Mladen Victor Wickerhauser

Adaptive Wavelet-Analysis

Aus dem Programm
Mathematik

Otto Forster
Analysis 1–3

Rüdiger Braun und Reinhold Meise
Analysis mit Maple

Jochen Werner
Numerische Mathematik 1–2

Gerhard Opfer
Numerische Mathematik für Anfänger

Jean-Pierre Demailly
Gewöhnliche Differentialgleichungen

Walter A. Strauss
Partielle Differentialgleichungen

Reinhold Meise und Dietmar Vogt
Einführung in die Funktionalanalysis

Wolfram Luther, Achim Janser und Werner Otten
Computergraphik mit einer Einführung in die Bildverarbeitung

Hans-Joachim Bungartz, Michael Griebel und Christoph Zenger
Einführung in die Computergraphik

Vieweg

Mladen Victor Wickerhauser

Adaptive Wavelet-Analysis

Theorie und Software

Aus dem Amerikanischen übersetzt
von Kurt Jetter

vieweg

Professor M. V. Wickerhauser
Department of Mathematics
Washington University
St. Louis, Missouri 63130-4899
USA

Übersetzung:
Professor Dr. K. Jetter
Fachbereich Mathematik
Gerhard-Mercator-Universität – GH – Duisburg
47048 Duisburg

Titel der Originalausgabe:
Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software

Original English language edition published by A K Peters, Ltd.
© 1993. All Rights reserved.

Alle Rechte vorbehalten
© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1996
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1996
Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Bertelsmann Fachinformation.

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Umschlaggestaltung: Klaus Birk, Wiesbaden

Gedruckt auf säurefreiem Papier
ISBN-13:978-3-322-83128-6 e-ISBN-13:978-3-322-83127-9
DOI: 10.1007/978-3-322-83127-9

Vorwort

Im vergangenen Jahrzehnt hat sich Wavelet–Analyse von einer mathematischen Kuriosität zu einer Hauptquelle für neue Algorithmen der Signalverarbeitung entwickelt. Inzwischen befaßt sich das Gebiet auch mit allgemeineren Ansätzen wie den Wavelet–Paketen, und es sind Gemeinsamkeiten mit anderen Methoden transienter Signalanalyse, wie Gabor–Entwicklungen, Wilson–Basen und adaptive überlappende orthogonale Transformationen, zutage getreten. Dutzende von Konferenzen und Workshops über Wavelet–Anwendungen wurden auf fünf Kontinenten veranstaltet und gefördert. Das *Wavelet Literature Survey* [89] aus dem Jahre 1993 enthält 976 Artikel und Bücher, und diese Zahl hat sich seit 1991 jährlich verdoppelt. Die Ausgaben von *IEEE Transactions on Information Theory* vom März 1992 und *IEEE Transactions on Signal Processing* vom Dezember 1993 wurden speziell den Anwendungen der Wavelet–Transformation gewidmet. Grundlegende Artikel über das Thema sind in einer bemerkenswerten Vielfalt von Publikationen erschienen, wie z.B. in *Dr. Dobb's Journal*, im *Journal of Chemical Information and Computer Science* oder in *Revista Matemática Iberoamericana.* Die Zahl der Subskriptionen für das elektronisch versandte *Wavelet Digest* beläuft sich zur Zeit auf stolze 3255 Teilnehmer[1], worunter insbesondere Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker zu finden sind.

Trotz all dieser Aktivitäten findet sich wenig Literatur über die Implementierung dieser Methode. Außer einem kurzen Kapitel in [90], §13.10, und drei populären Artikeln [16, 17, 18] gibt es keine Anleitung zur Wavelet–Programmierung. Dies kann daran liegen, daß Software über Wavelet–Transformation von kommerziellem Wert ist und deshalb unter Verschluß gehalten wird. Quellen für diskrete und überlappende trigonometrische Transformationen sind leichter zu finden ([92] Anhang; [75]), und es gibt unzählige Implementierungen der diskreten Fouriertransformation. Fassen wir all diese stark miteinander verknüpften Transformationen zu einer einzelnen Toolbox zusammen, so können wir für jede Aufgabe das richtige Hilfsmittel auswählen. Gerade bei der adaptiven Wavelet–Analyse führt die mögliche Auswahl zu einer wesentlich stärkeren Methode, als wenn die einzelnen Teile summarisch betrachtet würden.

