\beta}\right|\right].$$

La variation totale de ψ de β à α $(\beta < \alpha)$ étant M, la variation totale V de ψ dans (t, α) sera au plus

$$[v(\beta) - v(t) + |\varphi(\beta)|]\,\frac{1}{\sin t} + M;$$

or on peut prendre β assez petit pour que $v(\beta) + |\varphi(\beta)|$ soit aussi petit que l'on veut, puisque, quand t tend vers zéro, on peut prendre β tendant aussi vers zéro, donc $V \sin t$ tend vers zéro avec t, la condition 6 est remplie.

La réciproque n'est pas vraie; l'énoncé 6 s'applique parfois là où l'énoncé 4 ne s'applique pas.

Pour en donner un exemple, je remarque d'abord que, f n'étant soumise qu'à la condition d'avoir une intégrale pour avoir une série de

Fourier, φ ne sera soumise qu'à la condition d'avoir une intégrale et de vérifier les relations

$$\varphi(-t) = \varphi(t) = \varphi(t+\pi).$$

On peut donc prendre, Lt désignant la valeur principale du logarithme,

$$\varphi(t) = \frac{1}{Lt} + t \sin \frac{1}{tLt},$$

dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, — on verra plus loin pourquoi cet intervalle est choisi, — à l'intérieur de $\left(\frac{1}{e}, \frac{\pi}{2}\right)$ on prendra ensuite $\varphi(t)$ comme on le voudra, ayant cependant une intégrale. Je vais raisonner uniquement sur $\left(0, \frac{1}{e}\right)$. Pour $t = 0$, on prend comme on sait $\varphi(t) = 0$, alors $\varphi(t)$ est continue à l'origine et l'on a:

$$\chi(t) = \frac{\varphi(t)}{t} = \frac{1}{tLt} + \sin \frac{1}{tLt}; \qquad \chi'(t) = -\frac{1+Lt}{(tLt)^2}\left(1 + \cos \frac{1}{tLt}\right).$$

Dans $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ $\chi'(t)$ est positive ou nulle, donc $\chi(t)$ croît. L'énoncé 6 s'applique. Mais l'énoncé 4 ne s'applique pas; pour le faire voir, $\frac{1}{Lt}$ étant à variation bornée, il suffira de montrer que $\xi(t) = t \sin \frac{1}{tLt}$ est à variation non bornée. Et pour celà il suffira de montrer qu'on peut choisir les nombres t_p positifs et décroissant avec $\frac{1}{p}$ de manière que la série $\Sigma|\xi(t_p) - \xi(t_{p-1})|$ soit divergente. Posons:

$$t_p L t_p = -\frac{1}{(2p+1)\frac{\pi}{2}};$$

quelque soit l'entier positif p, cette équation définit une valeur t_p et une seule dans $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ et t_p décroît évidemment avec $\frac{1}{p}$. Or $\xi(t_p) = (-1)^p t_p$, donc $\Sigma|\xi(t_p) - \xi(t_{p-1})| = \Sigma(t_p + t_{p-1})$, et il suffira de montrer que Σt_p est divergente pour prouver que $\xi(t)$ est à variation non bornée. On a, $(p \geqq 1)$,

$$t_p \geqq \frac{1}{(2p+1)\frac{\pi}{2} L\left[(2p+1)\frac{\pi}{2}\right]\left\{1 + \frac{LL\left[(2p+1)\frac{\pi}{2}\right]}{L\left[(2p+1)\frac{\pi}{2}\right] - 1}\right\}} \text{*)}.$$

---

*) Voici comment on peut obtenir cette inégalité. t_p est racine de l'équation

$$F(t) = t\,Lt + a = 0, \qquad \left(a = \frac{2}{(2p+1)\pi}\right).$$

On a $F'(t) < 0$, $F''(t) > 0$, dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ considéré; par suite, si θ_0 est

La quantité entre accolades tend vers 1 quand p croît et, si l'on supprime cette quantité, il reste dans le second membre le terme général d'une série qui, d'après un critère connu, est divergente; la série $\Sigma(t_p)$ est donc divergente.

L'énoncé 6 contenant comme cas particulier l'énoncé 4 contient aussi l'énoncé 1. Mais il ne contient pas les énoncés 2, 3, 5; l'énoncé 2 étant contenu dans les énoncés 3 et 5, il suffira de donner un exemple de fonctions satisfaisant à 2 sans satisfaire à 6. Si $\varphi(t)$ était, dans $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, égale à $(-1)^p \frac{1}{p}$ pour $t = \pm \frac{1}{p}$ (p entier) et linéaire dans chacun des intervalles $\left(\pm\frac{1}{p+1}, \pm\frac{1}{p}\right)$ elle serait à variation non bornée, mais elle satisferait à l'énoncé 2. Qu'elle soit à variation non bornée, celà se voit comme précédemment en prenant $t_p = \frac{1}{p}$; je montre qu'elle satisfait à l'énoncé 2. On a:

$$\left|\varphi\left(\frac{1}{p}\right) - \varphi\left(\frac{1}{p+1}\right)\right| = \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1},$$

or

$$\frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}}{\sqrt[2]{\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}}}$$

a pour limite 2 quand p augmente indéfiniment, donc on peut trouver le nombre A tel que, pour $t = \frac{1}{p+1}$, $\delta = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$, on ait

$$|\varphi(t+\delta) - \varphi(t)| < A\sqrt{\delta};$$

A étant ainsi déterminé, cette inégalité a lieu, on le voit facilement, quels que soient t et $\delta > 0$. L'énoncé 2 s'applique donc.

---

dans $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, ou bien t_0 est inférieur à t_p, ou bien $\theta_1 = \theta_0 - \frac{F(\theta_0)}{F'(\theta_0)}$, que l'on obtient en appliquant à θ_0 la correction de Newton, est inférieur à t_p.

Si l'on prend $\theta_0 = \frac{1}{e}$, on a $\theta_1 = -\infty$; celà ne peut servir. Mais de l'équation proposée on tire $t = -\frac{a}{Lt}$; si dans le second membre on prend $t = \frac{1}{e}$ on trouve la nouvelle valeur approchée $t = a$. Pour $\theta_0 = a$, $\theta_1 = 0$ ce qui ne peut encore servir. Mais si l'on fait $t = a$ dans le second membre de $t = -\frac{a}{Lt}$ on trouve $-\frac{a}{La}$ qui, prise pour valeur θ_0, conduit à l'inégalité du texte, car il est évident que $-\frac{a}{La}$ est supérieur à t_p, pour $p \geqq 1$.

Désignons par $\varphi_1(t)$ la fonction qui vient d'être formée et prenons dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\varphi(t) = a_1\varphi_1\left(t-\frac{1}{1}\right) + a_2\varphi_1\left(t-\frac{1}{2}\right) + \cdots + a_p\varphi_1\left(t-\frac{1}{p}\right) + \cdots,$$

les a_p formant une série absolument convergente. Alors φ est continue mais est à variation non bornée dans tout intervalle contenant une valeur de la forme $\frac{1}{p}$, il en est donc de même de $\psi(t)$, l'énoncé 6 ne s'applique pas. Mais l'énoncé (2) s'applique, car on a évidemment

$$|\varphi(t+\delta) - \varphi(t)| < A(|a_1| + |a_2| + \cdots)\sqrt{\delta},$$

A étant la constante déterminée précédemment.

L'énoncé 6 ne contenant pas l'énoncé 2, ne contient pas à plus forte raison les énoncés 3 et 5. D'ailleurs 6 n'est pas contenu dans 3, ni dans 5, et à plus forte raison dans 2, car on sait qu'il existe des fonctions satisfaisant à 1 sans satisfaire ni à 2, ni à 3, ni à 5. On peut aussi, pour préciser les rapports entre 3, 5, 6, remarquer que la fonction

$$\varphi(t) = \frac{1}{Lt} + t\sin\frac{1}{tLt},$$

à laquelle s'applique, on l'a vu, l'énoncé 6, donne une fonction $\psi(t)$ qui n'a pas d'intégrale, donc l'énoncé 5 ne s'applique pas. D'autre part on a:

$$\lim_{\delta=0}[\varphi(\delta) - \varphi(0)]L\delta = 1,$$

donc l'énoncé 3 ne s'applique pas.

