

Ökonometrie  
und Unternehmensforschung

Econometrics  
and Operations Research

XX

*Herausgegeben von Edited by*

M. Beckmann, München/Providence R. Henn, Karlsruhe  
A. Jaeger, Bochum W. Krelle, Bonn H. P. Künzi, Zürich  
K. Wenke, Zürich Ph. Wolfe, New York

*Geschäftsführende Herausgeber Managing Editors*

W. Krelle H. P. Künzi

E. Blum W. Oettli

# Mathematische Optimierung

*Grundlagen und Verfahren*



Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1975

Professor Dr. Eugen Blum  
Universidad Nacional de Ingenieria, Lima

Professor Dr. Werner Oettli  
Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Mannheim

AMS Subject Classifications (1970): 90-02, 90 C XX

ISBN-13:978-3-642-66157-0

e-ISBN-13:978-3-642-66156-3

DOI:10.1007/978-3-642-66156-3

Library of Congress Cataloging in Publication Data. Blum, Eugen, 1936- . Mathematische Optimierung (Ökonometrie und Unternehmensforschung: Bd. 20). Bibliography: p. Includes index. I. Mathematical optimization. I. Oettli, Werner, joint author. II. Title. III. Series. QA402.5.B57.519.7.75-19400

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Bei Vervielfältigungen für gewerbliche Zwecke ist gemäß § 54 UrhG eine Vergütung an den Verlag zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist.

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1975  
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1975

## Vorwort

Die mathematische Optimierung – auch mathematische Programmierung genannt – befaßt sich mit dem Problem der Extremwertermittlung einer Funktion über einem zulässigen Bereich, der wesentlich durch Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen beschrieben ist. Zahlreiche praktische und theoretische Fragestellungen lassen sich auf dieses Problem zurückführen. Im vorliegenden Band soll ein Überblick über die mathematische Optimierung in endlich-dimensionalen Räumen gegeben werden. Naturgemäß steht dabei die nichtlineare Optimierung im Vordergrund, da die lineare Theorie weitgehend abgeschlossen und bereits in zahlreichen Lehrbüchern dargestellt ist. Immerhin findet sich auch die lineare Programmierung in einem eigenen Kapitel eingehend behandelt. Im nichtlinearen Fall konzentrieren wir uns einerseits auf konvexe, andererseits auf differenzierbare Probleme. Bei der Auswahl des Materials wurde den Grundlagen – darunter verstehen wir die Charakterisierungstheorie der Optimallösungen und die Dualitätstheorie – gleiches Gewicht beigemessen wie den eigentlichen Lösungsverfahren. Die letzteren wurden nach Familien geordnet, wobei einige typische Vertreter aus jeder Familie vorgestellt werden. Wir haben größeren Wert darauf gelegt, den begrifflichen Ablauf eines Verfahrens klarzumachen, als darauf, computerfertige Rechenanweisungen zu liefern. Es wurde versucht, die Resultate der konvexen Analysis auch für die Verfahren nutzbar zu machen, indem beispielsweise bei konvexen Funktionen nach Möglichkeit auf Differenzierbarkeitsforderungen verzichtet und stattdessen die Theorie der Subgradienten herangezogen wurde. Besondere Aufmerksamkeit wurde den Problemen mit unendlich vielen Nebenbedingungen gewidmet; solche Probleme treten etwa in der Approximationstheorie in ganz natürlicher Weise auf. Einige eingestreute Beispiele sind theoretischer Natur und sollen die Anwendungsmöglichkeit der Optimierung auf andere Fachgebiete illustrieren. Wir haben danach gestrebt, die einzelnen Kapitel möglichst unabhängig voneinander lesbar zu machen; dabei haben wir auch Wiederholungen in Kauf genommen. Angesichts der dauernd wachsenden Literatur zur Optimierung ist Vollständigkeit im Rahmen einer Monographie unmöglich. Von den Auslassungen, die wir besonders bedauern, sei hier stellvertretend das Problem der Variationsungleichungen erwähnt. Im Anschluß an den Textteil findet sich eine umfangreiche Bibliographie der nichtlinearen Optimierung. Sie soll einen zusätzlichen Überblick über die Entwicklung dieses Gebiets seit den klassischen Arbeiten von Fritz John (1948) und Kuhn und Tucker (1951) geben, ferner Hinweise auf weitere Anwendungsmöglichkeiten der Optimierung. Wir hoffen, daß diese Bibliographie auch für den Spezialisten ein nützliches Arbeitsinstrument darstellen wird.

Für die bei der Abfassung dieses Buches gewährte Unterstützung danken die Verfasser dem Schweizer Nationalfonds, der Stiftung Volkswagenwerk, dem IBM

Forschungslaboratorium Zürich und dem Sonderforschungsbereich 21 der Universität Bonn. Besonderen Dank schulden wir den Herausgebern dieser Reihe, Herrn Professor Dr. H. P. Künzi (Zürich) und Herrn Professor Dr. W. Krelle (Bonn), die unsere Arbeit mit steter Anteilnahme begleiteten. Dem Springer-Verlag sei an dieser Stelle für die durchwegs erfreuliche Zusammenarbeit gedankt.