Dieser Text geht über die existierende Literatur hinaus und hilft dem Ingenieur und angewandten Mathematiker dabei, Computerprogramme für die Analyse von in der Praxis auftretenden Daten zu schreiben. Er geht auf die Eigenschaften der Wavelet–Transformation und verwandter Methoden ein, führt Kriterien für die Auswahl der passenden Hilfsmittel für die Analyse auf und gibt detaillierte Software–Implementierungen für die benötigten Berechnungen an. Er ist auch eine Hilfe für den reinen Mathematiker, der mit einigen Teilen der Wavelet–Theorie vertraut ist, aber Fragen hinsichtlich der Anwendungen hat. Die im Text enthaltenen Übungsaufgaben mit Lösungsvorschlägen

[1] Der aktuelle Stand (Oktober 1995) zählt 5400 Subskriptionen (Anm. d. Ü.).

dienen dazu, ein nützliches Textbuch für das Selbststudium oder für eine Vorlesung über Theorie und Anwendung der Wavelet–Analyse vorzulegen.

Das Buch beginnt mit einem Überblick über mathematische Hilfsmittel; nachfolgende Kapitel untersuchen konkret und genau die Eigenschaften der in der adaptiven Wavelet–Analyse verwendeten Wellenformen: Diskrete „schnelle“ Fouriertransformationen, orthogonale und biorthogonale Wavelets, Wavelet–Pakete und lokalisierte trigonometrische oder überlappende orthogonale Funktionen. Andere Kapitel diskutieren die Methode der „besten Basis“, die Zeit–Frequenz–Analyse und Kombinationen dieser Algorithmen, die für die Signal–Analyse, das Herausfiltern von Rauschanteilen und die Kompression nützlich sind.

Jedes Kapitel geht auf die technischen Einzelheiten der Implementierung ein und liefert Beispiele in Form von Pseudocodes, die auf der auf Wunsch erhältlichen Diskette[2] in maschinenlesbaren Standard C Quellcode übertragen wurden. Am Ende jedes Kapitels finden sich Übungsaufgaben mit Lösungsvorschlägen, die sowohl auf die mathematischen, als auch auf die programmiertechnischen Fragen der adaptiven Wavelet–Algorithmen eingehen. Besonders werden dabei versteckte Schwierigkeiten und Grenzen der Algorithmen betont und Beispiele und Vorschläge zu deren Vermeidung gegeben.

Die meisten der hier beschriebenen adaptiven Wavelet–Algorithmen sind das Produkt meiner Forschungstätigkeit an der Yale University 1989–1991 und an der Washington University in St. Louis 1991–1994. Einige der Algorithmen wurden für praktische Anwendungen weiterentwickelt und patentiert durch Aware, Inc., FMA&H Corporation, Positive Technologies, Inc. und durch die Yale University.

Unterstützung durch die National Science Foundation (NSF), das Air Force Office of Scientific Research (AFOSR), das Office of Naval Research (ONR) und die Defense Advanced Research Projects Agency (DARPA) während der vergangenen Jahre wird dankbar anerkannt. Dank gebührt auch Professor Ronald R. Coifman von der Yale University, Professor Yves Meyer von der Université Paris–Dauphine und Professor Alexander Grossmann vom Centre de Physique Théorique in Luminy für viele fruchtbare Begegnungen und Unterhaltungen.

Dieses Buch wurde in einer Zeit geschrieben, in der die kroatische Heimat des Autors von einem brutalen Krieg heimgesucht wurde. Es ist deshalb meinen kroatischen Landsleuten auf der ganzen Welt gewidmet, in Anerkennung vieler Beiträge zu Wissenschaft und Kultur, und in Würdigung des Geistes gegen die Barbarei.

University City, Missouri
9. Mai 1994

[2]Die Diskette kann für $25.00 inkl. Porto bei AK Peters, Ltd., 289 Linden Street, Wellesley, MA 02181, USA (Email: kpeters@geom.umn.edu) bezogen werden (Anm. d. Verlags).

Vorwort des Übersetzers

Der vorliegende Band befaßt sich mit einer relativ jungen mathematischen Disziplin, die schon heute insbesondere durch ihre vielfältigen Anwendungen in der Signalverarbeitung ihren Platz als eine Alternative zu den bisher üblichen Methoden der Transformationskodierung gefunden hat. Weitere Anwendungen werden zur Zeit im Zusammenhang mit unterschiedlichen Ansätzen zu Multiskalen–Techniken intensiv diskutiert.