En résumé nous n'avons que trois énoncés différents, les énoncés 3, 5, 6, et ceux-là sont différents; celà est bien connu pour 3 et 5, je l'ai prouvé pour le dernier. Pour démontrer que l'énoncé qui va être obtenu contient tous ceux jusqu'ici examinés il suffira de démontrer qu'il contient 3, 5, 6.

III.

C'est en examinant le raisonnement de Lipschitz, qui conduit aux énoncés 2 et 3, que j'ai été amené à la condition de convergence qui a été annoncée au début.

Le raisonnement de Lipschitz est beaucoup moins connu que celui de Dirichlet, mais je puis en résumer les points qui m'ont paru essentiels comme il suit.

Posant comme Dirichlet

$$u_i(m) = (-1)^i \int_{i\frac{\pi}{2m+1}}^{(i+1)\frac{\pi}{2m+1}} \frac{\varphi(t)}{\sin t}\sin(2m+1)t\,dt,$$

Lipschitz obtient

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(t)}{\sin t} \sin(2m+1)t\,dt = u_0 - u_1 + u_2 \cdots;$$

mais la suite limitée du second membre n'est pas nécessairement alternée, ni à termes décroissants. L'évaluation de limites inférieures et supérieures pour cette suite, ne peut plus se faire par le procédé de Dirichlet; dans le procédé de calcul qu'emploie Lipschitz le groupement deux à deux des termes de la suite joue un rôle fondamental. De sorte que Lipschitz évalue en réalité les suites écrites sous l'une des deux formes

$$(u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \cdots,$$
$$u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \cdots$$

C'est là ce qui, à mes yeux, est essentiel dans le raisonnement de Lipschitz On peut remarquer que, bien que le calcul de Lipschitz diffère beaucoup de celui de Dirichlet, le groupement de termes qu'emploie Lipschitz est aussi utilisé par Dirichlet. C'est parce que ce groupement, opéré de l'une ou de l'autre des deux manières indiquées, donne dans le cas de Dirichlet une suite à termes tous de même signe que celui-ci peut écrire les inégalités qu'il utilise. Ainsi le groupement des termes, qui conduisit Lipschitz et Dini aux conditions 2 et 3, est aussi utilisé pour l'étude du cas 1 et par suite aussi des cas 4 et 6. Si l'on remarque enfin que Riemann (§ X) utilise exactement le même groupement pour arriver au théorème d'où se déduit la condition 5, on sera conduit à essayer de l'employer plus systématiquement.

Posons donc:

$$u_i(m) = (-1)^i \int_{i\frac{\pi}{2m+1}}^{(i+1)\frac{\pi}{2m+1}} \psi(t) \sin(2m+1)t\,dt;$$

$$\begin{aligned} I_m &= u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \cdots \\ &= u_0(m) - [v_1(m) + v_2(m) + \cdots], \end{aligned}$$

si

$$v_i = \int_{(2i-1)\frac{\pi}{2m+1}}^{2i\frac{\pi}{2m+1}} \sin(2m+1)t\left[\psi(t) - \psi\left(t + \frac{\pi}{2m+1}\right)\right] dt.$$

Supposons-nous placés dans des conditions telles que $u_0(m)$ tende vers zéro avec $\frac{1}{m}$ et évaluons la suite des v. Comme on a

$$|v_i| \leqq \int_{(2i-1)\frac{\pi}{2m+1}}^{2i\frac{\pi}{2m+1}} \left| \psi(t) - \psi\left(t + \frac{\pi}{2m+1}\right) \right| dt,$$

on aura aussi

$$|\Sigma v_i| \leqq \int_{\frac{\pi}{2m+1}}^{\alpha} \left| \psi(t) - \psi\left(t + \frac{\pi}{2m+1}\right) \right| dt,$$

si $(0, \alpha)$ est l'intervalle auquel est étendue l'intégrale I_m.*)

Donc, si l'intégrale du second membre de l'inégalité précédente tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$, ou, ce qui est plus particulier, si l'on a:

$$\lim_{\delta=0} \int_{\delta}^{\alpha} |\psi(t+\delta) - \psi(t)| \, dt = 0,$$

I_m tend vers zéro; c'est un cas de convergence de la série de Fourier. Mais il reste à étudier la convergence de $u_0(m)$ vers zéro.

Nous avons déjà vu que $u_0(m)$ tend vers zéro quand $\varphi(t)$ est continue au point $t = 0$, en particulier par conséquent quand le point x considéré est un point régulier. Cette remarque suffirait pour conduire à un énoncé comprenant comme cas particuliers les énoncés 1, 2, 3, 4, 6 et comprenant aussi l'énoncé 5 si on ne l'appliquait qu'en des points réguliers. Mais il me paraît intéressant de conserver à l'énoncé 5 toute sa généralité parce que, comme je l'ai fait voir ailleurs, on peut alors s'en servir pour définir des fonctions non intégrables au sens de Riemann et cependant représentables par leur série de Fourier en tout point.

On a:

$$|u_0| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2m+1}} \frac{\varphi(t)}{\sin t} \sin(2m+1)t \, dt \right| \leqq (2m+1) \int_0^{\frac{\pi}{2m+1}} |\varphi(t)| \, dt.$$

La fonction $|\varphi(t)|$ a une intégrale. J'ai démontré (Leçons sur l'Intégration, pages 123 et 124) que les points où une fonction, $|\varphi(t)|$ par exemple, ayant une intégrale n'est pas la dérivée de son intégrale indéfinie sont exceptionnels; il est par suite naturel de supposer tout d'abord que

*) Il y aurait lieu de tenir compte de ce que les derniers termes des suites $u_i(m)$, $v_i(m)$ n'ont pas nécessairement les mêmes formes que les autres; mais celà nous conduirait tout au plus à ajouter au second membre de l'inégalité précédente une quantité tendant vers zéro avec $\frac{1}{m}$.

$\int_0^t |\varphi(t)|\,dt$ admet une dérivée nulle à l'origine $t=0$, ce qui comprend en particulier le cas de $\varphi(t)$ continue. Alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2m+1}} |\varphi(t)|\,dt = \frac{\pi}{2m+1}\cdot \varepsilon_m,$$

ε_m tendant vers zéro avec $\frac{1}{m}$; $|u_0|$ tend donc vers zéro avec $\frac{1}{m}\cdot$

7. *La série de Fourier converge au point x vers la fonction, si l'intégrale de $|\varphi(t)|$ a une dérivée nulle pour $t=0$ et si la quantité*

$$\int_\delta^\alpha |\psi(t+\delta)-\psi(t)|\,dt, \qquad (\pi > \alpha > 0,\ \delta > 0)$$

tend vers zéro avec δ.

C'est l'énoncé que je voulais obtenir. On gagnerait probablement en généralité en groupant les termes 4 à 4 ou 6 à 6 etc. au lieu de les grouper deux à deux; en conservant la variable discontinue $\frac{\pi}{2m+1}$ au lieu de la variable continue δ; en étudiant mieux $u_0(m)$, etc. Je n'insiste pas sur ces généralisations et je me borne à l'énoncé 7.

Le raisonnement qui prouve, dans les conditions supposées, la convergence de $|u_0(m)|$ vers zéro, montre aussi la convergence vers zéro de

$$|u_0(m)| + |u_1(m)| + \cdots + |u_p(m)|$$

quel que soit le nombre fixe p. De sorte que, sans modifier la portée de l'énoncé 7, on peut remplacer l'intégrale de $|\psi(t+\delta)-\psi(t)|$ étendue de δ à α par l'intégrale de la même quantité étendue de $\lambda\delta$ à α, λ étant une quantité positive, constante, quelconque.