E. B.  
W. O.

# Inhalt

1. Kapitel. Mathematische Programme . . . . .	1
1. Problemstellung und Definitionen . . . . .	1
2. Sonderfälle. Konvexe Programme . . . . .	4
3. Umformungen von Programmen . . . . .	8
2. Kapitel. Lineare Programmierung . . . . .	11
1. Allgemeines . . . . .	11
2. Die Dualitätstheorie der linearen Programmierung . . . . .	16
3. Das Simplexverfahren . . . . .	22
4. Die Tableaudarstellung des Simplexverfahrens . . . . .	30
5. Die Bestimmung einer zulässigen Startbasis . . . . .	33
6. Degenerierte Programme . . . . .	34
7. Der primal-duale Algorithmus . . . . .	39
8. Der Dekompositionsalgorithmus . . . . .	41
9. Das „Max-Flow/Min-Cut“-Theorem . . . . .	44
3. Kapitel. Optimalitätsbedingungen . . . . .	49
1. Allgemeines . . . . .	49
2. Optimalitätsbedingungen ohne Verwendung der Lagrange-Funktion . . . . .	53
3. Optimalitätsbedingungen, die die Lagrange-Funktion verwenden: Grundlegende Begriffe . . . . .	62
4. Optimalitätsbedingungen ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen (unter Verwendung der Lagrange-Funktion) . . . . .	67
5. Optimalitätsbedingungen für Programme mit differenzierbaren Funktionen (unter Verwendung der Lagrange-Funktion) . . . . .	82
6. Optimalitätsbedingungen für Programme mit unendlich vielen Restriktionen . . . . .	90
7. Anwendungsbeispiele zu den Optimalitätsbedingungen . . . . .	100
8. Optimalitätsbedingungen für Programme mit linearen Restriktionen . . . . .	107
4. Kapitel. Dualitätstheorie . . . . .	113
1. Einleitung . . . . .	113
2. Die Theorie von Dantzig, Eisenberg und Cottle . . . . .	114
3. Die Dualitätstheorie von Stoer . . . . .	129
4. Dualitätstheorie für homogene Programme . . . . .	140
5. Die Dualitätstheorie von Fenchel und Rockafellar . . . . .	154
6. Semi-infinite Programme . . . . .	163

5. Kapitel. Optimierung ohne Restriktionen . . . . .	166
1. Gradientenverfahren erster Ordnung . . . . .	166
2. Die Verfahren der konjugierten Richtungen . . . . .	180
3. Das Newton-Verfahren . . . . .	197
4. Die Minimierung einer Funktion auf einem Intervall . . . . .	206
6. Kapitel. Projektions- und Kontraktionsverfahren . . . . .	209
1. Einleitung . . . . .	209
2. Das Verfahren von Uzawa . . . . .	209
3. Fejér-Kontraktionen . . . . .	217
7. Kapitel. Einzelschrittverfahren . . . . .	226
1. Das zyklische Einzelschrittverfahren . . . . .	226
2. Einzelschrittverfahren mit beliebiger Ordnung . . . . .	231
3. Anwendung auf duale Probleme . . . . .	232
4. Der quadratische Fall . . . . .	235
8. Kapitel. Schnittverfahren . . . . .	239
1. Das allgemeine Modell . . . . .	239
2. Das Schnittverfahren bei streng konvexer Zielfunktion . . . . .	242
3. Der Austauschalgorithmus für lineare Programme mit unendlich vielen Restriktionen . . . . .	247
4. Minimierung einer konvexen Funktion auf einem konvexen Grundbereich. Anwendung auf duale Probleme . . . . .	255
9. Kapitel. Dekompositionsverfahren . . . . .	260
1. Hilfsmittel . . . . .	260
2. Das symmetrische Dekompositionsverfahren . . . . .	263
3. Das primale Dekompositionsverfahren . . . . .	266
4. Varianten des primalen Dekompositionsverfahrens . . . . .	267
10. Kapitel. Strafkostenverfahren . . . . .	274
1. Einleitung . . . . .	274
2. Der allgemeine Fall . . . . .	275
3. Der konvexe Fall . . . . .	278
4. Das Verfahren SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique) . . . . .	283
11. Kapitel. Verfahren der zulässigen Richtungen . . . . .	288
1. Hilfsmittel . . . . .	288
2. Das Verfahren I: Lineare Approximationen . . . . .	291
3. Das Verfahren II: Konvexe Approximationen . . . . .	298

12. Kapitel. Das Verfahren der projizierten Gradienten . . . . .	303
1. Hilfsmittel . . . . .	303
2. Das Verfahren . . . . .	305
13. Kapitel. Die Verfahren von Zangwill und Dantzig-Cottle . . . . .	311
1. Der konvexe Fall . . . . .	311
2. Der quadratische Fall . . . . .	313
14. Kapitel. Das Verfahren von Beale . . . . .	320
1. Beschreibung des Verfahrens . . . . .	320
2. Die Konvergenz des Verfahrens . . . . .	324
3. Tableaudarstellung des Verfahrens . . . . .	326
Anhang. Bibliographie zur Nichtlinearen Programmierung. . . . .	331
Namen- und Sachverzeichnis . . . . .	409