Die Idee, das englischsprachige Originalwerk von M.V. Wickerhauser ins Deutsche zu übertragen, verfolgt mit Sicherheit zwei Ziele. Zum einen liegt mit Ausnahme des in der Reihe der Teubner–Studienbücher vor einem Jahr aufgelegten Buches „Wavelets“ von A. Louis, P. Maaß und A. Rieder bis heute keine deutschsprachige Publikation über dieses Thema in Buchform vor. Zum anderen bietet dieses Buch vielen Anwendern die Möglichkeit eines ziemlich direkten Zugangs zur Implementierung der Algorithmen; es dürfte damit auch im deutschen Sprachraum einen breiten Leserkreis ansprechen, der an konkreten Anwendungen interessiert ist und die dahinter stehende mathematische Theorie eher als eine nützliche Zusatzinformation betrachtet.

Die Übersetzung basiert auf einem vom Autor zur Verfügung gestellten Latex–File, der abgesehen von einigen typografischen Korrekturen mit dem bei A K Peters erschienenen Originalwerk übereinstimmt. Inhaltliche Änderungen oder Ergänzungen wurden nicht vorgenommen; Fehler oder Unstimmigkeiten bei der Übertragung ins Deutsche liegen jedoch voll in der Verantwortung des Übersetzers. Ob ihm der Versuch gelungen ist, den lebendigen und für den Anwender hilfreichen redundanten Stil des Autors auch auf die deutschsprachige Version zu übertragen, mag der Leser selbst entscheiden.

Dem Wunsche des Verlags entsprechend sind sämtliche Notationen und Begriffe mit deutschen Übersetzungen versehen worden. Dies war nicht immer einfach, da diese Begriffe auch im deutschen Sprachraum in Fachkreisen oft in der englischen Form benutzt werden. Die durch die Übersetzung stattfindende „Normierung“ dürfte deshalb in manchen Fällen nicht immer voll befriedigen. In kritischen Fällen sind die englischen Begriffe im Text zusätzlich in Klammern aufgeführt; bei den Bildbeschriftungen haben sich Verlag und Übersetzer aus technischen Gründen dafür entschieden, die englischen Bezeichnungen beizubehalten.

Der Übersetzer möchte folgenden Personen besonders danken: Dem Autor für die Bereitschaft, das englische Manuskript einschließlich der Bilder in elektronisch gespeicherter Form zur Verfügung zu stellen, und Herrn Dr. Uwe Depczynski für die Mitarbeit und die Geduld und Sorgfalt bei der Erstellung der deutschen Latex–Version. Der Universität Duisburg sei für die Möglichkeit gedankt, die im Fachgebiet des Übersetzers vorhandenen Systeme zur elektronischen Texterfassung zu nutzen. Nicht zuletzt sei auch dem Verlag Vieweg für die stets problemlose Zusammenarbeit Dank ausgesprochen.