Il est plus intéressant de remarquer que l'on peut modifier la limite supérieure de la même intégrale; d'une façon plus précise, *si la quantité*

$$\int_\delta^\alpha |\psi(t+\delta)-\psi(t)|\,dt$$

*tend vers zéro avec δ, pour une certaine valeur de α prise à l'intérieur de $(0, \pi)$, il en sera de même pour toute valeur de α prise dans cet intervalle.**)

*) Il ne faudrait pas confondre cette propriété avec celle déjà démontrée d'après laquelle la convergence en un point ne dépend que de la nature de la fonction dans le voisinage de ce point. De la propriété que je rappelle et de la condition 1 il résulte que la convergence a lieu en un point régulier si $\varphi(t)$ n'a qu'un nombre fini de maxima et de minima dans $(0, \alpha)$ si petit que soit $\alpha > 0$. Mais si $\varphi(t)$ n'a

$\psi(t)$ ayant une intégrale dans tout intervalle (α, β), $(0 < \alpha < \beta < \pi)$, celà va résulter du théorème suivant:

Quelle que soit la fonction $\varrho(t)$, ayant une intégrale, l'intégrale

$$J(\varrho, \delta) = \int_\alpha^\beta |\varrho(t+\delta) - \varrho(t)|\, dt, \qquad (\alpha < \beta)$$

tend vers zéro avec δ.

Celà est évident si ϱ est continue, car alors la quantité sous le signe $\int$ tend uniformément vers zéro; pour le démontrer dans le cas général, je remarque tout d'abord que l'énoncé suppose ϱ définie dans un intervalle (α, γ) plus grand que (α, β) et qu'il ne faut considérer que les valeurs de δ au plus égales à $\gamma - \beta$. Maintenant je remarque que l'on a:

$$\text{(A)} \qquad J(\varrho, \delta) \leqq 2\int_\alpha^\gamma |\varrho(t)|\, dt;$$

$$\text{(B)} \qquad J(\varrho_1 + \varrho_2, \delta) \leqq J(\varrho_1, \delta) + J(\varrho_2, \delta).$$

De là résulte l'inégalité qui va nous donner le résultat annoncé

$$\text{(C)} \qquad J(\varrho, \delta) \leqq J(\varrho_1, \delta) + 2\int_\alpha^\gamma |\varrho - \varrho_1|\, dt.$$

ϱ ayant une intégrale, on peut toujours choisir $\varkappa$ assez grand pour que la contribution dans $\int_\alpha^\gamma |\varrho|\, dt$ des valeurs de ϱ supérieures en valeur absolue à $\varkappa$ soit plus petite que ε.

ϱ_1 sera la fonction égale à ϱ sauf quand $|\varrho|$ est supérieure à $\varkappa$ auquel cas on prendra $\varrho_1 = 0$. Alors l'inégalité (C) donne

$$J(\varrho, \delta) \leqq J(\varrho_1, \delta) + 2\varepsilon.$$

ε étant quelconque, il suffira de démontrer la propriété pour l'intégrale $J(\varrho_1, \delta)$ relative à la fonction *bornée* ϱ_1.

Divisons l'intervalle de variation $(-\varkappa, +\varkappa)$ en $2p$ parties égales $\left(\frac{\lambda\varkappa}{p}, \frac{(\lambda+1)\varkappa}{p}\right)$ $(\lambda = -p, -p+1, \cdots p-1)$ et soit ϱ'_λ une fonction égale à $\frac{\lambda\varkappa}{p}$ quand ϱ_1 satisfait à l'inégalité $\frac{\lambda\varkappa}{p} \leqq \varrho_1 < \frac{(\lambda+1)\varkappa}{p}$, et nulle

---

qu'un nombre fini de maxima et de minima dans un certain intervalle $(0, \alpha)$, il n'en est pas nécessairement de même dans tout intervalle $(0, \alpha)$.

Ce que je vais démontrer dans le texte c'est que l'énoncé 7 ne peut être vérifié dans un intervalle $(0, \alpha)$ sans l'être dans tout autre intervalle $(0, \beta)$. La même propriété est exacte en ce qui concerne l'énoncé 5.

quand ϱ_1 ne satisfait pas à cette inégalité. On peut prendre p assez grand pour que l'intégrale

$$\int_\alpha^\gamma (\varrho_1 - \varrho'_{-p} - \varrho'_{-p+1} - \cdots - \varrho'_p)\,dt$$

soit inférieure à ε, alors de (B) et (C) il résulte

$$J(\varrho_1, \delta) \leqq \sum_{\lambda=-p}^{+p} J(\varrho'_\lambda, \delta) + 2\varepsilon.$$

Et il suffit de démontrer la propriété pour les fonctions telles que ϱ'_λ qui ne prennent que deux valeurs. Soit donc ϱ' une fonction ayant une intégrale et ne prenant que deux valeurs 0 et a. Soit E l'ensemble mesurable des points où ϱ' diffère de 0. Cet ensemble peut être enfermé dans une infinité dénombrable d'intervalles I dont la somme des longueurs ne surpasse la mesure de E que de η; on peut ensuite ne conserver qu'un nombre fini des I, les $\mathfrak{J}$, tout en ne modifiant la longueur totale des I que d'une quantité inférieure à η. Soit ϱ'' et ϱ''' deux fonctions prenant la valeur a respectivement pour les points des I et des $\mathfrak{J}$ et nulles ailleurs. On a évidemment

$$\int_\alpha^\gamma |\varrho' - \varrho''|\,dt \leqq |a|\,\eta, \quad \int_\alpha^\gamma |\varrho'' - \varrho'''|\,dt \leqq |a|\,\eta;$$

par suite (inégalité (C))

$$J(\varrho', \delta) \leqq J(\varrho''', \delta) + 4\,|a|\,\eta,$$

et il suffit de démontrer le théorème pour $J(\varrho''', \delta)$.

Mais ϱ''' étant bornée et n'ayant qu'un nombre fini de points de discontinuité, on peut toujours trouver $\varrho^{(4)}$ continue et telle que l'on ait:

$$\int_\alpha^\beta |\varrho''' - \varrho^{(4)}|\,dt < \varepsilon,$$

alors

$$J(\varrho''', \delta) \leqq J(\varrho^{(4)}, \delta) + 2\varepsilon,$$

et comme la propriété est évidente pour la fonction $\varrho^{(4)}$ continue, elle est vraie dans le cas général.

On peut conclure de là, en particulier, et celà sera utilisé plus loin, que, *pour que la seconde des conditions de l'énoncé 7 soit remplie, il faut et il suffit que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on puisse déterminer $\alpha > 0$ de manière que l'on ait:*

$$\int_\delta^\alpha |\psi(t+\delta) - \psi(t)|\,dt < \varepsilon,$$

dès que δ est assez petit.

On pourrait aussi transformer la première des conditions de l'énoncé 7, je me contenterai d'indiquer un résultat que l'on vérifiera facilement. Un ensemble mesurable E étant donné, appelons densité moyenne de E dans (a, b) le rapport de la mesure de la partie de E contenue dans (a, b) à la mesure de (a, b). La densité de E en un point P sera la limite, si elle existe, de la densité moyenne de E dans des intervalles (a, b) contenant P et dont les longueurs tendent vers zéro. Avec ces définitions on peut dire que $|\varphi(t)|$, supposée bornée, est au point $t = 0$ la dérivée de son intégrale indéfinie si, et seulement si, quel que soit $\varepsilon > 0$, l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles $|\varphi(t)|$ surpasse ε est de densité nulle au point $t = 0$. Mais cet énoncé n'est exact que si $|\varphi(t)|$ est bornée.