Universität Duisburg
12. Dezember 1995

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Vorbetrachtungen **1**

1.1 Grundlagen aus der Analysis 1

1.1.1 Konvergenz von unendlichen Reihen und Produkten 2

1.1.2 Meßbarkeit 3

1.1.3 Integrierbarkeit 4

1.1.4 Metriken, Normen und Skalarprodukte 6

1.2 Funktionenräume 7

1.2.1 Stetige Funktionen auf der Kreislinie 7

1.2.2 Lebesgue–Räume 8

1.2.3 Räume von Testfunktionen 9

1.2.4 Dualräume 10

1.2.5 Frames, Basen und Orthogonalität 12

1.3 Fourier–Analysis 16

1.3.1 Fourier–Integrale 17

1.3.2 Fourier–Reihen 18

1.3.3 Allgemeine orthogonale Transformationen 20

1.3.4 Diskrete Fourier–Transformation 21

1.3.5 Heisenbergsche Ungleichung 22

1.3.6 Faltung 23

1.3.7 Dilatation, Dezimation und Translation 28

1.4 Approximation 29

1.4.1 Mittelung und Abtasten 30

1.4.2 Bandbeschränkte Funktionen 32

1.4.3 Approximation durch Polynome 33

1.4.4 Glatte Funktionen und verschwindende Momente 34

1.5 Übungsaufgaben 34

2 Programmiertechniken **36**

2.1 Rechnen unter realen Bedingungen 36

2.1.1 Endlichkeit 36

2.1.2 Programmiersicherheit 37

2.1.3 Pseudocode 38

2.1.4 Übliche Programmierhilfen 41

2.2 Strukturen 41

2.2.1 Komplexe Arithmetik 41

2.2.2 Intervalle 42

2.2.3 Binärbäume 45

2.2.4 Hecken 49

2.2.5 Atome 51

2.3 Verknüpfungen 52

2.3.1 Hecken und Bäume 52
2.3.2 Atome und Bäume 54
2.3.3 Zerlegung einer Hecke in Atome 57
2.4 Übungsaufgaben 59

3 Diskrete Fourier-Transformation 61
3.1 Die Fourier–Transformation auf $\mathbf{C}^N$ 61
3.1.1 Die „schnelle“ Fourier–Transformation 62
3.1.2 Implementierung der DFT 66
3.2 Die diskrete Hartley–Transformation 70
3.2.1 Die „schnelle“ Hartley–Transformation 71
3.2.2 Implementierung der DHT 73
3.3 Diskrete Sinus– und Cosinus–Transformationen 76
3.3.1 DCT-I und DST-I 78
3.3.2 DCT-II, DCT-III, DST-II und DST-III 82
3.3.3 DCT-IV und DST-IV 85
3.3.4 Implementierungen von DCT und DST 87
3.4 Übungsaufgaben 92

4 Lokale trigonometrische Transformationen 93
4.1 Hilfsmittel und Beispiele 94
4.1.1 Unitäres Falten und dessen Umkehrung 94
4.1.2 Glatte orthogonale Projektionen 101
4.1.3 Periodisierung 106
4.1.4 Einige analytische Eigenschaften 111
4.2 Orthogonalbasen 114
4.2.1 Kompatible Partitionen 115
4.2.2 Orthonormalbasen auf der reellen Achse 118
4.2.3 Diskrete Orthonormalbasen 122
4.3 Implementierung der Grundoperationen 125
4.3.1 Abschneidefunktionen 125
4.3.2 Faltung und inverse Faltung in Zwischenpunkten 128
4.3.3 Lokale trigonometrische Transformationen in Zwischenpunkten . . 131
4.3.4 Lokale Periodisierung bei Zwischenpunkten 132
4.4 Implementierung adaptiver Transformationen 133
4.4.1 Adaptive lokale Cosinus–Analyse 133
4.4.2 Auswahl der Koeffizienten 136
4.4.3 Adaptive lokale Cosinus–Synthese 138
4.5 Übungsaufgaben 138

5 Quadraturfilter 140
5.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften 141
5.1.1 Wirkungsweise auf Folgen 141
5.1.2 Biorthogonale QFs 143
5.1.3 Orthogonale QFs 145

5.1.4 Wirkungsweise auf Funktionen 146
5.2 Phasenantwort 149
5.2.1 Shifts für Folgen 150
5.2.2 Shifts im periodischen Fall 156
5.3 Frequenzantwort 159
5.3.1 Wirkungsweise einer einzelnen Filteranwendung 161
5.3.2 Wirkungsweise iterierter Filteranwendungen 165
5.4 Implementierung der Faltungs–Dezimation 174
5.4.1 Allgemeine Annahmen 174
5.4.2 Aperiodische Faltungs–Dezimation 177
5.4.3 Adjungierte aperiodische Faltungs–Dezimation 179
5.4.4 Periodische Faltungs–Dezimation 180
5.4.5 Adjungierte periodische Faltungs–Dezimation 188
5.4.6 Kunstgriffe 190
5.5 Übungsaufgaben 192

6 Diskrete Wavelet–Transformation 193
6.1 Einige Grundtatsachen über Wavelets 193
6.1.1 Ursprünge 194
6.1.2 Die DWT–Familie 195
6.1.3 Multiskalen–Analyse 195
6.1.4 Die Projektion von Funktionen 197
6.2 Implementierungen 198
6.2.1 Periodische DWT und iDWT 199
6.2.2 Aperiodische DWT und iDWT 206
6.2.3 Bemerkungen 214
6.3 Übungsaufgaben 214

7 Wavelet–Pakete 216
7.1 Definitionen und allgemeine Eigenschaften 216
7.1.1 Wavelet–Pakete auf **R** bei fester Skala 217
7.1.2 Multiskalen–Wavelet–Pakete auf **R** 220
7.1.3 Numerische Berechnung der Koeffizienten von Wavelet–Paketen . . 223
7.1.4 Die Familie der diskreten Wavelet–Paket–Analysen 229
7.1.5 Orthonormalbasen von Wavelet–Paketen 231
7.2 Implementierungen 234
7.2.1 Allgemeine Algorithmen 235
7.2.2 Periodische DWPA und DWPS 237
7.2.3 Aperiodische DWPA und DWPS 241
7.2.4 Biorthogonale DWPA und DWPS 248
7.3 Übungsaufgaben 248