Une autre remarque doit être faite: *On peut remplacer dans l'énoncé 7* $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\sin t}$ *par* $\chi(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$. On a, en effet

$$\chi(t+\delta) - \chi(t) = [\psi(t+\delta) - \psi(t)]\,\frac{\sin(t+\delta)}{t+\delta} + R(\delta),$$

si

$$R(\delta) = \psi(t)\left[\frac{\sin(t+\delta)}{t+\delta} - \frac{\sin t}{t}\right].$$

D'après le théorème des accroissements finis, $R(\delta)$ est égal à $\delta\psi(t)$ multiplié par la dérivée de $\frac{\sin t}{t}$ prise pour une valeur τ comprise entre t et $t+\delta$. Mais comme l'on a:

$$\lim_{\tau=0} \frac{1}{\tau}\left(\frac{\sin t}{t}\right)'_{t=\tau} = \lim_{\tau=0} \frac{\tau\cos\tau - \sin\tau}{\tau^3} = -\frac{1}{3},$$

on pourra toujours trouver un nombre A tel que, dans l'intervalle (δ, α) dont on s'occupe, on ait:

$$|R(\delta)| < |\psi(t)| \cdot \delta \cdot A\tau;$$

mais on a:

$$\delta \leqq t \leqq \tau \leqq t + \delta \leqq 2t,$$

donc

$$|R(\delta)| < 2A\delta\,|\varphi(t)| \cdot \frac{t}{\sin t}.$$

$|\varphi(t)|$ ayant une intégrale dans tout intervalle, $\int_\delta^\alpha |R(\delta)|\,dt$ tend vers zéro avec δ. Par suite, de l'égalité du début il résulte que les deux quantités $|\psi(t+\delta) - \psi(t)|$, $|\chi(t+\delta) - \chi(t)|$, intégrées de δ à α, tendent vers zéro en même temps.

IV.

Je vais maintenant montrer que l'énoncé 7 contient tous ceux précédemment examinés; il suffit pour celà de montrer qu'il contient les énoncés 3, 5, 6.

Je traite d'abord le cas de l'énoncé 5; lorsqu'on est dans les conditions de cet énoncé $|\psi(t+\delta)-\psi(t)|$ intégrée de 0 à α tend vers zéro avec δ, donc il en est de même à plus forte raison si l'on n'intégre cette quantité que de δ à α. La seconde des conditions de l'énoncé 7 est remplie. De plus $u_0(m)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$, car

$$|u_0(m)| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2m+1}} \psi(t)\sin(2m+1)t\,dt\right| \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2m+1}} |\psi(t)|\,dt,$$

et cette dernière intégrale tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$. Mais dans l'énoncé 7 la condition générale: $u_0(m)$ *tend vers zéro* a été remplacée par une condition plus particulière: *l'intégrale de* $|\varphi(t)|$ *a une dérivée nulle pour* $t=0$, et c'est cette condition qu'il faut montrer satisfaite dans le cas de l'énoncé 5.

$\psi(t)$ ayant une intégrale dans $(0, t)$, je pose $\Psi(t)=\int_0^t|\psi(t)|\,dt$; $\Psi(t)$ est une fonction continue, nulle pour $t=0$. On a:

$$\frac{1}{t}\int_0^t|\varphi(t)|\,dt = \frac{1}{t}\int_0^t|\psi(t)|\sin t\,dt = \frac{\sin t}{t}\Psi(t) - \frac{1}{t}\int_0^t \Psi(t)\cos t\,dt;$$

les deux termes du troisième membre tendent vers zéro avec t, celà est évident pour le premier de ces termes et celà se voit pour le second en remarquant qu'il fournit à la limite la dérivée pour $t=0$ de l'intégrale de 0 à t de la fonction continue $\Psi(t)\cos t$. Donc le premier membre, qui fournit à la limite la dérivée pour $t=0$ de $\int_0^t|\varphi(t)|\,dt$, tend vers zéro avec t et les conditions de l'énoncé 7 sont remplies.

Dans le cas où les conditions de l'un des énoncés 3 ou 6 sont remplies, la première condition de l'énoncé 7 est remplie, il va suffire de s'occuper de la seconde.

Dans le cas de l'énoncé 6, la fonction ψ est la différence de deux autres fonctions ψ positives et décroissantes pour $t>0$ et relatives à deux fonctions φ continues au point 0; comme l'énoncé 7 s'applique évidemment à la somme de deux fonctions quand il s'applique à ces fonctions il va suffire de montrer que la seconde des conditions de l'énoncé 7 est remplie quand ψ est positive, décroissante pour $t > 0$ et φ continue au point 0.

Dans ces conditions, on a:

$$\int_\delta^\alpha |\psi(t+\delta) - \psi(t)|\, dt = \int_\delta^\alpha [\psi(t) - \psi(t+\delta)]\, dt = \int_\delta^{2\delta} \psi(t)\, dt - \int_\alpha^{\alpha+\delta} \psi(t)\, dt.$$

La dernière intégrale tend vers zéro; quant à la première, si $L(\delta)$ désigne la limite supérieure de φ dans $(\delta, 2\delta)$, elle vérifie la relation

$$0 < \int_\delta^{2\delta} \psi(t)\, dt < \frac{L(\delta)}{\delta} \int_\delta^{2\delta} dt = 2L(\delta);$$

puisque φ est continue au point 0, $L(\delta)$ tend vers zéro avec δ, les conditions de l'énoncé 7 sont remplies.

On peut présenter cette démonstration sous une forme géométrique assez élégante. Je trace la courbe ou l'ensemble de points $y = \psi(x)$, les axes Ox, Oy étant rectangulaires. Soit C cette courbe, $C(\delta)$ celle qu'on en déduit en déplaçant C le long de Ox de la longueur δ. L'intégrale $\int_\delta^\alpha |\psi(t+\delta) - \psi(t)|\, dt$ est la somme des aires (prises toutes positivement) comprises entre C, $C(\delta)$ et les deux parallèles à Oy d'abscisses δ et α. Dans la translation qui change C en $C(\delta)$ chaque point de C décrit un segment de longueur δ parallèle à Ox et, si ψ est décroissante, deux tels segments n'empiètent jamais l'un sur l'autre. De sorte que l'aire balayée dans la translation par la partie de C correspondant à $\delta \leqq x \leqq \alpha + \delta$, aire qui est toujours au moins égale à l'intégrale à calculer, peut ici être évaluée en multipliant δ par la mesure de la projection sur Oy de la partie utilisée de C. Ce qui donne pour l'aire balayée au plus

$$\delta[\psi(\delta) - \psi(\alpha+\delta)];$$

or dire que φ est continue au point 0, c'est dire que $\delta\psi(\delta)$ tend vers zéro avec δ, l'aire balayée a pour limite zéro, il en est de même de $\int_\delta^\alpha |\psi(t+\delta) - \psi(t)|\, dt$.

Plaçons-nous maintenant dans les conditions de l'énoncé 3 et l'on va voir immédiatement que la 2ième condition de l'énoncé 7, prise sous sa seconde forme, est vérifiée. σ étant arbitrairement petit positif, il lui correspond $(0, \alpha)$ dans lequel on a:

$$|\varphi(t+\delta) - \varphi(t)| \log\frac{1}{\delta} < \sigma,$$

c'est l'hypothèse. On déduit de là

$$|\chi(t+\delta)-\chi(t)| = \left|\frac{\varphi(t+\delta)-\varphi(t)}{t+\delta}+\varphi(t)\left(\frac{1}{t+\delta}-\frac{1}{t}\right)\right|$$
$$\leqq \frac{\sigma}{t\log\frac{1}{\delta}}+\frac{\sigma}{\log\frac{1}{\delta}}\,\frac{\delta}{t(t+\delta)} < \sigma\left(\frac{1}{t\log\frac{1}{\delta}}+\frac{\delta}{t^2}\right),$$

donc, en supposant $\alpha < 1$,

$$\int_\delta^\alpha |\chi(t+\delta)-\chi(t)|\,dt < \sigma\left[\frac{\log\frac{\alpha}{\delta}}{\log\frac{1}{\delta}}+\delta\cdot\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\alpha}\right)\right] < 3\sigma;$$

la seconde condition de l'énoncé 7 est vérifiée.

Ainsi l'énoncé 7 comprend bien tous ceux que j'avais cités. Je pourrais de même montrer qu'il comprend tous les énoncés donnés par M. Dini aux pages 100 à 105 de son livre sur la série de Fourier; mais comme la vérification ne présente pas de difficultés je me bornerai à faire une remarque.

Loin d'introduire des énoncés plus compliqués en réunissant en un seul ces énoncés de M. Dini on gagne beaucoup en simplicité; il y a plus. Certains des énoncés de M. Dini permettent d'affirmer qu'il y aura convergence lorsqu'une certaine propriété aura lieu, mais on ne sait pas reconnaître quand cette propriété a lieu. Par exemple on peut affirmer la convergence si l'on a $\varphi(t) = \varrho(t)\,\omega(t)$, ϱ et ω satisfaisant à certaines conditions; mais on ne sait pas aborder l'étude du problème consistant à essayer de reconnaître si $\varphi(t)$ donnée est un tel produit. Au contraire l'énoncé 7 ne suppose que des opérations bien étudiées depuis longtemps. Sans doute on ne sait pas effectuer ces opérations dans tous les cas et celà ne doit pas surprendre, car il n'est pas d'opération, si simple soit-elle en apparence, que l'on sache effectuer sur toute fonction donnée: quand une fonction est donnée on ne sait pas nécessairement, par exemple, calculer sa valeur en un point. Mais les opérations que suppose l'énoncé 7 sont de celles que l'on a l'habitude d'effectuer, de celles qui sont en général possibles sur les fonctions qui se présentent d'elles-mêmes en analyse et dont l'étude a, du moins, été faite assez pour que l'on puisse aborder le problème consistant à reconnaître si l'énoncé 7 s'applique ou non à un exemple donné.

Je ne veux pas dire que l'énoncé 7 enlève tout intérêt aux énoncés de M. Dini et à ceux que j'ai précédemment étudiés; il est évidemment toujours avantageux d'avoir des énoncés particuliers moins généraux, mais plus maniables dans certains cas; il est aussi avantageux d'avoir plusieurs formes des mêmes énoncés, c'est pourquoi je vais donner une nouvelle transformation de la deuxième des conditions de l'énoncé 7.

Pour obtenir cette nouvelle forme, il suffira de reprendre le calcul qui a prouvé que 7 contenait 3. Posons

$$\chi(t+\delta)-\chi(t)=\frac{\varphi(t+\delta)-\varphi(t)}{t}+S(\delta),$$

$$S(\delta)=\varphi(t+\delta)\left(\frac{1}{t+\delta}-\frac{1}{t}\right)=\varphi(t+\delta)\frac{\delta}{t(t+\delta)},$$

$$\int_\delta^\alpha |S(\delta)|\,dt \leqq \delta\int_\delta^\alpha \frac{|\varphi(t+\delta)|}{t^2}\,dt.$$

Je pose $\Phi_1(t)=\int_0^t|\varphi(t)|\,dt$, alors l'intégration par parties donne

$$\int_\delta^\alpha |S(\delta)|\,dt \leqq \frac{\delta\Phi_1(\alpha+\delta)}{\alpha^2}-\frac{\Phi_1(2\delta)}{\delta}+2\delta\int_\delta^\alpha\frac{\Phi_1(t+\delta)}{t^3}\,dt.$$

Supposons remplie la première condition de l'énoncé 7, c'est-à-dire supposons que $\Phi_1(t)$ ait une dérivée nulle à l'origine, alors, quel que soit $\varepsilon>0$, on peut toujours prendre α assez petit pour que, dans $(\delta, 2\alpha)$, on ait:

$$0<\Phi_1(t)<\varepsilon t$$

d'où, puisque l'on a

$$0<\delta\leqq t<t+\delta\leqq 2t,$$

$$0<\Phi_1(t+\delta)<2\varepsilon t.$$

Par suite

$$\int_\delta^\alpha |S(\delta)|\,dt<\frac{\delta\cdot 2\varepsilon}{\alpha}+2\varepsilon+4\delta\varepsilon\int_\delta^\alpha\frac{dt}{t^2}$$

$$=\frac{2\varepsilon\delta}{\alpha}+2\varepsilon-4\varepsilon\left(\frac{\delta}{\alpha}-1\right)<8\varepsilon.$$

Si maintenant nous nous reportons à la première égalité, nous en déduirons

$$\left|\int_\delta^\alpha|\chi(t+\delta)-\chi(t)|\,dt-\int_\delta^\alpha\frac{|\varphi(t+\delta)-\varphi(t)|}{t}\,dt\right|<8\varepsilon;$$

ceci montre que *dans l'énoncé 7 on peut remplacer l'une par l'autre les trois quantités*

$$|\psi(t+\delta)-\psi(t)|,\quad |\chi(t+\delta)-\chi(t)|,\quad \frac{|\varphi(t+\delta)-\varphi(t)|}{t}.$$

La dernière forme de l'énoncé 7 ainsi obtenue serait particulièrement commode si l'on voulait avoir des énoncés analogues à 2 et 3 en assujettissant $|\varphi(t+\delta)-\varphi(t)|$ a être inférieure, non plus à une fonction de δ comme dans 2 et 3, mais à une fonction de t et δ. Je ne m'attarderai pas à rechercher des énoncés particuliers rentrant dans l'énoncé 7; il me paraît probable que de tels énoncés seraient intéressants seulement dans le cas où l'on aurait souvent à étudier la possibilité du développement en série de Fourier de fonctions d'une classe déterminée de fonctions, et l'énoncé particulier à employer dépendrait de la nature de cette classe.

V.

Je passe maintenant à un sujet assez différent: l'emploi de l'énoncé 7 à la généralisation d'un théorème de M. Fejér*). Voici ce théorème: *La série de Fourier, relative à une fonction bornée et intégrable au sens de Riemann, représente cette fonction en tous ses points de continuité et en tous ses points réguliers quand on somme cette série par le procédé de la moyenne arithmétique.*

On somme une série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

par le procédé de la moyenne arithmétique quand on lui attribue pour somme la limite (quand elle existe) des nombres σ_n définis par les égalités:

$$S_p = u_0 + u_1 + \cdots + u_p, \quad \sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}}{n}. \text{**)}$$

Pour bien mettre en évidence toute l'importance du résultat de M. Fejér en ce qui concerne la représentation des fonctions discontinues, je ferai quelques remarques préliminaires.

Soit $f(x)$ une fonction ayant une intégrale — il importe peu d'ailleurs que ce soit une intégrale au sens de Riemann ou au mien. Soit $F(x)$

---

*) Untersuchungen über Fouriersche Reihen; Math. Annalen, Bd. 58, S. 51.