8 Der Algorithmus der besten Basis 250
8.1 Definitionen 251
8.1.1 Informationskosten und beste Basis 251

8.1.2 Entropie, Information und theoretische Dimension 253
8.2 Bestimmung der besten Basis 258
8.2.1 Bibliotheksbäume 259
8.2.2 Schnelle Suchalgorithmen für minimale Informationskosten 259
8.2.3 Meta–Algorithmus für eine adaptive Wellenform–Analyse 262
8.3 Implementierung 262
8.3.1 Kostenfunktionen 263
8.3.2 Additive Kostenfunktionen 263
8.3.3 Auswahl einer Basisteilmenge 265
8.3.4 Auswahl eines Zweiges 270
8.4 Übungsaufgaben 273

9 Mehrdimensionale Bibliotheksbäume 274
9.1 Mehrdimensionale Zerlegungsoperatoren 275
9.1.1 Tensorprodukte von CQFs 276
9.1.2 Tensorprodukte von DTTs und LTTs 279
9.1.3 Komplexität des d-dimensionalen Algorithmus der besten Basis . . 281
9.1.4 Anisotropische Dilatationen in mehreren Dimensionen 281
9.2 Praktische Überlegungen 284
9.2.1 Bezeichnung der Basen 284
9.2.2 Platzsparende Speicherung 286
9.3 Implementierungen 287
9.3.1 Transposition 288
9.3.2 Separable Faltungs–Dezimation 290
9.3.3 Separable adjungierte Faltungs–Dezimation 293
9.3.4 Basen separabler Wavelet–Pakete 295
9.3.5 Separables Falten und inverses Falten 299
9.4 Übungsaufgaben 300

10 Zeit–Frequenz–Analyse 302
10.1 Die Zeit–Frequenz–Ebene 302
10.1.1 Wellenformen und Zeit–Frequenz–Atome 302
10.1.2 Die idealisierte Zeit–Frequenz–Ebene 305
10.1.3 Basen und Pflasterungen 308
10.1.4 Analyse und Kompression 311
10.1.5 Zeit–Frequenz–Analyse mit Bibliotheksbäumen 311
10.2 Zeit–Frequenz–Analyse einiger wichtiger Signale 316
10.2.1 Vorteile adaptiver Vorgehensweise 317
10.2.2 Vergleich von Wavelets und Wavelet–Paketen 318
10.2.3 Chirps 321
10.2.4 Sprachsignale 323
10.3 Implementierung 323
10.3.1 Einfache PostScript–Kommandos 324
10.3.2 Zeichnen der Signale 325
10.3.3 Zeichnen der Zeit–Frequenz–Ebene 326

10.3.4 Berechnen der Atome 328
10.4 Übungsaufgaben 329

11 Einige Anwendungen 331
11.1 Bildkompression 331
11.1.1 Digitalisierte Bilder 331
11.1.2 Bildkompression durch Transformationskodierung 335
11.2 Schnelle genäherte Faktoranalyse 345
11.2.1 Die genäherte KL–Transformation 350
11.2.2 Klassifikation von großen Datenmengen 353
11.2.3 Jacobi–Matrizen für komplizierte Abbildungen 356
11.3 Matrixmultiplikation in Nichtstandard–Form 365
11.3.1 Ausdünnen mit der zweidimensionalen besten Basis 365
11.3.2 Anwendung von Operatoren auf Vektoren 366
11.3.3 Verknüpfung von Operatoren 373
11.4 Segmentierung von Sprachsignalen 374
11.4.1 Adaptive lokale Spektralanalyse 375
11.4.2 Segmentierung in Vokale und andere Segmente 376
11.4.3 Experimentelle Ergebnisse 378
11.5 Sprachwirrwarr 380
11.5.1 Zu verschlüsselnde Objekte 380
11.5.2 Merkmalerhaltende Permutationen 381
11.6 Adaptive Rauschunterdrückung durch Wellenformen 382
11.6.1 Kohärenz und Rauschen 382
11.6.2 Experimentelle Ergebnisse 383

A Lösungen für einige Übungsaufgaben 388

B Symbolliste 404

C Koeffizienten der Quadraturfilter 406
C.1 Orthogonale Quadraturfilter 406
C.1.1 Beylkin–Filter 407
C.1.2 Coifman– oder „Coiflet“–Filter 408
C.1.3 Standard–Daubechies–Filter 411
C.1.4 Vaidyanathan–Filter 416
C.2 Biorthogonale Quadraturfilter 417
C.2.1 Symmetrisch/antisymmetrisch, ein Moment 418
C.2.2 Symmetrisch/symmetrisch, zwei Momente 418
C.2.3 Symmetrisch/antisymmetrisch, drei Momente 420

Literaturverzeichnis 423

Sachwortverzeichnis 433