**) D'après les indications de M. Fejér il semble que ce soient les résultats obtenus par MM. Borel et Mittag-Leffler relativement aux séries entières qui lui aient donné l'idée d'entreprendre son important travail. Il est peut-être curieux de remarquer d'une part que la méthode de sommation des séries divergentes de M. Borel est une généralisation de la méthode de sommation par la moyenne arithmétique et d'autre part que, dès que l'on eut imaginé cette dernière méthode, on l'ait appliqué à des séries trigonométriques. C'est ainsi que dans le *Premier Supplément au 25ième mémoire* de ses *Opuscules Mathématiques* (tome IV, Paris 1768) D'Alembert démontre à peu près rigoureusement que la série

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots$$

a pour somme $-\frac{1}{2}$, sauf pour $x = 2k\pi$, quand on lui applique le procédé de la moyenne arithmétique. D'Alembert n'aperçut d'ailleurs pas la portée de ce théorème et il s'éleva avec force et non sans raison contre l'emploi que certains voulaient en faire.

l'intégrale indéfinie de $f(x)$; alors on a, d'après un théorème que j'ai déjà rappelé et pour lequel j'ai renvoyé aux pages 123 et 124 de mes Leçons sur l'Intégration,

$$f(x) = \lim_{h=0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x),$$

sauf pour un ensemble de valeurs de x de mesure nulle. Celà revient à dire que l'on peut trouver une suite de fonctions continues tendant vers $f(x)$, sauf pour les valeurs exceptionnelles de x, ou encore qu'il existe une expression analytique représentant $f(x)$, sauf pour ces valeurs, cette expression étant une série de polynomes en x. On ne peut d'ailleurs pas espérer mieux en s'adressant à des expressions analytiques plus générales, car non seulement il existe des fonctions qui ne sont pas représentables par une série de polynomes, mais il existe même des fonctions échappant à tout mode de représention analytique.*)

Le raisonnement qui vient d'être fait montre encore que pour que deux fonctions ne diffèrent que pour les points d'un ensemble de mesure nulle, il faut et il suffit qu'elles aient la même intégrale indéfinie. Que celà soit nécessaire, c'est une conséquence de la définition de l'intégrale; d'ailleurs si deux fonctions correspondent à la même intégrale indéfinie $F(x)$, elles ont la même représentation analytique sauf pour un ensemble de valeurs de x de mesure nulle.

Deux fonctions qui ont la même série de Fourier ne diffèrent que pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de la variable. Celà résultera immédiatement *de la possibilité d'intégrer terme à terme toute série de Fourier même divergente*, puisque cette possibilité montrera que les deux fonctions ont la même intégrale indéfinie. Je démontre la possibilité de l'intégration.**)

Soit

(1) $$\frac{1}{2} a_0 + \Sigma a_p \cos px + b_p \sin px,$$

la série de Fourier relative à $f(x)$ et

(2) $$\frac{1}{2} A_0 + \Sigma A_p \cos px + B_p \sin px$$

---

*) Pour ce point je renverrai à mon mémoire du Journal de Mathématiques, année 1905, „Sur les fonctions représentables analytiquement."

**) Ce théorème sous sa forme générale, pour les fonctions intégrables au sens de Riemann, semble avoir été démontré tout d'abord par M. de la Vallée-Poussin (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. XVI). Dans le texte, conformément à ce que j'ai supposé tout au début, je m'occupe des fonctions bornées ou non et ayant une intégrale à mon sens, ce qui n'entraîne aucun changement dans la démonstration.

celle qui correspond à $\int_0^x f(x)dx$. Cette seconde série est convergente, car $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ est à variation bornée. L'intégration par parties donne

$$a_0 = \frac{F(2\pi)}{\pi}, \quad A_n = -\frac{1}{n}b_n, \quad B_n = \frac{1}{n}a_n - \frac{1}{n}a_0;$$

cela montre qu'en intégrant terme à terme de 0 à x la série (1) on obtient

$$\frac{1}{2}F(2\pi) + \Sigma A_p(\cos px - 1) + B_p \sin px, \tag{3}$$

si l'on a soin de remplacer le premier terme $\frac{a_0 x}{2}$ par son développement en série de Fourier. En faisant dans la série (2) convergente $x = 0$ on a:

$$\frac{1}{2}A_0 + \Sigma A_p = \frac{F(2\pi)}{2},$$

ce qui montre l'identité des séries (2) et (3). Par suite l'intégration terme à terme est possible et conduit toujours à une série convergente.

Ainsi, se donner la série de Fourier d'une fonction, c'est définir cette fonction sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle et d'ailleurs inconnu. On peut par suite espérer qu'en appliquant à ces séries de Fourier une méthode de sommation convenable on saura calculer la fonction correspondante, sauf pour un ensemble de points de mesure nulle. Il faut d'ailleurs remarquer que, quel que soit le procédé de sommation employé, il arrivera qu'en certains points et pour certaines fonctions, la méthode de sommation s'appliquera et donnera autre chose que la fonction; celà est une conséquence évidente de l'indétermination de la fonction correspondant à la série.

Les points de discontinuité d'une fonction intégrable au sens de Riemann formant un ensemble de mesure nulle, le résultat de M. Fejér peut s'énoncer ainsi: *Si l'on emploie le procédé de sommation par la moyenne arithmétique, la série de Fourier d'une fonction bornée, intégrable au sens de Riemann, fait connaître la valeur de la fonction sauf pour un ensemble de points de mesure nulle.*

Ainsi, pour les fonctions considérées, le procédé si simple qu'emploie M. Fejér conduit à un résultat aussi parfait en un certain sens qu'on pouvait le souhaiter. C'est ce résultat que je vais essayer d'étendre aux fonctions ayant une intégrale à mon sens.

Le raisonnement de M. Fejér s'applique, sans qu'on y change rien, pour l'étude des points de continuité et des points réguliers de ces fonctions sommables; mais une fonction sommable n'ayant pas en général de points de continuité, ni de points réguliers, nous ne pourrons plus rien en conclure relativement à l'ensemble des points où la méthode de M. Fejér s'applique.

Guidé par les considérations précédentes j'ai recherché un cas, un peu plus général que celui de M. Fejér, dans lequel la sommation par la moyenne arithmétique puisse être employé; voici le résultat que j'ai obtenu.

La série de Fourier d'une fonction f est sommable par le procédé de la moyenne arithmétique au point x et permet de calculer $f(x)$, si la fonction $|\varphi(t)|$ correspondante est la dérivée de son intégrale indéfinie pour $t = 0$.

Je pose

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(t)\,dt, \quad \Phi_1(t) = \int_0^t |\varphi(t)|\,dt;$$

puisque, par hypothèse, $\frac{\Phi_1(t)}{t}$ tend vers zéro avec t, a fortiori $\frac{\Phi(t)}{t}$ tend vers zéro avec t, c'est dire que $\Phi(t)$ et $\Phi_1(t)$ ont toutes deux une dérivée nulle pour $t = 0$.

Ceci posé, on a évidemment, en conservant les notations indiquées,

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{n}(S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}) \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{\sin t}[\sin t + \sin 3t + \cdots + \sin(2n-1)t] \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)+f(x-2t)]\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt;\end{aligned}$$

$$d_n = \sigma_n - f(x) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt.$$

Le raisonnement de M. Fejér nous apprend que d_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ quand $\varphi(t)$ est continue au point $t = 0$.

En employant l'intégration par parties*) on a:

$$\begin{aligned}d_n = \frac{1}{n\pi}\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin^2 n\frac{\pi}{2} &+ \frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(t)\cos t\frac{\sin^2 nt}{\sin^3 t}\,dt \\ &- \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(t)\frac{\sin 2nt}{\sin^2 t}\,dt.\end{aligned}$$

---

*) Ce mode d'intégration s'applique aux intégrales considérées ici comme à celles de Riemann; je l'ai dejà employé précédemment. Si l'on a quelques doutes sur la légitimité de l'emploi de cette méthode on pourra remarquer que l'intégration par parties peut toujours être remplacée par l'emploi d'intégrales doubles et j'ai étudié ces intégrales dans ma Thèse.

Le premier terme du second membre tend évidemment vers zéro quand n croît; il en est de même du second, car c'est le double de la différence d_n pour laquelle $\varphi(t)$ est la fonction partout continue $\frac{\Phi(t)\cos t}{\sin t}$. Il suffit d'étudier le dernier terme; en le changeant de signe et en y remplaçant $\sin 2nt$ par $\sin(2n+1)t$ on aurait l'intégrale $\frac{I_n}{\pi}$ du premier paragraphe pour le cas où la fonction $\psi(t)$ qui figure dans I_n s'appellerait $\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}$. Il est évident que le changement de $\sin(2n+1)t$ en $\sin 2nt$ n'aurait en rien influé sur les raisonnements des paragraphes précédents de sorte qu'on pourra employer les résultats de ces paragraphes à condition d'y remplacer $\psi(t)$ par $\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}$. L'énoncé 7 ou même l'énoncé 6 va nous montrer que le dernier terme tend vers zéro.

$\frac{\Phi(t)}{\sin t}$ étant continue, la première condition de l'énoncé 6 est remplie étudions la seconde et pour celà calculons la variation totale de $\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}$ dans (t, α), variation que nous désignerons par $V_t^\alpha\left(\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\right)$.

Remarquons d'abord que, quelle que soit la fonction $\varrho(t)$ ayant une intégrale, on a:

$$\left|\int_t^{t+h}\varrho(t)\,dt\right| \leqq \int_t^{t+h}|\varrho(t)|\,dt, \qquad (h>0);$$

d'où

$$V_a^b\int_\lambda^t\varrho(t)\,dt \leqq \int_a^b|\varrho(t)|\,dt, \qquad (a<b).^{*)}$$

Or $\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}$ est, à une constante près, égale à

$$\int_\lambda^t\left(\frac{\varphi(t)}{\sin^2 t} - \frac{2\,\Phi(t)\cos t}{\sin^3 t}\right)dt,$$

comme le montre l'intégration par parties; donc on a:

$$V_t^\beta\left(\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\right) \leqq \int_t^\beta\frac{|\varphi(t)|}{\sin^2 t}dt + 2\int_t^\beta\frac{|\Phi(t)|\cos t}{\sin^3 t}\,dt,$$

$$0<t<\beta<\frac{\pi}{2}.$$

---

*) On peut démontrer que c'est le signe $=$ qui convient. Celà ne nous sera pas utile, il nous suffit de savoir que $\int_\lambda^t\varrho(t)\,dt$ est à variation bornée, et d'avoir une limite supérieure de sa variation totale.

Mais on a aussi

$$\int_t^\beta \frac{|\varphi(t)|}{\sin^2 t}\,dt = \left[\frac{\Phi_1(t)}{\sin^2 t}\right]_t^\beta + 2\int_t^\beta \frac{\Phi_1(t)\cos t}{\sin^3 t}\,dt,$$

donc, puisque $|\Phi(t)|$ est au plus égale à $\Phi_1(t)$, nous avons

$$V_t^\beta\left(\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\right) \leqq \frac{\Phi_1(\beta)}{\sin^2\beta} - \frac{\Phi_1(t)}{\sin^2 t} + 4\int_t^\beta \frac{\Phi_1(t)\cos t}{\sin^3 t}\,dt.$$

Posons $\Phi_1(t) = \sin t \cdot \theta(t)$; $\theta(t)$ tend vers zéro avec t; soit θ_β sa limite supérieure dans $(0, \beta)$; θ_β tend vers zéro avec β. Alors on peut écrire

$$V_t^\beta\left(\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\right) \leqq \frac{\Phi_1(\beta)}{\sin^2\beta} + \frac{\theta(t)}{\sin t} + 4\theta_\beta \int_t^\beta \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t},$$

$$V_t^\beta\left(\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\right) \leqq \frac{\Phi_1(\beta)}{\sin^2\beta} + \frac{\theta(t)}{\sin t} + 4\theta_\beta\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{\sin\beta}\right).$$

D'où enfin on peut conclure que la plus grande des limites, pour $t = 0$, de $t\, V_t^\beta\left(\frac{\Phi(t)}{\sin t}\right)$ est au plus égale à $4\theta_\beta$. Ceci établi, quel que soit β dans (t, α), on a:

$$V_t^\alpha\left(\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\right) = V_t^\beta\left(\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\right) + V_\beta^\alpha\left(\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\right);$$

si l'on multiplie les deux termes par t, quel que soit β le second terme du second membre donne un produit qui tend vers zéro, le premier donne comme plus grande limite $4\theta_\beta$ et puisque θ_β tend vers zéro avec β, on a:

$$\lim_{t=0} V_t\left(\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\right) = 0.$$

Les conditions de l'énoncé 6 sont remplies, par suite notre théorème est démontré.

Je vais maintenant étudier l'ensemble des points en lequels la condition supposée est remplie.

Pour $t = 0$ $|\varphi(t)|$ sera évidemment là dérivée de son intégrale indéfinie si la même condition est remplie pour les deux fonctions de t

$$|f(x+t) - f(x)|, \quad |f(x-t) - f(x)|;$$

c'est-à-dire si la fonction $|f(y) - \varkappa|$ est la dérivée de son intégrale indéfinie pour $y = x$, quand la constante $\varkappa$ égale $f(x)$. Or il est facile de voir que, quelle que soit $\varkappa$, $|f(y) - \varkappa|$ est la dérivée de son intégrale indéfinie pour $y = x$, si celà est vrai pour $\varkappa$ rationnelle. Soit en effet $\varkappa_i$ une valeur irrationnelle de $\varkappa$, $\varkappa_r$ une valeur rationnelle, on a:

$$\big||f(y) - \varkappa_i| - |f(y) - \varkappa_r|\big| \leqq |\varkappa_r - \varkappa_i|.$$

donc

$$\left|\frac{1}{y-x}\int_x^y |f(y)-\varkappa_i|\,dy-\frac{1}{y-x}\int_x^y |f(y)-\varkappa_r|\,dy\right| \leqq |\varkappa_r-\varkappa_i|.$$

Si l'on prend y dans un intervalle $(x-h,\ x+h)$ assez petit, le second terme du premier membre ne diffère de $|f(x)-\varkappa_r|$ que d'une quantité ε, prise arbitrairement positive, au plus. Donc, dans cet intervalle, on a:

$$\left|\frac{1}{y-x}\int_x^y |f(y)-\varkappa_i|\,dy-|f(x)-\varkappa_r|\right| \leqq |\varkappa_r-\varkappa_i|+\varepsilon,$$

$$\left|\frac{1}{y-x}\int_x^y |f(y)-\varkappa_i|\,dy-|f(x)-\varkappa_i|\right| \leqq 2\,|\varkappa_r-\varkappa_i|+\varepsilon;$$

et puisque ε et $|\varkappa_r-\varkappa_i|$ peuvent être pris aussi petits que l'on veut, il est démontré qu'au point x la fonction $|f(y)-\varkappa_i|$ est la dérivée de son intégrale indéfinie.

Mais les nombres $\varkappa_r$ ne forment qu'un ensemble dénombrable, à chaque nombre $\varkappa_r$ correspond au plus un ensemble $E(\varkappa_r)$ de mesure nulle pour les points duquel $|f(y)-\varkappa_r|$ n'est pas la dérivée de son intégrale indéfinie, donc l'ensemble E somme des $E(\varkappa_r)$ est au plus de mesure nulle et c'est seulement pour les points de cet ensemble qu'il est possible que, pour certaines valeurs de $\varkappa$, $|f(y)-\varkappa|$ ne soit pas la dérivée de son intégrale indéfinie. C'est donc seulement aux points de E que la condition supposée sur $|\varphi(t)|$ peut n'être pas remplie. Donc:

La série de Fourier relative à une fonction sommable quelconque est sommable par le procédé de la moyenne arithmétique et fait connaître la fonction considérée sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure nulle.

Je viens d'étudier quelques fonctions $f(x)$ non bornées, mais je rappelle que $|f(x)|$ a une intégrale; M. Fejér a étendu son théorème à quelques fonctions non bornées et son raisonnement ne suppose pas que $|f(x)|$ a une intégrale. Il serait facile de donner un énoncé comprenant celui de M. Fejér et le mien, je ne m'y arrêterai pas; il serait cependant intéressant de savoir si le théorème de M. Fejér pourrait être étendu à toutes les séries que j'ai appelées *séries de Fourier généralisées* dans mon mémoire des Annales de l'Ecole Normale et auxquelles les procédés utilisés pour l'étude de la convergence (ordinaire) des séries de Fourier ordinaires ne semblent pas s'appliquer facilement.

VI.

Je crois que les résultats de M. Fejér pourront être utilement employés à l'étude des séries de Fourier les plus générales*); les propriétés des sommes σ_n de M. Fejér qui me paraissent les plus utiles pour une telle étude sont les suivantes:

1° σ_n est de la forme (notations données au début)

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} a_0 \lambda_0(n) + \sum_{p=1}^{\infty} (a_p \lambda_p(n) \cos px + b_p \mu_p(n) \sin px),$$

$\lambda_p(n)$ et $\mu_p(n)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{p}$, quel que soit n, et tendant vers 1, quel que soit p, quand n augmente indéfiniment.

2° $\sigma_n(x)$ tend vers $f(x)$ sauf, tout au plus, pour les points d'un ensemble de mesure nulle.

3° $\sigma_n(x)$ tend en particulier vers $f(x)$ pour les points de continuité de $f(x)$ et celà uniformément dans tout intervalle où $f(x)$ est continue.

4° $\sigma_n(x)$ est bornée, quels que soient n et x, si x est dans un intervalle où $f(x)$ est bornée.

Il est facile d'indiquer d'autres procédés de sommation des séries de Fourier présentant les avantages ci-dessus énoncés du procédé de M. Fejér et qui ne nécessitent que des raisonnements plus simples que les précédents.

Je montre tout d'abord que le raisonnement simple de M. Fejér fournissait un résultat à peu près équivalent à celui démontré à la fin du paragraphe précédent. On a vu que si $\varphi(t)$ était pour $t = 0$ la dérivée de son intégrale indéfinie $\Phi(t)$ on avait:

$$d_n = \sigma_n - f(x) = \frac{1}{n\pi} \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin^2 n \frac{\pi}{2} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(t) \cos t \frac{\sin^2 nt}{\sin^3 t} dt$$
$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(t) \frac{\sin 2nt}{\sin^2 t} dt.$$

Le premier terme tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, le second aussi d'après le résultat de M. Fejér; quant au troisième il est, je l'ai dit, analogue à l'intégrale I_n relative à la fonction continue $\frac{\Phi(t)}{\sin t}$. Donc, d'après le résultat

*) A ce sujet je dois renvoyer à un travail de M. Hurwitz (Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen, Math. Annalen, Bd. 57) où l'on trouvera quelques considérations fort analogues à certaines des remarques du paragraphe précédent.

de M. Fejér, la moyenne arithmétique de la somme de ses n premières valeurs tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. En d'autres termes *si l'on pose*

$$\Sigma_n = \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_{n-1}}{n},$$

Σ_n *tend vers* $f(x)$ *en tous les points pour lesquels l'intégrale indéfinie de* $\varphi(t)$ *a une dérivée nulle pour* $t = 0$, *c'est-à-dire en particulier en tous les points où* $f(x)$ *est la dérivée de son intégrale indéfinie.* Ainsi Σ_n satisfait à la seconde des conditions que vérifiait σ_n, il est d'ailleurs évident que Σ_n satisfait aux trois autres conditions énoncées; au reste, il était certain sans nouveaux raisonnements que si l'on peut employer une fois le procédé de la moyenne arithméthique on peut l'employer deux fois.

Voici maintenant un mode de sommation tout à fait immédiat; on a vu qu'il suffisait d'avoir une expression analytique de l'intégrale indéfinie $F(x)$ de $f(x)$ pour en déduire une expression analytique de $f(x)$; il est évident que si l'on remplace σ_n par l'une on l'autre des deux fonctions

$$\frac{1}{h_n}[F(x+h_n) - F(x)], \qquad \frac{1}{2h_n}[F(x+h_n) + F(x-h_n)],$$

où h_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ on aura des expressions qui satisferont aux 3 dernières conditions énoncées et que vérifie σ_n.

Mais on a vu qu'on pouvait prendre pour $F(x)$

$$F(x) = C + a_0 \frac{x}{2} + \sum \frac{1}{p}(a_p \sin px - b_p \cos px);$$

donc on peut prendre à la place de $\sigma_n(x)$ la fonction $\sigma'(t, x)$, où l'on fera si l'on veut $t = \frac{1}{n}$,

$$\sigma'(t, x) = \frac{1}{2t}[F(x+t) - F(x-t)] = \frac{a_0}{2} + \sum \left(\frac{\sin pt}{pt}\right)(a_p \cos px + b_p \sin px).$$

Un des inconvénients de cette fonction est d'être définie par une série au lieu d'être donnée par une suite finie; mais cette série étant uniformément convergente, pour t constant, on peut la limiter. Le calcul sera plus simple si l'on intègre encore une fois.

La série qui donne $F(x)$ étant uniformément convergente, on peut l'intégrer terme à terme et l'on a ainsi pour la fonction $F_1(x)$ qui résulte de $f(x)$ intégrée deux fois

$$F_1(x) = k_1 + k_2 x + a_0 \frac{x^2}{2} - \sum \frac{1}{p^2}(a_p \cos px + b_p \sin px).$$

Alors on aura, comme on sait, une forme simple en posant

$$\sigma''(t, x) = \frac{F_1(x+2t) + F_1(x-2t) - 2F_1(x)}{4t^2}$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum \left(\frac{\sin pt}{pt}\right)^2 (a_p \cos px + b_p \sin px);$$

$\sigma''(t, x)$ tend vers $f(x)$, quand t tend vers 0, en tout point où $f(x)$ est la dérivée de son intégrale indéfinie.

On reconnaît là le procédé de sommation auquel Riemann a consacré son célèbre mémoire où il est démontré que ce procédé de sommation est plus général que le procédé ordinaire. Or il est facile, pour tous les cas, de remplacer la série infinie qui définit σ'' par une suite finie, en s'appuyant seulement sur la convergence vers zéro des a_p et b_p. Si l'on néglige tous les termes qui suivent le $p^{\text{ième}}$ dans σ'', et si m est la limite supérieure des modules des a_{p+h} et b_{p+h}, l'erreur commise est évidemment au plus égale à:

$$\frac{2m}{t^2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{(p+q)^2} < \frac{2m}{t^2}\int_p^{\infty}\frac{dt}{t^2} = \frac{2m}{pt^2}.$$

Il suffira donc d'associer p et t de manière que pt^2 ne descende pas au-dessous d'une certaine limite. On pourra prendre, par exemple,

$$\sigma''_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{p=n^2}\left(\frac{n\sin\frac{p}{n}}{p}\right)^2 (a_p \cos px + b_p \sin px).$$

Rien n'empêcherait d'intégrer plus de deux fois la série de Fourier de $f(x)$, on aurait des résultats analogues et des procédés de sommation auxquels s'appliquent le théorème du § 2 du mémoire de M. Fejér.*)

*) Je n'étudie pas ici un procédé de sommation, plus ancien encore que celui de Riemann, le procédé bien connu de Poisson, qui a été étudié par M. Schwarz, duquel M. Picard a déduit une démonstration du théorème de Weierstraß sur la représentation approchée des fonctions continues et au sujet duquel Poisson s'exprime ainsi dans le tome 18 du Journal de l'Ecole Polytechnique (pages 421—422).

«En général, une série de quantités périodiques prolongée à l'infinie, . . . , ne peut avoir un sens clair et précis, qu'autant qu'on la regarde comme la limite d'une série convergente. Nous multiplierons donc le terme général de cette série par l'exponentielle e^{-ki}.», nous changerons ainsi la formule en une autre «dans laquelle on devra faire k infiniment petite ou nulle, après avoir effectuè les calculs. L'introduction de cette exponentielle, en rendant la série convergente, fait disparaître les difficultés que la formule de Lagrange présentait; . . .».